

文章编号: 1000-0887(2001) 06-0587-06

数值流形方法的变分原理与应用

骆少明, 张湘伟, 蔡永昌

(汕头大学 工学院 机电系, 广东 汕头 515063)

(我刊编委张湘伟来稿)

摘要: 针对线弹性体静力问题, 根据数值流形方法的特点及相应的位移模式, 得到了面向物理覆盖的数值流形方法的变分原理, 详细推导了基于变分原理的数值流形方法的理论计算公式, 建立了数值流形方法的控制方程 作为实际应用, 给出了相应的数值算例, 结果表明, 求解精度和效益令人满意

关键词: 变分原理; 数值流形方法; 数值分析

中图分类号: O176 **文献标识码:** A

引 言

数值流形方法是利用现代数学中流形分析的有限覆盖技术而建立起来的一种最新的数值分析方法 与传统的有限元方法不同, 数值流形方法中的有限覆盖由数学覆盖和物理覆盖组成, 而且数学覆盖和物理覆盖可以分离 通过采用连续和非连续覆盖函数的办法可以统一地处理连续和非连续的力学问题, 被誉为是新世纪的数值方法, 具有极其深远的发展前景和应用价值, 而且在岩土力学问题的分析中得到了应用, 取得了一定的成功 然而, 数值流形方法的理论体系和分析手段正处于不断发展中, 应用领域也逐步扩大, 需要进一步完善 本文从线弹性体静力问题的变分原理入手, 根据数值流形方法的特点及相应的位移模式, 得到了面向物理覆盖的数值流形方法的变分原理, 详细推导了基本变分原理的数值流形方法的理论计算公式, 建立了数值流形方法的控制方程 作为实际应用, 给出了相应的数值算例 计算结果表明, 数值流形方法具有较高的求解精度和求解效益, 是一种高效的数值分析方法

1 线弹性静力问题基本方程与势能泛函

对小变形线弹性问题, 位移和应变关系可写成

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1)$$

最一般的各向异性的应力应变关系为

收稿日期: 1999_11_28; 修订日期: 2000_11_28

基金项目: 广东省自然科学基金资助项目(994396)

作者简介: 骆少明(1966), 男, 湖北嘉鱼人, 副教授, 博士, 重庆大学机械工程博士后科研流动站研究人员;

张湘伟(1950), 男, 山西闻喜人, 教授, 博士, 博士生导师, 汕头大学校长.

$$\bar{ij} = a_{ijkl} kl, \quad (2)$$

式中 a_{ijkl} 为弹性常数 对各向同性的线弹性体, 应力应变关系为

$$\bar{ij} = kk ij + 2 ij, \quad (3)$$

其中 ij 是 Kronecker 记号, k 是 Lamé 常数

若用应力表示应变, 则(3)式变形为

$$ij = b_{ijkl} kl \quad (4)$$

若对各向同性的线弹性体而言, 上式也可写成

$$ij = \frac{1}{E} \left\{ (1 + \nu) \bar{ij} - \nu kk \bar{ij} \right\} \quad (5)$$

记 $A(e)$ 为弹性体应变能密度, 则 $A(e)$ 可写成

$$A(e) = \int_0^e a_{ijkl} kl d \bar{ij} = \frac{1}{2} a_{ijkl} ij kl \quad (6)$$

若弹性体单位体积的体积力为 F_i , 则 \bar{ij} 应满足

$$\bar{ij},j + F_i = 0 \quad (7)$$

此处还应满足应力边界条件

$$\bar{ijn} = p_i \quad (\text{在 } p \text{ 上}); \quad (8)$$

位移边界条件

$$u_i = u_i \quad (\text{在 } u \text{ 上}) \quad (9)$$

根据(7)式和(9)式可写出

$$= - \int_V (\bar{ij},j + F_i) u_i dV + \int_p (\bar{ijn} - p_i) u_i dV = 0 \quad (10)$$

通过变换可以得到

$$= \int_V \left\{ (A(e) - F_i u_i) dV - \int_p p_i u_i dV \right\} = 0 \quad (11)$$

这样便得到势能泛函

$$p = \int_V [A(e) - F_i u_i] dV - \int_p p_i u_i dV \quad (12)$$

最小势能原理可描述成: 在一切有足够光滑性并满足(1)式和(9)式的一切 u_i 和 \bar{ij} 中, 使 p 为极小的解, 必满足(7)式和(8)式

2 数值流形方法的变分原理

将求解域剖分为 N 个流形单元, 每个流形单元是若干个物理覆盖的交集 在相邻的单元上, 位移是连续的, 这样, 势能泛函(12)式可写成:

$$p = \sum_{m=1}^N \left\{ \int_m (A^{(m)}(e) - F_i u_i^{(m)}) dV - \int_p p_i u_i^{(m)} dV \right\}, \quad (13)$$

