文章编号: 1000_0887(2001) 05_0525_04

与任意图正交的 $[0, k_i]_1^m$ _因子分解*

马润年[1], 许 进[1], 高行山[2]

(1. 西安电子科技大学 电子工程研究所, 西安 710071; 2. 西北工业大学 工程力学系, 西安 710072)

(张汝清推荐)

摘要: 设 G 是一个图, $k_1, \cdots, k_m$ 是正整数· 若图 G 的边能分解成 m 个边不交的 $[0, k_1]$ _因子 $F_1, \cdots, [0, k_m]$ _因子 F_m, 则称 $F = \left\{F_1, \cdots, F_m\right\}$ 是 G 的一个 $[0, k_i]_1^m$ _因子分解· 如果 H 是 G 的一个有 m 条边的子图且对任意的 $1 \leqslant i \leqslant m$ 有 $|E(H) \cap E(F_i)| = 1$, 则称 F 与 H 正交· 证明了若 G 是一个 $[0, k_1 + \cdots + k_m - m + 1]$ _图, H 是 G 的一个有 m 条边的子图, 则图 G 有一个 $[0, k_i]_1^m$ _因子分解与 H 正交·

关 键 词: 图; 因子; 因子分解; 正交因子分解
中图分类号: O157.5 文献标识码: A

1 基本概念和记号

本文仅考虑有限无向简单图· 设 G 是一个图, 分别用 $V(G)$ 和 $E(G)$ 表示 G 的顶点集和边集· 对每个 $x \in V(G)$, 用 $d_G(x)$ 表示 x 在 G 中的次数· 设 f 和 g 是定义在 $V(G)$ 上的整数值函数使 $\forall x \in V(G)$, 有 $g(x) \leqslant f(x)$· 图 G 的一个 (g,f) _因子是指 G 的一个支撑子图 F 满足 $\forall x \in V(G)$, 有 $g(x) \leqslant d_F(x) \leqslant f(x)$, 且称 F 是 G 的一个 (g,f) _因子· 若 $\forall x \in V(G)$, 有 $g(x) \leqslant d_G(x) \leqslant f(x)$, 则称 G 是一个 (g,f) _图· 特别地, $\forall x \in V(G), g(x) = a, f(x) = b$, 则称 G 的 (g,f) _因子为 $[a, b]$ _因子, (g,f) _图为 $[a, b]$ _图· 设 $k_1, \cdots, k_m$ 是正整数, 若 G 的边能分解成 m 个边不交的 $[0, k_1]$ _因子 $F_1, \cdots, [0, k_m]$ _因子 F_m, 则称 $F = \left\{F_1, \cdots, F_m\right\}$ 是 G 的一个 $[0, k_i]_1^m$ _因子分解, 并称 G 是 $[0, k_i]_1^m$ _因子可分解的·

设 H 是 G 的一个有 m 条边的子图, $F = \left\{F_1, \cdots, F_m\right\}$ 是 G 的一个 $[0, k_i]_1^m$ _因子分解, 若对任意的 $1 \leqslant i \leqslant m$ 有 $|E(H) \cap E(F_i)| = 1$, 则称 F 与 H 正交, 即 F 是一个正交 $[0, k_i]_1^m$ _因子分解·

$\forall S \subseteq V(G)$, 令 $f(S) = \sum_{x \in S} f(x)$, $d_G(S) = \sum_{x \in S} d_G(x)$, 特别地, $f(\Phi) = d_G(\Phi) = 0$· $\forall S, T \subseteq V(G), S \cap T = \emptyset$, 用 $E_G(S, T)$ 表示连接 S 和 T 的边的集合, $e_G(S, T) = |E_G(S, T)|$· 其余定义和记号可见文[1, 2, 3]·

文[4, 5, 6] 主要研究了图的正交 $[0, k_i]_1^m$ _因子分解, 本文是它的一个推广·

---

* 收稿日期: 1999_11_05; 修订日期: 2000_12_13
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(69971018)
作者简介: 马润年(1963—), 男, 陕西人, 副教授, 博士.

