

文章编号: 1000-0887(2001) 05-0519-06

杜芬方程的 $1/3$ 纯亚谐解及其过渡过程

徐玉秀^{1,2}, 鲍文博^{1,2}, W. 斯切尔伦³, 胡海岩⁴

(1 沈阳工业大学 建工系, 沈阳 110023; 2 东北大学, 沈阳 110006;
3 德国斯图加特大学; 4 南京航空航天大学, 南京 210016)

(许正范推荐)

摘要: 通过谐波平衡法和数值积分法研究了杜芬方程的 $1/3$ 纯亚谐解 对参数变化的过渡过程的敏感性和扰动初始值的过渡过程进行了研究 同时, 还对谐波平衡法和数值积分法的精度进行了比较 也考虑了亚谐波成分的渐近稳态性

关键词: 杜芬方程; 纯亚谐解; 过渡过程

中图分类号: O322 文献标识码: A

引 言

在动力学系统的建模中, 常常得到非线性数学方程, 对此非线性方程难于给出纯分析解, 多数都是依于数值解法, 因此, 找出适合的近似方法研究其系统特性十分重要 寻找一种适合的过程方法, 研究杜芬方程的 $1/3$ 纯亚谐解的稳定性和吸引性, 一直是非线性领域中所关注的问题

1 杜芬方程的纯亚谐解

对无阻尼的杜芬方程:

$$x + \frac{2}{3}x + hx^3 = g \cos t, \quad (1)$$

存在着一个 $1/3$ 纯亚谐解^[1]:

$$x(t) = A \cos \frac{1}{3}t, \quad (2)$$

式(2)中的参数必须满足下列条件:

$$A = \sqrt[3]{4g/h}, \quad = 3 \sqrt{\frac{2}{3} + 2hA^2/4} \quad (3)$$

为了用标准的微分方程组初值问题程序, 将方程(1)改成状态方程形式:

$$x_1 = x_2, \quad x_2 = g \cos t - \frac{2}{3}x_1 - hx_1^3 \quad (4)$$

对给定的系统参数 $g = 1, h = 1, g = 2$, 由(3)可得:

$$A = 2, \quad = 6 \quad (5)$$

对于给定的初始条件: $X_0 = \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, 通过数值积分计算纯亚谐解

收稿日期: 1999_10_18; 修订日期: 2001_01_16

基金项目: 德国巴登府德堡州科研部资助课题(D_B_93_88); 国家自然科学基金资助项目(59572024)

作者简介: 徐玉秀(1958), 女, 山东崂山县人, 教授, 博士, 系主任.

2 谐波平衡法的近似解

虽然,对于无阻尼的杜芬方程可给出一个解析解,但实际系统总是有阻尼的 因此,引入小阻尼:

$$x + 2 \zeta \dot{x} + \omega_0^2 x + h x^3 = g \cos t \tag{6}$$

上述方程无分析解^[2] 因此,人们总是基于近似方法定性或定量地确定其解 由前面的分析解可知:方程(6)不仅有谐波解,还存在着纯亚谐波,为此假设解:

$$x(t) = a_1 \cos t + b_1 \sin t + a_{1/3} \cos(t/3) + b_{1/3} \sin(t/3), \tag{7}$$

简化方程(7):

$$x(t) = a_1 \cos t + b_1 \sin t + a_{1/3} \cos t + b_{1/3} \sin t, \tag{8}$$

其中 $t = \Omega t, \omega_0 = \Omega, \zeta = \zeta \Omega, h = h \Omega^3, g = g \Omega^2$