上标 m 表单元号, \int 表对单元求和

数值流形方法中, 单元是物理覆盖的交集 不妨设第 m 号单元是物理覆盖 $U_{e(1)}, U_{e(2)}, \dots, U_{e(q)}$ 的交集, 则二维问题的位移模式可通过权函数 $w_{e(r)}(x, y)$ 表示为

$$\begin{cases} u_1(x, y) \\ u_2(x, y) \end{cases} = \sum_{r=1}^q w_{e(r)} \begin{cases} u_{1e(r)}(x, y) \\ u_{2e(r)}(x, y) \end{cases} = \sum_{r=1}^q \sum_{j=1}^n [T_{e(r)j}(x, y)] \{D_{e(r)j}\} = \sum_{r=1}^q [T_{e(r)}(x, y)] \{D_{e(r)}\} \quad (14)$$

其中

$$[T_i(x, y)] = (T_{i1} \quad T_{i2} \quad T_{in}) = \begin{bmatrix} t_{1,1}(x, y) & t_{1,2}(x, y) & t_{1,3}(x, y) & \dots & t_{1,2n-1}(x, y) & t_{1,2n}(x, y) \\ t_{2,1}(x, y) & t_{2,2}(x, y) & t_{2,3}(x, y) & \dots & t_{2,2n-1}(x, y) & t_{2,2n}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{i1}(x, y) \\ T_{i2}(x, y) \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$[T_{ij}(x, y)] = [t_{j,1}(x, y) \quad t_{j,2}(x, y) \quad t_{j,3}(x, y) \quad \dots \quad t_{j,2n-1}(x, y) \quad t_{j,2n}(x, y)]$$

而 $\{D_{e(r)}\} = [d_{i1} \quad d_{i2} \quad \dots \quad d_{im}]^T$ 是物理覆盖的自由度, 它与 n 阶完全多项式的线性组合构成常规意义下的位移, 我们称之为广义位移

对(13)式进行变分, 得到

$$\delta p = \sum_{m=1}^N \left\{ \sum_m \left[\frac{A^{(m)}}{y^{(m)}} \frac{(\delta)}{y} - F_i \right]_{q(m)} [T_{mi}] \{D_m\} \delta d - \sum_p \left[\frac{(\delta)}{y} p_i \right]_{q(m)} [T_{mi}] \{D_m\} \delta d \right\} \quad (16)$$

式中的 $q(m)$ 表第 m 个单元是 q 个物理覆盖的交集

对 A/y 而言, 它对 i, j 是对称的, 因此有

$$\frac{A^{(m)}}{y^{(m)}} \frac{(\delta)}{y} = \frac{A^{(m)}}{y^{(m)}} u_{i,j}^{(m)} \quad (17)$$

利用 Green 公式, (17) 式可改写成

$$\sum_m \frac{A^{(m)}}{y^{(m)}} \frac{(\delta)}{y} \delta d = \sum_m \frac{A^{(m)}}{y^{(m)}} n_j^{(m)} \left[T_{mi} \right]_{q(m)} \{D_m\} \delta d - \sum_m \left[\frac{A^{(m)}}{y^{(m)}} \right]_{,j} \left[T_{mi} \right]_{q(m)} \{D_m\} \delta d \quad (18)$$

考虑到位移在相邻单元 m 和 m 之间的连续性, 可得到

$$\delta p = \sum_{m=1}^N \left\{ \sum_m \left[- \left[\frac{A^{(m)}}{y^{(m)}} \right]_{,j} - F_i \right]_{q(m)} [T_{mi}] \{D_m\} \delta d + \sum_p \left[\frac{A^{(m)}}{y^{(m)}} n_j^{(m)} - p_i \right]_{q(m)} [T_{mi}] \{D_m\} \delta d \right\} + \sum_{(mm)} \left[\frac{A^{(m)}}{y^{(m)}} n_j^{(m)} + \frac{A^{(m)}}{y^{(m)}} n_j^{(m)} \right]_{q(m)} [T_{mi}] \{D_m\} \delta d \quad (19)$$

由于 $\{D_m\}$ 在 m 中和 \sum_p 及 $\sum_{(mm)}$ 上均为独立的变量, 所以在 $\delta p = 0$ 的条件下, 给出下述关系:

1) 在每一个物理覆盖内, 数值流形方法的平衡方程为

$$\left[\frac{A^{(m)}}{y^{(m)}} \right]_{,j} [T_{mi}] + F_i [T_{mi}] = 0; \quad (20)$$