2 主要结果

引理 1[3] 设 G 是一个图, f 和 g 是定义在 $V(G)$ 上的整数值函数, 且 $\forall x \in V(G)$, 有 $0 \leqslant g(x) < f(x)$, 则 G 有一个 (g,f)_因子含有给定边 e 的充要条件是 $\forall S, T \subseteq V(G)$, $S \cap T = \emptyset$, 有

$$\delta_G = d_G(T) - e_G(S,T) - g(T) + f(S) \geqslant \varepsilon(S,T),$$

其中

$$\varepsilon(S,T) = \begin{cases} 2 & (\text{若 } e = uv \text{ 且 } u, v \in S), \\ 1 & (\text{若 } G - (S \cup T) \text{ 有分支 } C \text{ 使 } e \in E_G(S, V(C))), \\ 0 & (\text{其它}). \end{cases}$$

引理 2[4,5,6] 设 $k_1, \ldots, k_m$ 是正整数, 若 G 是 $[0, k_1 + \cdots + k_m - m + 1]$_图, H 是 G 的一个有 m 条边的不含孤立点的子图满足 $|V(H)| \geqslant |E(H)| = m$ (如 m 条边的树、森林、圈等), 则图 G 有一个 $[0, k_i]_1^m$_因子分解与正交.

定理 设 $k_1, \ldots, k_m$ 是正整数, 若 G 是 $[0, k_1 + \cdots + k_m - m + 1]$_图, H 是 G 的任意一个有 m 条边的子图, 则图 G 有一个 $[0, k_i]_1^m$_因子分解与 H 正交.

证明 首先可设 H 不含孤立点. 对 m 用归纳法. 显然当 $m = 1$ 时结论成立. 当 $m = 2$ 时, 由引理 2 知结论是成立的. 下面假设 $m \geqslant 3$, 且 $E(H) = \{e_1, \ldots, e_m\}$.

很显然, 可假设每个 $k_i \geqslant 2 (1 \leqslant i \leqslant m)$. 否则, 不失一般性, 设 $k_m = 1$, 于是有 $d_G(x) \leqslant k_1 + \cdots + k_m - m + 1 = k_1 + \cdots + k_{m-1} - (m-1) + 1$. 显然, e_m 是 $[0, k_m]$_因子含边 e_m, 而 $G - e_m$ 是一个 $[0, k_1 + \cdots + k_{m-1} - (m-1) + 1]$_图, 且 $H' = H - e_m$ 是一个在 $G - e_m$ 中有 $m-1$ 条边的子图. 由归纳法假设知 $G - e_m$ 有一个 $[0, k_i]_1^{m-1}$ 因子分解与 H' 正交. 因此, 图 G 有一个 $[0, k_i]_1^m$_因子分解与 H 正交. 所以下面假设每个 $k_i \geqslant 2 (1 \leqslant i \leqslant m)$.

若 H 满足 $|V(H)| \geqslant |E(H)| = m$, 则结论成立. 因此假设 H 满足 $|V(H)| < |E(H)|$, 则 H 至少有一个边不是 H 的割边, 不妨设其中的一个为 $e_m = x_m y_m$, 即 $e_m = x_m y_m$ 不是 H 的割边.

设 $G' = G - \{e_1, \ldots, e_{m-1}\}$, $H' = H - e_m$, 显然 $V(H') = V(H)$, $E(H') = \{e_1, \ldots, e_{m-1}\}$. $\forall x \notin V(H')$, $d_{G'}(x) = d_G(x)$; $\forall x \in V(H')$, $d_{G'}(x) = d_G(x) - d_{H'}(x)$, 且 $d_{H'}(x) \geqslant 1$. 定义 $V(G')$ 上的两个整数值函数 g 和 f: $\forall x \in V(G') = V(G)$, $g(x) = \max\{0, d_G(x) - (k_1 + \cdots + k_{m-1} - (m-1) + 1)$, $f(x) = k_m$, 则有 $0 \leqslant g(x) < f(x)$. 利用引理 1 证明 G' 有 (g,f)_因子含边 e_m.

$\forall S, T \subseteq V(G')$, $S \cap T = \emptyset$, 有

$$\begin{aligned} \delta_{G'}(S,T) = {} & d_{G'}(T) - e_{G'}(S,T) - g(T) + f(S) = \\ & d_{G'}(T) - e_{G'}(S,T) - d_G(T_1) + (k_1 + \cdots + k_{m-1} - \\ & (m-1) + 1) |T_1| + k_m |S|, \end{aligned}$$

其中 $T_1 = \{t \in T \mid d_G(t) - k_1 + \cdots + k_{m-1} - (m-1) + 1 > 0\}$.

记 $T' = T_1 \cap V(H')$, $t = k_1 + \cdots k_{m-1} - (m-1) + 1$. 下面分三种情况证明, 其中情形 1 和情形 2 完全类似文[4, 5, 6].

