文章编号: 1000_0887(2001) 04_0345_09

带转点的三阶常微分方程边值问题的渐近解*

江福汝[1]，　金其年[2]

(1. 上海大学, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072; 2. 南京大学 数学系, 南京 210000)

(我刊编委江福汝来稿)

摘要:　研究带转点的三阶常微分方程

$$\varepsilon y''' + f(x;\varepsilon)y'' + g(x;\varepsilon)y' + h(x;\varepsilon)y = 0, \qquad (-a < x < b, 0 < \varepsilon \ll 1)$$

的边值问题, 其中 $f(x;0)$ 在 $(-a, b)$ 具有多个多重零点• 给出边值问题出现共振的必要条件, 求得其一致有效渐近解和余项估计•

关　键　词:　常微分方程;　边值问题;　转点;　渐近解
中图分类号:　O175.1　　　文献标识码:　A

引　　言

关于不带转点的常微分方程边值问题的奇摄动, 早已被人们研究过, 但关于带转点的边值问题, 由于其退化方程存在奇点, 而致进展缓慢• 在 70 年代初期, Ackerberg 和 O′Malley[1], 以及后来的 Matkowsky[2] 曾研究过形如

$$\varepsilon y'' - f(x;\varepsilon)y' + g(x;\varepsilon)y = 0$$

的二阶方程的转点问题, 区别了共振和非共振现象, 并给出了出现共振的必要条件• 到 90 年代初期, 江福汝[3] 又应用多重尺度法研究了半线性的二阶方程具有多个和多重转点的边值问题, 改正了前人的出现共振的必要条件[4], 给出存在边界层或内层的判别法, 并作出边值问题的渐近解和对余项进行估计• 但关于带转点的高阶常微分方程边值问题的解的渐近性态, 还未见研究工作• 本文试对三阶常微分方程的转点问题进行探讨• 先考察线性方程的情形, 可以类似文[3] 地推广到半线性方程•

1　形 式 解

考察三阶常微分方程

$$\varepsilon y''' + f(x;\varepsilon)y'' + g(x;\varepsilon)y' + h(x;\varepsilon)y = 0, \qquad (-a < x < b; 0 < \varepsilon \ll 1), \tag{1}$$

其中 f、g、h 具有渐近展开式

$$f(x;\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i f_i(x),\ \ g(x;\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i g_i(x),\ \ h(x;\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i h_i(x),$$

* 收稿日期:　1999_06_16;　修订日期:　2000_11_19
作者简介:　江福汝(1927—), 男, 江苏丹阳人, 教授, 美国数学评论和德国数学文摘评论员;
金其年(1969—), 男, 安徽肥西人, 副教授, 博士.

各系数是 $(-a, b)$ 中的解析函数.

为了描写解在边界层或内层急剧变化的性态, 引进多重尺度变量

$$\xi = \frac{u(x)}{\varepsilon}, \quad \eta = x, \tag{2}$$

其中 $u(x)$ 是待定函数. 在两变量下, 各阶导数具有展开式

$$\frac{d}{dx} = \varepsilon^{-1} u_x \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{d^2}{dx^2} = \varepsilon^{-2} u_x^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \varepsilon^{-1}\left(2u_x \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + u_{xx} \frac{\partial}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{d^3}{dx^3} = \varepsilon^{-3} u_x^3 \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} + \varepsilon^{-2}\left(3u_x^2 \frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial \eta} + 3u_x u_{xx} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\right) + \varepsilon^{-1}\left(3u_x \frac{\partial^3}{\partial \xi \partial \eta^2} + 3u_{xx} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + u_{xxx} \frac{\partial}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial^3}{\partial \eta^3}.$$

方程(1)具有展开式

$$(K_0 + \varepsilon K_1 + \varepsilon^2 K_2 + \cdots + \varepsilon^n K_n + \cdots) y + \varepsilon^2 (h_0 + \varepsilon h_1 + \varepsilon^2 h_2 + \cdots + \varepsilon^n h_n + \cdots) y = 0, \tag{3}$$