利用谐波平衡法,略去高阶谐波项导出下列方程组:

$$\left. \begin{aligned} & -2a_1 + 2b_1 + \omega_0^2 a_1 - g + h \left[\frac{3}{4} a_1^3 + \frac{1}{4} a_{1/3}^3 + \frac{3}{4} b_1^2 a_1 + \right. \\ & \left. \frac{3}{2} a_{1/3}^2 a_1 + \frac{3}{2} b_{1/3}^2 a_1 - \frac{3}{4} b_{1/3}^2 a_{1/3} \right] = 0, \\ & -2b_1 - 2a_1 + \omega_0^2 b_1 - g + h \left[\frac{3}{4} b_1^3 - \frac{1}{4} b_{1/3}^3 + \frac{3}{4} a_1^2 b_1 + \right. \\ & \left. \frac{3}{2} a_{1/3}^2 b_1 + \frac{3}{2} a_{1/3}^2 b_{1/3} + \frac{3}{4} a_{1/3}^2 b_{1/3} + \frac{3}{2} b_{1/3}^2 b_1 \right] = 0, \\ & -2a_{1/3} + 2b_{1/3} + \omega_0^2 a_{1/3} - g + h \left[\frac{3}{4} a_{1/3}^3 + \frac{3}{2} a_1^3 a_{1/3} + \frac{3}{2} b_1^2 a_{1/3} + \right. \\ & \left. \frac{3}{4} a_{1/3}^2 a_1 - \frac{3}{4} b_{1/3}^2 a_1 + \frac{3}{4} b_{1/3}^2 a_{1/3} + \frac{3}{2} b_1 a_{1/3} b_{1/3} \right] = 0, \\ & -2b_{1/3} - 2a_{1/3} + \omega_0^2 b_{1/3} - g + h \left[\frac{3}{4} b_{1/3}^3 + \frac{3}{2} a_1^2 b_{1/3} + \frac{3}{2} b_1^2 b_{1/3} - \right. \\ & \left. \frac{3}{4} a_{1/3}^2 b_{1/3} - \frac{3}{4} b_{1/3}^2 b_1 - \frac{3}{2} a_1 a_{1/3} b_{1/3} \right] = 0 \end{aligned} \right\} \tag{9}$$

上面这个以 $a_1, b_1, a_{1/3}, b_{1/3}$ 为未知量的非线性方程组,可用 Levenberg-Marquardt 算法和雅可比矩阵的有限差分法解出

方程组(9)有多个解,对于不同的初值可迭代得到不同的解 对应于无阻尼系统的分析解附近的初始值 $a_{1/3} = 2, a_1 = b_1 = b_{1/3} = 0$ (见(3), $h = 1, \zeta = 1, g = 2$),可得到 0.1~7 频率范围的稳态解(图1) 从图中可看出,主谐波成份在低频率 $\Omega < 2$ 的区域占主要成份 在 $2.5 < \Omega < 3.2$ 内,谐波项占优势 对频率 $\Omega > 3.2$,亚谐波占主要成份

即使在纯亚谐波解附近,用谐波平衡法对所选取的假设解仅对 $\Omega > 3.2$ 才有意义

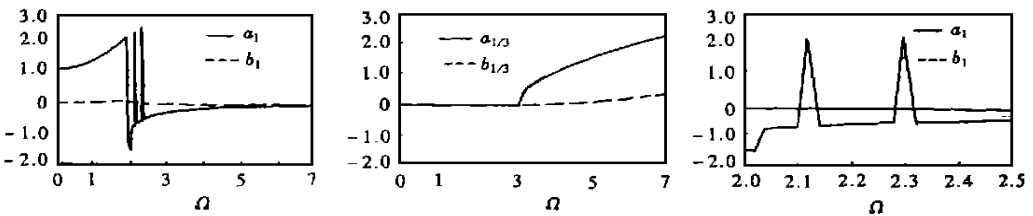


图1 $\zeta = 0.01$ 稳态解的幅频曲线

3 用谐波平衡法分析和研究过渡过程

对假设解(8)引入随时间 t 变化的幅值参数是必要的:

$$x(t) = a_1(t)\cos + b_1(t)\sin + a_{1/3}(t)\cos + b_{1/3}(t)\sin \tag{10}$$

将假设解代到方程(6)后,就得到关于幅值参数的一个非线性微分方程组:

$$\left. \begin{aligned} & a_1 + 2 b_1 + 2 a_1 + 2 a_1 - 2 a_1 + 2 b_1 - g + h \left[\frac{3}{4} a_1^3 + \frac{3}{4} a_1 b_1^2 + \right. \\ & \left. \frac{1}{4} a_{1/3}^3 + \frac{3}{2} a_1 a_{1/3}^2 + \frac{3}{2} a_1 b_{1/3}^2 - \frac{3}{4} a_{1/3} b_{1/3}^2 \right] = 0, \\ & b_1 - 2 a_1 + 2 b_1 + 2 b_1 - 2 b_1 - 2 a_1 + h \left[\frac{3}{4} b_1^3 - \frac{1}{4} b_{1/3}^3 + \right. \\ & \left. \frac{3}{4} a_1^2 b_1 + \frac{3}{2} b_1 a_{1/3}^2 + \frac{3}{2} b_1 b_{1/3}^2 + \frac{3}{4} a_{1/3}^2 b_{1/3} \right] = 0, \\ & a_{1/3} + \frac{3}{2} b_{1/3} + 2 a_{1/3} + 2 a_{1/3} - \frac{1}{9} a_{1/3}^2 + \frac{2}{3} b_{1/3} + \\ & h \left[\frac{3}{4} a_{1/3}^3 + \frac{3}{2} a_1^2 a_{1/3} + \frac{3}{4} a_1 a_{1/3}^2 - \frac{3}{4} a_1 b_{1/3}^2 + \frac{3}{2} b_{1/3}^2 a_{1/3} + \right. \\ & \left. \frac{3}{2} b_1 a_{1/3} b_{1/3} + \frac{3}{4} a_{1/3} b_{1/3}^2 \right] = 0, \\ & b_{1/3} + 2 b_{1/3} - \frac{2}{3} a_{1/3} + 2 b_{1/3} - \frac{1}{9} b_{1/3}^2 - \frac{2}{3} a_{1/3} + \\ & h \left[\frac{3}{4} b_{1/3}^3 + \frac{3}{2} a_1^2 b_{1/3} - \frac{3}{2} a_1 a_{1/3} b_{1/3} + \frac{3}{2} b_1^2 b_{1/3} + \frac{3}{4} b_1 a_{1/3}^2 + \right. \\ & \left. \frac{3}{4} a_{1/3}^2 b_{1/3} - \frac{3}{4} b_1 b_{1/3}^2 \right] = 0 \end{aligned} \right\} \tag{11}$$

要解这个微分方程组,需 8 个初始值, $a_1(0), b_1(0), a_{1/3}(0), b_{1/3}(0), a_1(0), b_1(0), a_{1/3}(0), b_{1/3}(0)$, 但我们仅有两个值,即: 初始位移 $x(0) = x_0$ 和初始速度 $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, 可把这两个值代入假设解中, 导出寻找 8 个初值的两个条件方程 那么, 其余 6 个值是可自由选取的 采用迭代法^[2], 使其余的初始值确定 首先, 将这 6 个任意选取的初始值得出的曲线在时间 $[0, 2\pi]$ 上取均值:

$$f = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\cdot) d\tau$$

将 $f(\cdot)$ 依次用 $a_1, b_1, a_{1/3}$ 和 $b_{1/3}$ 及其导 $\dot{a}_1, \dot{b}_1, \dot{a}_{1/3}$ 和 $\dot{b}_{1/3}$ 代入式(11) 所产生的 f 则描述了改善的初始值, 其改善值由下一步迭代过程给出 这种方法总是允许重新确定 8 个初值中的 6 个 用如此确定的初始值, 使方程组(11) 积分, 从而得到幅值系数的时间曲线

4 研究 $\omega = 6, \zeta = 3/2$ 的过渡过程

1 $\omega = 6, \zeta = 0$ 纯亚谐响应区域的过渡过程

首先考察阻尼参数和激力幅对幅值系数的影响 在改变阻尼参数时, 幅值在稳定值附近产生一个振荡的振动(图略) 在改变激力幅 (g 分别等于 3 和 6) 时, 对于较大的激力幅, 幅值系数在较短的时间内达到其稳态值

然后考察了初始条件的小扰动的情况, 其幅值系数也较快的达到了稳态值(见图 2)