情形 1 若 $|S| \geqslant |T_1|$, 则

$$\delta_{G'}(S,T) = k_m(|S| - |T_1|) + (t + k_m)|T_1| - d_G(T_1) + d_{G'}(T) - e_{G'}(S,T) \geqslant$$

$$
\begin{aligned}
&k_m(|S|-|T_1|)+|T_1|+d_{G'}(T)-e_{G'}(S,T)\geqslant\\
&k_m(|S|-|T_1|)+|T_1|\geqslant|S|-|T_1|+|T_1|=|S|\geqslant\varepsilon(S,T)。
\end{aligned}
$$

情形 2　若 $|S|<|T_1|$，且 $|T_1|-|S|\geqslant 2$，则

$$
\begin{aligned}
\delta_{G'}(S,T)=\ &t(|T_1|-|S|)+(t+k_m)|S|-d_G(T_1)+d_{G'}(T)-e_{G'}(S,T)\geqslant\\
&t(|T_1|-|S|)+d_G(S)+|S|-e_{G'}(S,T)+d_{G'}(T)-d_G(T_1)\geqslant\\
&m(|T_1|-|S|)+|S|+d_{G'}(T)-d_G(T_1)\geqslant\\
&m\cdot 2+|S|-2(m-1)>|S|\geqslant\varepsilon(S,T)。
\end{aligned}
$$

情形 3　若 $|S|<|T_1|$，且 $|T_1|-|S|=1$，下面分三种情形来证明结论。

情形①　若所有 $k_1,\cdots,k_m\geqslant 3$，显然 $t\geqslant 2m-1$，且 $|T'|-d_{H'}(T')\geqslant|V(H')|-d_{H'}(V(H'))$，则

$$
\begin{aligned}
\delta_{G'}(S,T)=\ &t|T_1|+k_m|S|-d_G(T_1)+d_{G'}(T)-e_{G'}(S,T)=\\
&t+(t+k_m)|S|-d_G(T_1)+d_{G'}(T)-e_{G'}(S,T)\geqslant\\
&t+d_G(S)+|S|-e_{G'}(S,T)+d_{G'}(T_1)-d_G(T_1)=\\
&t-1+d_G(S)-e_{G'}(S,T)+|T_1|-d_{H'}(T_1)\geqslant\\
&t-1+|T'|-d_{H'}(T')\geqslant\\
&t-1+|V(H')|-d_{H'}(V(H'))\geqslant\\
&2m-2+|V(H')|-2(m-1)=|V(H')|\geqslant 2\geqslant\varepsilon(S,T)。
\end{aligned}
$$

情形②　若 $k_1,\cdots,k_m$ 中至少有一个 $k_i=2$，无妨设 $k_m=2$，且 $|T_1|\geqslant 4$，则

$$
\begin{aligned}
\delta_{G'}(S,T)=\ &t|T_1|+k_m|S|-d_G(T_1)+d_{G'}(T)-e_{G'}(S,T)=\\
&(t+k_m)|T_1|-k_m-d_G(T_1)+d_{G'}(T)-e_{G'}(S,T)\geqslant\\
&(t+k_m)|T_1|-d_G(T_1)-k_m\geqslant|T_1|-k_m\geqslant 2\geqslant\varepsilon(S,T)。
\end{aligned}
$$

情形③　若 $k_1,\cdots,k_m$ 中至少有一个 $k_i=2$，无妨设 $k_m=2$，且 $|T_1|\leqslant 3$，则显然有 $|T'|-d_{H'}(T')\geqslant 3-(3\times 2+(m-4))=-m+1$，且

$$
\begin{aligned}
\delta_{G'}(S,T)=\ &t|T_1|+k_m|S|-d_G(T_1)+d_{G'}(T)-e_{G'}(S,T)=\\
&t+(t+k_m)|S|-d_G(T_1)+d_{G'}(T)-e_{G'}(S,T)\geqslant\\
&t+d_G(S)+|S|-e_{G'}(S,T)+d_{G'}(T)-d_G(T_1)=\\
&t-1+d_{G'}(S)+d_{H'}(S\cap V(H'))+\\
&|T_1|-e_{G'}(S,T)+d_{G'}(T)-d_G(T_1)\geqslant\\
&t-1+d_{H'}(S\cap V(H'))+|T_1|+d_{G'}(T)-d_G(T_1)\geqslant\\
&t-1+d_{H'}(S\cap V(H'))+|T_1|+d_{G'}(T_1)-d_G(T_1)=\\
&t-1+d_{H'}(S\cap V(H'))+|T_1|-d_{H'}(T_1)\geqslant\\
&t-1+d_{H'}(S\cap V(H'))+|T'|-d_{H'}(T')\geqslant\\
&m-1+d_{H'}(S\cap V(H'))-m+1\geqslant\\
&d_{H'}(S\cap V(H'))。
\end{aligned}
$$