2) 在每一个物理覆盖的外力已知边界上

$$\frac{A^{(m)}}{y^{(m)}} n_j^{(m)} [T_{mi}] - p_i [T_{mi}] = 0; \quad (21)$$

3) 相邻流形单元之间的交界面上, 有

$$-\frac{A^{(m)}}{y}n_j^{(m)}[T_{mi}] + \frac{A^{(m)}}{y}n_j^{(m)}[T_{mi}] = 0; \quad (22)$$

这就是数值流形方法的变分原理

3 数值流形方法控制方程的建立

流形单元定义成物理覆盖的交集, 设第 m 个流形单元由物理覆盖 $U_{e(1)}$, $U_{e(2)}$, ..., $U_{e(q)}$ 的交集构成, 则

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(m)\top} &= [u_1^{(m)} \quad u_2^{(m)}], \\ \begin{Bmatrix} u_1^{(m)} \\ u_2^{(m)} \end{Bmatrix} &= \int_{q(m)} [T_m(x, y)] \{D_m\}, \end{aligned} \quad (23)$$

其中 $\{D_m\}$ 是广义位移, $[T_m(x, y)]$ 由(15) 式定义
应力应变关系可写成:

$$= \mathbf{E} \quad (24)$$

其中 \mathbf{E} 是弹性矩阵, 其表达式为

$$\mathbf{E} = \frac{E}{1-\nu} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}$$

而应变与广义位移关系可表成

$$= \mathbf{B}^m \mathbf{D}_m \quad (25)$$

其中

$$\mathbf{D}_m = (D_{e(1)} \quad D_{e(2)} \quad \dots \quad D_{e(q)})^\top$$

是广义位移列阵;

$$\mathbf{B}^m = (B_{e(1)} \quad B_{e(2)} \quad \dots \quad B_{e(q)})$$

是应变矩阵, 其分量为:

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \frac{t_{1,1}}{x} & \frac{t_{1,2}}{x} & \frac{t_{1,2m}}{x} \\ \frac{t_{2,1}}{y} & \frac{t_{2,2}}{y} & \frac{t_{2,2m}}{y} \\ \frac{t_{1,1}}{y} + \frac{t_{2,1}}{x} & \frac{t_{1,2}}{y} + \frac{t_{2,2}}{x} & \frac{t_{1,2m}}{y} + \frac{t_{2,2m}}{x} \end{bmatrix} \quad (26)$$

将上述各式代入(13) 式, 可得到

$$\mathbf{p} = \sum_{m=1}^N \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{D}_m^\top \mathbf{K}^{(m)} \mathbf{D}_m - \mathbf{D}_m^\top \mathbf{R}^{(m)} \right\} \quad (27)$$

其中

$$\mathbf{K}^{(m)} = \mathbf{B}^\top \mathbf{E} \mathbf{B} \mathbf{d}, \quad (28)$$

$$\mathbf{R}^m = \int_m [T_m(x, y)]^\top \mathbf{F} \mathbf{d} + \int_p [T_m(x, y)]^\top \mathbf{p} \mathbf{d} \quad (29)$$

$\mathbf{K}^{(m)}$ 就是数值流形方法的刚度矩阵, $\mathbf{R}^{(m)}$ 为数值流形方法的外荷载矩阵矢量, 而 $\mathbf{D}_m^\top \mathbf{K}^{(m)} \mathbf{D}_m / 2$ 即是流形单元 m 的应变能密度

进一步, 可将(29) 式组集成总体方程

$$p^* = 0 \quad 5D^T KD - D^T R, \tag{30}$$

$$K = \sum_{m=1}^N K^{(m)}, \quad R = \sum_{m=1}^N R^{(m)}, \tag{31}$$

其中 D, K, R 分别为整体广义位移矢量, 刚度矩阵和外荷载矩阵矢量 由变分极值条件 $p^* = 0$, 可给出下述方程:

$$KD = R \tag{32}$$

这就是数值流形方法的控制方程

4 数值算例

作为应用实例, 我们对中心具有圆孔的板利用数值流形方法进行了计算 该板是边长为 12.7 cm 的正方形, 中间有一个直径为 2.54 cm 的圆孔, 板的厚度为 2.54 cm 由于对称性, 只取其四分之一进行计算, 材料的弹性模量为 3.0×10^{10} Pa, 泊松比为 0.3 为比较起见, 采用数值流形方法和有限元方法分别进行了计算, 计算网格见图 1

板的上部受有集度为 1000 Pa 方向向下的分布面力的作用, 根据问题的对称性可确定边界条件: 沿 y 轴的结点受水平方向约束, 沿 x 轴的结点受垂直方向的约束, 坐标原点选在圆孔的圆心

