应用数学和力学, 第 22 卷 第 6 期(2001 年 6 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2001) 06_0567_05

非线性耦合标量场方程显式解析解的研究

闫振亚, 张鸿庆

(大连理工大学 应用数学系, 大连 116024)

(我刊编委张鸿庆来稿)

摘要: 利用两种不同的变换, 获得了一类非线性耦合标量场方程的若干类型的精确解析解, 其中包括孤子解、奇性孤波解和三角函数解, 从而丰富了方程解的内容 这些结论可以应用于其它的非线性方程 此外还纠正了一些文献的部分结论

关 键 词: 非线性耦合标量场方程; 解析解; 孤子解; 周期解
中图分类号: O175 1 文献标识码: A

引 言

随着非线性科学的飞速发展, 物理学、力学、化学以及生物学等领域中的许多现象可以通过非线性方程 这一数学模型来简练且准确地描述[1~7] 反过来, 为了定量地研究这些现象, 获得这些非线性方程的精确解的具体形式显得非常重要[1~7] 但求解非线性方程至今仍没有统一的模式, 因此发现更多更好的方法仍是重要的研究课题[1~7]

我们将在本文考虑下面一类非线性耦合标量场方程[3~6]

$$ {}_{xx} = - \quad + \quad {}^3 + d \quad {}^2 , \tag{1a}$$

$$ {}_{xx} = f \quad + \quad {}^3 + d \ (\ {}^2 - 1), \tag{1b}$$

其中 和 为实标量场, d, f 与 为相应的参数 方程(1) 主要来源于基体粒子理论中量子化荷电孤子的研究[3] 对于方程(1) 已经有很多人研究过[3~6] Rajaraman 采用轨道函数法, 获得方程(1) 如下形式的孤子解

$$0 < f < 1/2, \quad = (d - f)^2, \ d > 0, \tag{2}$$

$$ = \tanh[\sqrt{f}(x + x_0)], \quad = \sqrt{(1 - 2f)/d}\,\mathrm{sech}[\sqrt{f}(x + x_0)] \tag{3}$$

事实上, 这组解的条件(2) 是不正确的 应该改为 $0 < f$, $(1 - 2f) d > 0$, $= d(d - 2f)/(1 - 2f)$ 这样解(3) 才为方程(1) 的精确解 文[3] 利用下面变换(4) 来考虑方程(1)

$$ = \sqrt{\frac{2d - 3}{d}}, \quad {}_x = \sqrt{(d - 1) \quad {}^2 + \frac{(2d - 3)^2}{d^2(2 - d)}}$$

$$\left(f = d - 1, \quad = \frac{d(d - 2)}{2d - 3} \right) \tag{4}$$

收稿日期: 1999_10_14; 修订日期: 2000_11_21
基金项目: 国家自然科学基金资助课题(19572022); 教育部博士点基金资助课题(98014119)
作者简介: 闫振亚(1974) , 男, 河南上蔡人, 博士.

其实变换(4)也是错误的 应该改为 $= \sqrt{(2d-3)/d}$, $_x = \sqrt{(d-1)\ ^2 - 1}$ 因此文[4]利用变换(4)而得到的 和 都具有钟状(sech$x$)的孤子解是不正确的,并且可以直接验证方程(1)不可能存在 和 都具有钟状(sech$x$)的孤子解 文[6]又利用变换(4)获得方程(1)的一组奇性孤波解和一组周期解也是错误的

本文主要从如下两个角度来考虑方程(1):首先在文[3]所猜测变换的基础上,通过一系列的假设,获得了方程(1)的若干精确解析解,其中包含孤子解、奇性孤波解和三角函数解 这其中的结论进一步验证了文[6]的预测(方程(1)存在 和 都具有扭状(tanh$x$)的孤子解)是正确的 然后,利用新的变换,获得了正弦和余弦形式的解以及文[6]想要得到的正割和余割两种形式的三角函数解 最后指出这些结论可应用到其他的物理方程中

1 非线性耦合标量场方程(1)的精确解析解

对于给定的方程(1),文[3,4]所猜测的变换如下

$$_x = A + B\ ^2 + C\ ^2, \quad = D\ , \tag{5}$$

其中A, B, C和D为待定的常数 我们将利用变换(5)来考虑方程(1) 将变换(5)分别代入方程(1a)和(1b),通过比较系数,可得下面的关系

$$2AB = -1,\ 2B^2 = 1,\ 2BC + 2CD = d, \tag{6}$$

$$f - d = AD, \quad = DC,\ D^2 + BD = d \tag{7}$$

解方程(6)和(7),得

$$A = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ B = \frac{1}{\sqrt{2}},\ C = \sqrt{\frac{}{2}},\ D = \sqrt{2}\ , \tag{8}$$