当 $x_m,y_m\in S$ 时，$d_{H'}(S\cap V(H')\geqslant 2\geqslant\varepsilon(S,T)$；当仅有 x_m 或 $y_m\in S$ 时，$d_{H'}(S\cap V(H')\geqslant 1\geqslant\varepsilon(S,T)$；当 x_m、$y_m\notin S$ 时，$d_{H'}(S\cap V(H')\geqslant 0\geqslant\varepsilon(S,T)$。

综合上述知 $\forall S,T\subseteq V(G')$，$S\cap T=\emptyset$，有 $\delta_{G'}(S,T)\geqslant\varepsilon(S,T)$。所以由引理 1 知图 G' 有一个 (g,f)_因子 F_m 含有给定边 e_m，即图 G 有一个 (g,f)_因子 F_m 含有给定边 e_m，但不含边 $e_1,\cdots,e_{m-1}$。注意到 $\forall x\in V(G)$，$f(x)=k_m$，所以 F_m 是一个 $[0,k_m]$_因子。

另一方面,设 $G = G - E(F_m)$, 则 $0 \leqslant d_G(x) - d_{F_m}(x) \leqslant d_G(x) - g(x) \leqslant d_G(x) - d_G(x) + k_1 + \cdots + k_{m-1} - (m-1) + 1 = k_1 + \cdots + k_{m-1} - (m-1) + 1$
所以 G 是一个 $[0, k_1 + \cdots + k_{m-1} - (m-1) + 1]$ _图, 且 H' 是一个在 G 中有 $m-1$ 条边的子图• 因此, 由归纳法假设知 G 有一个 $[0, k_i]_1^{m-1}$ _因子分解与 H' 正交• 所以图 G 有一个 $[0, k_i]_1^m$ _因子分解与子图 H 正交•

[参 考 文 献]

[1] Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory with Application [M]. London: Macmillan, 1976.

[2] Akiyama J, Kano M. Factors and factorizations of graphs_a survey[J]. Journal of Graph Theory, 1985, **9**(1): 1—42.

[3] 刘桂真. 与星正交的 (g,f) _因子分解[J]. 中国科学(A 辑), 1995, **25**(4): 367—373.

[4] 马润年. 与树正交的 $[0, k_i]_1^m$ _因子分解[J]. 西安电子科技大学学报, 1996, **23**(图论专辑): 66—69.

[5] MA Run_nian, BAI Guo_qiang. On orthogonal $[0, k_i]_1^m$ _factorizations of graphs[J]. Acta Mathematica Scientia, 1998, **18**(4): 114—118.

[6] 高安喜, 马润年. 图的正交因子分解[J]. 陕西师范大学学报(自然科学版), 1999, **22**(2): 20—22.

[7] 马润年, 高行山. 关于图的 (g,f) _因子分解[J]. 应用数学和力学, 1997, **18**(4): 381—386.

$[0, k_i]_1^m$ _Factorizations Orthogonal to a Subgraph

MA Run_nian[1], XU Jin[1], GAO Hang_shan[2]

(1. Electronic Engineering Research Institute, Xidian University, Xi'an 710071, P R China;
2. Department of Engineering Mechanics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, P R China)

Abstract: Let G be a graph, $k_1, \cdots, k_m$ be positive integers. If the edges of graph G can be decomposed into some edge disjoint $[0, k_1]$ _ factor $F_1, \cdots, [0, k_m]$ _ factor F_m, then we can say $F = \{F_1, \cdots, F_m\}$, is a $[0, k_i]_1^m$ _ factorization of G. If H is a subgraph with m edges in graph G and $|E(H) \cap E(F_i)| = 1$ for all $1 \leqslant i \leqslant m$, then we can call that F is orthogonal to H. It is proved that if G is a $[0, k_1 + \cdots + k_m - m + 1]$ _graph, H is a subgraph with m edges in G, then graph G has a $[0, k_i]_1^m$ _ factorization orthogonal to H.

Key words: graph; factor; factorization; orthogonal factorization