2 $\omega = 3, \zeta = 2$ 纯亚谐响应区域的过渡过程

由前面的研究知道, 稳态解包含有 $\omega = 3/2$ 的主谐波, 对于 $\omega = 3/2$ 及改变阻尼参数下的

过渡特性如图 3 所示 主谐波幅值 a_1, b_1 不依赖于阻尼保持常数, 仅亚谐波幅值 $a_{1/3}, b_{1/3}$ 部分的曲线产生振荡 且亚谐波幅值 $a_{1/3}, b_{1/3}$ 在较大激励幅值的扰动下, 经过较长时间才达到稳态值 图 4 表示了激励幅值 $g = 3$ 的幅值参数的振动

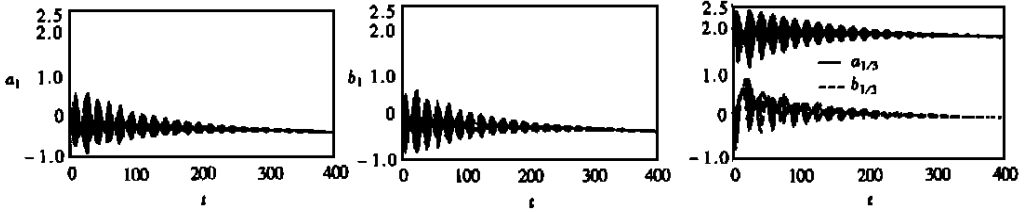


图 2 $\zeta = 6 \times 10^{-2}, \delta = 0.01, g = 2$ 诸谐波的时间历程

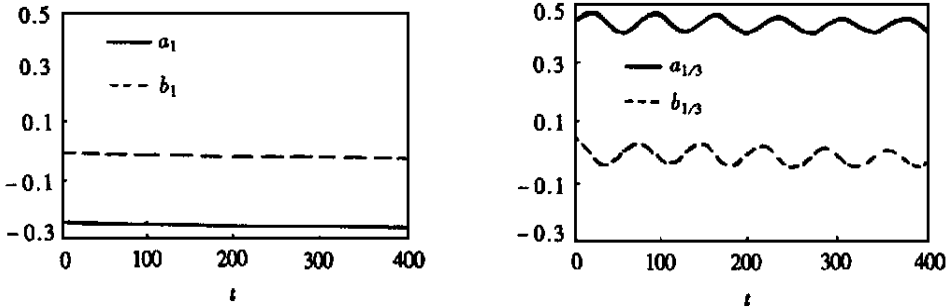


图 3 $\zeta = 3 \times 10^{-2}, \delta = 0.001, g = 2$ 的诸谐波分量的时间历程

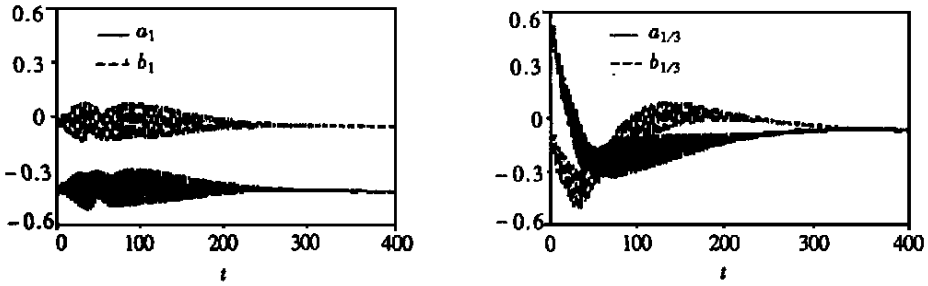


图 4 $\zeta = 3 \times 10^{-2}, \delta = 0.01, g = 3$ 的诸谐波分量的时间历程

5 谐波分量空间的考察

通过式(10)中的谐波分量 $a_1, b_1, a_{1/3}, b_{1/3}$, 可展开一个四维空间 系统的过渡过程作为轨迹在这个参数空间描述 谐波系数 a_1, b_1 即使在参数改变的干扰下, 过渡过程的波动仍很小 亚谐波系数 $a_{1/3}, b_{1/3}$, 其轨迹汇集到一个奇点(见图 5, 6), 这个奇点是一个渐近稳定的焦点, 表征了亚谐振动的稳态解