$$d = 2 + \sqrt{\ },\ f = 2 \quad (> 0), \tag{9}$$

其中 $=$ 1, $=$ 1 利用(6)~(8)和变换(5),我们可以获得下面的关系式

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ _x, \tag{10}$$

$$_{xx} - \frac{d}{2}\ _x^2 - \sqrt{\ } - \ ^3 = 0 \tag{11}$$

再作一个假设 $_x = \sqrt{\ }$,则 $_{xx} = \ _x/2\sqrt{\ } = \ /2$,将其代入方程(11),可得如下著名的Bernoulli方程

$$- \frac{d}{} + 2\sqrt{\ } - 2\ ^3 = 0 \tag{12}$$

因此,解之得

$$_x = \sqrt{\ } = \sqrt{\exp\left(\frac{d}{}\mathrm{d}\right)\left[2(\ ^3 - 2\sqrt{\ })\exp\left(-\frac{d}{}\mathrm{d}\right)\mathrm{d} + \ _0\right]} =$$

$$\sqrt{2}\sqrt{\ ^2 + \frac{}{2-\sqrt{\ }}\ ^4 + \ _0\ ^{d/}}, \tag{13}$$

其中 $_0$ 为积分常数 对于方程(13),分以下4种情况作进一步的讨论:

情况( ) 当 $=$ $=$ 1, $d = 3$, $f = 2$, $_0 = 2$ 时,方程(13)被约化为Bernoulli方程

$$_x = \sqrt{2}\ (1+ \quad) \tag{14}$$

根据关系(10)和Bernoulli方程(14),我们可以获得方程(1)的两组孤子解

$$_1 = -\frac{}{2}\tanh\frac{\sqrt{2}}{2}(x+c) + \frac{}{2},\quad _1 = -\frac{1}{2}\tanh\frac{\sqrt{2}}{2}(x+c) - \frac{1}{2};$$

$$_2 = -\ \frac{}{2}\coth\frac{\sqrt{2}}{2}(x+\ c) - \frac{}{2}, \quad _2 = -\ \frac{1}{2}\coth\frac{\sqrt{2}}{2}(x+\ c) - \frac{1}{2}$$

其中第一组孤波解验证了文[6]的预测是正确的，但是我们所获得的解与文[6]的结论有所不同　第二组解为奇性孤子解

情况( ) 当 $= 1/4$, $= -1$, $d = 0$, $f = 1/2$, $_0 = 1$ 时，方程(13)被约化为著名 Ricatti 方程 $_x = 1/2 + {}^2/4$ 根据关系(10)和 Ricatti 方程，我们可以获得方程(1)的两组三角函数解

$$_3 = \sqrt{2}\tan\frac{\sqrt{2}}{2}(x+\ c), \quad _3 = -\ \sec\frac{\sqrt{2}}{2}(x+\ c)\csc\frac{\sqrt{2}}{2}(x+\ c);$$

$$_4 = -\sqrt{2}\cot\frac{\sqrt{2}}{2}(x+\ c), \quad _4 = \ \sec\frac{\sqrt{2}}{2}(x+\ c)\csc\frac{\sqrt{2}}{2}(x+\ c)$$

情况( ) 当 $_0 = 0$, $2 - \sqrt{\ } > 0$ 时，方程(13)被约化为

$$\frac{1}{\sqrt{2}\ \sqrt{{}^2 + \frac{}{2 - \sqrt{\ }}{}^4}}\mathrm{d} = x + c \tag{15}$$

对方程(15)作变换 $= \sqrt{(2 - \sqrt{\ })/\ }\tan$ ，则由方程(15)，得

$$\tan\frac{}{2} = \exp\left(\ \csc\ \mathrm{d}\right) = \exp(\sqrt{2}\ (x+\ c))$$

因此可获得方程(1)的又一组奇性孤波解

$$= -\ \coth\sqrt{2}\ (x+\ c), \quad = -\ 2\sqrt{\frac{2 - \sqrt{\ }}{}}\operatorname{csch}\sqrt{2}\ (x+\ c)$$

情况( ) 当 $_0 = 0$, $2 - \sqrt{\ } < 0$ 时，方程(13)被约化为

$$\frac{1}{\sqrt{2}\ \sqrt{{}^2 - \frac{}{-2 + \sqrt{\ }}{}^4}}\mathrm{d} = x + c \tag{16}$$

对方程(16)作变换 $= \sqrt{(-2 + \sqrt{\ })/\ }\sin$ ，则由方程(16)，得

$$\tan\frac{}{2} = \exp\left(\ \csc\ \mathrm{d}\right) = \exp(\sqrt{2}\ (x+\ c))$$

因此可获得方程(1)的一组孤波解

$$= -\ \tanh\sqrt{2}\ (x+\ c), \quad = \sqrt{\frac{-2 + \sqrt{\ }}{}}\operatorname{sech}\sqrt{2}\ (x+\ c)$$

这组解与文[3, 4, 6]中被纠正过的孤波解是一致的

下面我们从另外一个角度来考虑方程(1)