数值流形方法与有限元方法计算网格如图 1 所示, 有限元计算结果由 MARC 分析软件得到, 分别采用二阶四结点和八结点等参元, 而数值流形方法只采用四边形流形单元, 覆盖函数分别取一阶和二阶完全多项式, 计算结果见表 1 从表中可清楚地看出, 数值流形方法四边形单元采用完全一阶覆盖函数可达有限元四结点二阶等参元的计算精度, 而四边形流形单元采用完全二阶覆盖函数则可达有限元八结点二阶等参元的计算精度 而且数值流形方法可根据问题的实际需要不同的区域采用不同阶数的覆盖函数, 具有较大的灵活性, 求解精度和效率均比有限元高

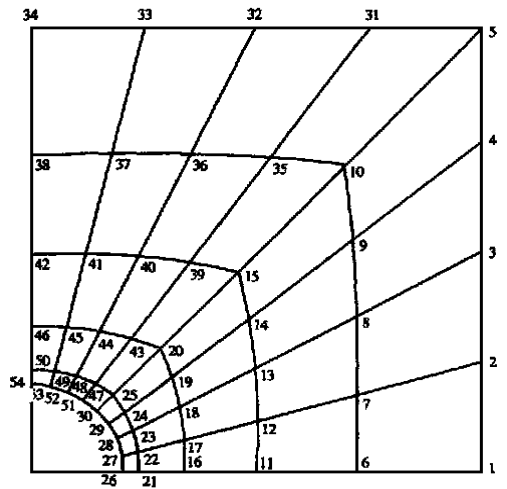


图 1 数值流形方法与有限元法网格

表 1 数值流形方法和有限元法计算结果比较

结 点 号	x 向位移				y 向位移			
	4_node FEM (E-08)	1_order NMM (E-08)	8_node FEM (E-08)	2_order NMM (E-08)	4_node FEM (E-08)	1_order NMM (E-08)	8_node FEM (E-08)	2_order NMM (E-08)
5	-3.55647	-3.5578	-3.35391	-3.3535	1.60329	1.6034	1.58631	1.5863
10	-3.28522	-3.2853	-3.28043	-3.2810	1.22200	1.2220	12.2310	12.231
15	-2.71511	-2.7145	-2.75138	-2.7513	9.09105	9.0902	9.16440	9.1644
20	-2.08057	-2.0804	-2.15971	-2.1593	6.99088	6.9903	7.12594	7.1257

续表 1

结 点 号	x 向位移				y 向位移			
	4_node FEM (E-08)	1_order NMM (E-08)	8_node FEM (E-08)	2_order NMM (E-08)	4_node FEM (E-08)	1_order NMM (E-08)	8_node FEM (E-08)	2_order NMM (E-08)
	25	- 2 118 74	- 2 117 8	- 2 323 34	- 2 324 7	6 715 10	6 713 6	6 985 61
30	- 2 721 33	- 2 720 0	- 3 007 84	- 3 008 6	7 514 67	7 512 6	7 870 98	7 871 9

注: (E-08)表示表格内数据的数量级

5 结 语

数值流形方法是一个具有发展前景的全新的数值分析方法,其理论体系和分析方法处于不断发展之中。本文将变分方法引入,推导了数值流形方法的变分原理。具有一定的理论意义,尚待进一步拓展,这是今后的研究方向之一。

[参 考 文 献]

- [1] 鹭津久一郎. 弹性和塑性力学中的变分法[M]. 老亮, 郝松林译. 北京: 科学出版社, 1984, 30-56.
- [2] 张汝清. 固体力学变分原理及其应用[M]. 重庆: 重庆大学出版社, 1991, 29-45.
- [3] 石根华. 数值流形方法与非连续变形分析[M]. 裴觉民译. 北京: 清华大学出版社, 1997, 3) 22.
- [4] 王芝根, 李云鹏. 数值流形方法中的几点改进[J]. 岩土工程学报, 1998, 20(1): 33-36.
- [5] 裴觉民. 数值流形方法与非连续变形分析[J]. 岩石力学与工程学报, 1997, 16(3): 279-292.
- [6] 朱以文, 曾又林, 陈明祥. 岩石大变形分析的增量流形方法[J]. 岩石力学与工程学报, 1999, 18(1): 1) 5.

The Variational Principle and Application of Numerical Manifold Method

LUO Shao_ming, ZHANG Xiang_wei, CAI Yong_chang

(Mechronic Department, Shantou University, Shantou, Guangdong 515063, P R China)

Abstract: The physical_cover_oriented variational principle of numerical manifold method(NMM) for the analysis of linear elastic static problems was put forward according to the displacement model and the characters of numerical manifold method. The thoeretical calculating formulations and the controlling equation of NMM were derived. As an example, the plate with a hole in the center is calculated and the results show that the solution precision and efficiency of NMM are agreeable.

Key words: variational principle; numerical manifold method; numerical analysis