6 计算精度讨论

对杜芬方程, 研究改变积分步长的计算精度, 并把谐波平衡法与数值积分进行比较

$$X_0 = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1923 \\ 0.05184 \end{pmatrix} \quad (\zeta = 3 \times 10^{-2}), \quad X_0 = \begin{pmatrix} 1.9639 \\ 0.6882 \end{pmatrix} \quad (\zeta = 6 \times 10^{-2})$$

通过初始扰动的系列计算表 1 可看出: 在改变积分步长的情况下, 稳态响应的最大值间的

绝对误差为零, 故分精度足够

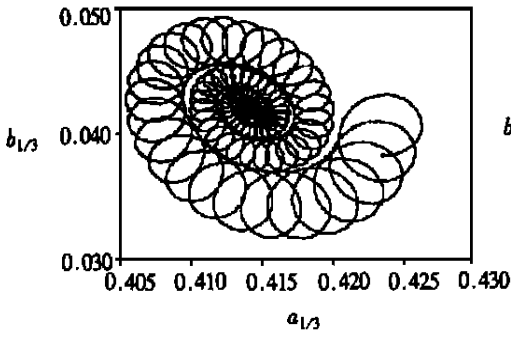


图 5 $\epsilon = 3 \times 10^{-2}$, $\delta = 0.01$ 及扰动下的谐波分量过渡过程

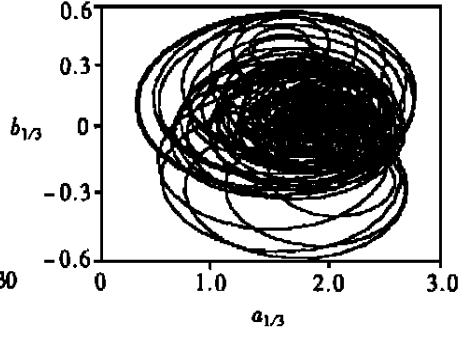


图 6 $\epsilon = 6 \times 10^{-2}$, $\delta = 0.01$ 扰动下的谐波分量过渡过程

表 1 改变积分步长的精度比较(应用相同的初值和参数值 x_0, h, ϵ, g)

初始扰动 $x_1(0), x_2(0)$	积分步长(Δt) $XM(\epsilon = 3 \times 10^{-2})$	改变的步长(Δt) $XM(\epsilon = 3 \times 10^{-2})$	积分步长(Δt) $XM(\epsilon = 6 \times 10^{-2})$	改变的步长(Δt) $XM(\epsilon = 6 \times 10^{-2})$
$x_1(0), x_2(0)$	-0.4920	-0.4920	-0.2004E+01	-0.2004E+01
1.01 $x_1(0), 1.01x_2(0)$	-0.4922	-0.4922	-0.2003E+01	-0.2003E+01
1.02 $x_1(0), 1.02x_2(0)$	0.4923	0.4923	0.2002E+01	0.2002E+01
1.03 $x_1(0), 1.03x_2(0)$	0.4925	0.4925	0.2002E+01	0.2002E+01
1.04 $x_1(0), 1.04x_2(0)$	0.4926	0.4926	0.2003E+01	0.2003E+01
1.05 $x_1(0), 1.05x_2(0)$	-0.4927	-0.4927	0.2007E+01	0.2007E+01
1.10 $x_1(0), 1.10x_2(0)$	-0.4921	0.4921	-0.2008E+01	0.2008E+01
1.25 $x_1(0), 1.25x_2(0)$	-0.4927	-0.4927	0.1064	0.1064
1.50 $x_1(0), 1.50x_2(0)$	-0.4923	-0.4923	0.1284	0.1284