取一系列变换为 $= A\ ,\ = B$ 　将其代入方程(1)，则方程(1)约化为满足条件

$$f = d - 1, \quad = [(1 - d)A^2 + B^2]/B^2$$

的一个反应扩散方程

$$_{xx} + \ - (A^2 + dB^2)\ ^3 = 0 \tag{17}$$

方程(17)为著名的 Duffing 方程　其中 A 和 B 为任意常数

情况( ) 当 $A^2 + dB^2 > 0$ 时，可得到方程(1)的正割和余割两种形式的三角函数解

$$= A\sqrt{\frac{2}{A^2 + dB^2}}\sec(x+\ c), \quad = B\sqrt{\frac{2}{A^2 + dB^2}}\sec(x+\ c)$$

$$= A\sqrt{\frac{2}{A^2 + dB^2}}\csc(- x + c), \quad = B\sqrt{\frac{2}{A^2 + dB^2}}\csc(- x + c)$$

这两组解就是文[6]所想要求得的三角函数解

情况( ) 当 $A^2 + dB^2 = 0$ 即 $A = B\sqrt{-d}$, $= d^2 - d + 1$, $f = d - 1$, $d < 0$时, 利用方程(17) 和所设变换, 又获得方程(1) 的一组三角函数周期解

$$= B\sqrt{-d}[c_1\sin(x + c) + c_2\cos(x + c)],$$

$$= B[c_1\sin(x + c) + c_2\cos(x + c)],$$

其中 c_1、c_2 为任意的常数, 这组解以前没有出现过

2 结 论 与 应 用

以上对于参数f、d、 取不同的值, 我们又获得了非线性耦合标量场方程的 8 组精确解析解, 加上以前的6种正确的精确解[3~6], 总共有14种类型的精确解, 这其中包括8组孤波解和6种三角函数周期解 对于参数f、d、 其它的取值范围, 可能也会产生别的类型的精确解, 这有待于进一步地研究 许多有重要物理意义的方程都可以约化为非线性耦合标量场方程, 如 Landou_Ginburg_Higgs 方程、Klein_Gordon 方程以及 sine_Gordon 方程的近似方程等[1~2,6,7] 通过所获得非线性耦合标量场方程的精确解, 我们也可以得到这些方程相应的精确解 例如对于下面的非线性发展方程[3,6]

$$_{tt} - c^2 {}_{xx} - a + b^3 + b^2 = 0, \tag{18a}$$

$$_{tt} - c^2 {}_{xx} + (4e - a) + b^3 + b^2 = 0 \tag{18b}$$

在下面的变换(19) 作用下

$$= \sqrt{a/b}\ (x), \quad = \sqrt{a/b}\ (x), \quad x + t + c_0 = \sqrt{(^2c^2 - ^2)/a}\, x, \tag{19}$$

其中 , , c_0 为任意常数 方程(18) 约化为

$$_{xx} = - + ^3 + ^2, \tag{20a}$$

$$_{xx} = \frac{4e}{a} + ^3 + (^2 - 1) \tag{20b}$$

因此由情况( ) 及变换(19), 我们可得到方程(18) 的孤波解

$$= \sqrt{\frac{a}{b}}\coth\sqrt{\frac{2a}{^2c^2 - ^2}}(x + t + c_0),$$

$$= - 2\sqrt{\frac{3a}{b}}\coth\sqrt{\frac{2a}{^2c^2 - ^2}}(x + t + c_0),$$

其中 $a = 2e$, $ab > 0$, $a(^2c^2 - ^2) > 0$

[参 考 文 献]

[1] Ablowitz M J, Clarkson P A. Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering[M]. New York: Cambridge University Press, 1991.

[2] 谷超豪, 李翊禅, 田畴. 孤立子理论与应用[M]. 杭州: 浙江科学技术出版社, 1990.

[3] 王心宜, 越南. 耦合标量场论中的新孤子解[J]. 物理学报, 1991, **40**(3): 359 364.

[4] Wang X Y, Xu B C, Taylor P L. Exact soliton solutions for a class of coupled fields equation[J]. Phys Lett A, 1993, **173**(1): 30 32.

[5] Huang X W, Han J H. On the exact soliton solutions for a class of coupled field equations[J]. Phys

Lett A, 1993, **182**(3): 300 303.

[6] 范恩贵, 张鸿庆. 非线性耦合标量场方程的精确解[J]. 物理学报, 1998, **47**(7): 1064 1070.

[7] 闫振亚, 张鸿庆, 范恩贵. 一类非线性演化方程新的显式行波解[J]. 物理学报, 1999, **48**(1): 1 5.

Study of Explicit Analytic Solutions for the Nonlinear Coupled Scalar Field Equations

YAN Zhen_ya, ZHANG Hong_qing

(Department of Applied Mathematis, Dalian University of Technology, Dalian 116024, P R China)

Abstract: By using two different transformations, several types of exact analytic solutions for a class of nonlinear coupled scalar field equation are obtained, which contain soliton solutions, singular solitary wave solutions and triangle function solutions. These results can be applied to other nonlinear equations. In addition, parts of conclusions in some references are corrected.

Key words: nonlinear coupled scalar field equation; analytic solution; soliton solution; periodic solution