XM : 整个稳态时间特性的最大值; $x_1(0), x_2(0)$: 稳态初始值; $x_1(0), x_2(0)$: 改变的初始值

表 2 谐波平衡法与数值积分法的比较

初始扰动 $x_1(0), x_2(0)$	数值积分法 $XM(\epsilon = 3 \times 10^{-2})$	谐波平衡法 $XM(\epsilon = 3 \times 10^{-2})$	数值积分法 $XM(\epsilon = 6 \times 10^{-2})$	谐波平衡法 $XM(\epsilon = 6 \times 10^{-2})$
$x_1(0), x_2(0)$	-0.4920	-0.4917	-0.2004E+01	-0.2004E+01
1.01 $x_1(0), 1.01x_2(0)$	-0.4922	-0.4917	-0.2003E+01	-0.2003E+01
1.02 $x_1(0), 1.02x_2(0)$	0.4923	0.4917	0.2002E+01	0.2002E+01
1.03 $x_1(0), 1.03x_2(0)$	0.4925	0.4920	0.2002E+01	0.2002E+01
1.04 $x_1(0), 1.04x_2(0)$	0.4926	0.4917	0.2003E+01	0.2003E+01
1.05 $x_1(0), 1.05x_2(0)$	-0.4927	-0.4917	0.2007E+01	0.2007E+01
1.10 $x_1(0), 1.10x_2(0)$	-0.4921	0.4917	-0.2008E+01	K^{**}
1.25 $x_1(0), 1.25x_2(0)$	-0.4927	-0.4919	K^{**}	K^{***}
1.50 $x_1(0), 1.50x_2(0)$	-0.4923	-0.4919	K^{***}	K^*

K^* : 用谐波平衡法得到的结果不收敛; K^{**} : 迭代法^[2]无效; K^{***} : 时间特性在初始条件扰动下, 不能达到稳态状态

从表 2 可看出: 在某些初始扰动范围内, 通过谐波平衡法和数值积分法得到的稳态响应最大值的最大绝对误差低于 0.15% 以下(迭代精度 = 10^{-4}) 因此, 可以说, 假设解达到了较高的精度

7 结 论

杜芬方程的 1/3 纯亚谐波振动可用解假设(7)描述, 在亚谐波频域内, 由谐波平衡和数值积分法所得到的稳态亚谐波振动吻合得相当好

在小扰动范围内, 假设解(7)可成功地近似于真实的 1/3 亚谐波解 其计算达到了亚谐波振动要求的计算精度

在 $\epsilon = 0.01$ 及小初始扰动的情况下, 由参数 $a_{1/3}$, $b_{1/3}$ 表示的轨迹趋于渐近稳定的焦点, 表征了亚谐波振动的渐近稳定性

亚谐波响应幅值系数 $a_{1/3}$, $b_{1/3}$ 对阻尼的改变很敏感

[参 考 文 献]

- [1] Magnus K. Vibration [M]. Stuttgart: Teubner Press, 1976.
- [2] Meinke P H. Study of phase_synchronization and energy trajectory to sub_harmonic vibration[J]. Engineering, 1992, 41(5): Springer_Verlag.
- [3] Kreuzer E. Numerical Study of Non_Linear Dynamic [M]. Berlin: Springer Press, 1987.
- [4] JIN D P, HU H Y. Periodic vibro_impacts and their stability of a dual component system [J]. Acta Mechanica Sinica, 1992, 13(4): 185-198.
- [5] HU H Y. Primary resonance of a forced oscillator with a pair of symmetric set_up elastic stops [J]. Journal of Sound and Vibration, 1992, 209(2): 358-372.
- [6] HU H Y, Dowell E H, Virgin L N. Resonances of a Harmonically forced duffing oscillator with time delay feedback control [J]. Nonlinear Dynamics, 1992, 15(4): 311-327.

A 1/3 Pure Subharmonic Solution and Transient Process for the Duffing's Equation

XU Yu_xiu^{1,2}, BAO Wen_bo^{1,2}, W. Schiehlen³, HU Hai_yan⁴

(1 Department of Civil Engineering Shenyang University of Technology, Shenyang 110023, P R China;

2 Northeast University, Shenyang, 110006, P R China;

3 University Stuttgart, Germany;

4 Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, P R China)

Abstract: The 1/3 subharmonic solution for the Duffing's equation is investigated by using the methods of harmonic balance and numerical integration. The sensitivity of parameter variation for the transient process and the transient process for the perturbation initial conditions are studied. Over and above, the precision of numerical integration method is discussed and the numerical integration method is compared with the harmonic balance method. Finally, asymptotical stability of the pure subharmonic oscillations element is inspected.

Key words: Duffing's equation; subharmonic; transient process