其中

$$K_0 = u_x^3 \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} + f_0 u_x^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2},$$

$$K_1 = 3u_x^2 \frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial \eta} + 3u_x u_{xx} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + f_0\left(2u_x \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + u_{xx} \frac{\partial}{\partial \xi}\right) + f_1 u_x^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + g_0 u_x \frac{\partial}{\partial \xi},$$

$$K_2 = 3u_x \frac{\partial^3}{\partial \xi \partial \eta^2} + 3u_{xx} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + u_{xxx} \frac{\partial}{\partial \xi} + f_0 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + f_1\left(2u_x \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + u_{xx} \frac{\partial}{\partial \xi}\right) + f_2 u_x^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + g_0 \frac{\partial}{\partial \eta} + g_1 u_x \frac{\partial}{\partial \xi},$$

$$K_3 = \frac{\partial^3}{\partial \eta^3} + f_1 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + f_2\left(2u_x \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + u_{xx} \frac{\partial}{\partial \xi}\right) + f_3 u_x^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + g_1 \frac{\partial}{\partial \eta} + g_2 u_x \frac{\partial}{\partial \xi},$$

$$K_n = f_{n-2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + f_{n-1}\left(2u_x \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + u_{xx} \frac{\partial}{\partial \xi}\right) + f_{n-3} u_x^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + g_{n-2} \frac{\partial}{\partial \eta} + g_{n-1} u_x \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (n \geqslant 4).$$

假设方程(2)的解具有展开式

$$y(\xi, \eta; \varepsilon) = y_0(\xi, \eta) + \varepsilon y_1(\xi, \eta) + \cdots + \varepsilon^n y_n(\xi, \eta) + \cdots. \tag{4}$$

代入(3)式, 再比较 ε 的同次幂的系数, 得到关于 $y_n(\xi, \eta)$, $n = 0, 1, 2, \cdots$ 的递推方程

$$K_0 y_0 \equiv u_x^3 \frac{\partial^3 y_0}{\partial \xi^3} + f_0 u_x^2 \frac{\partial^2 y_0}{\partial \xi^2} = 0, \tag{5a}$$

$$K_0 y_1 \equiv u_x^3 \frac{\partial^3 y_1}{\partial \xi^3} + f_0 u_x^2 \frac{\partial^2 y_1}{\partial \xi^2} = -K_1 y_0, \tag{5b}$$

$$K_0 y_2 = -K_1 y_1 - K_2 y_0 - h_0 y_0, \tag{5c}$$

$$K_0 y_n = -\sum_{i=1}^{n} K_i y_{n-i} - \sum_{i=0}^{n-2} h_i y_{(n-2)-i} \quad (n \geqslant 3). \tag{5d}$$

为了使递推方程取最简单的形式, 可令(2)中的待定函数 $u(x)$ 为

$$u(x) = \int_{x_0}^{x} f_0(t) \, dt, \tag{6}$$

其中 x_0 是$[-a, b]$ 上的固定点. 从(5a)有

$$\frac{\partial^3 y_0}{\partial \xi^3} + \frac{\partial^2 y_0}{\partial \xi^2} = 0, \tag{7}$$

解得

$$y_0 = A_0(\eta) + \xi B_0(\eta) + C_0(\eta)\mathrm{e}^{-\xi}, \tag{8}$$

其中 $A_0(\eta)$, $B_0(\eta)$, $C_0(\eta)$ 是待定函数• 将(8) 式代入方程(5b) 得到

$$\frac{\partial^3 y_1}{\partial \xi^3} + \frac{\partial^2 y_1}{\partial \xi^2} = \frac{-1}{f_0(\eta)}\left(\frac{\mathrm{d}C_0}{\mathrm{d}\eta} + \frac{2f_{0,x} + f_1 f_0 - g_0}{f_0}C_0\right) \tag{9}$$

(因 y_0 当 $\xi \to \infty$ 时是有界, 所以 $B_0(\eta) \equiv 0$)• 令(9) 式的右端为零, 求得

$$C_0(\eta) = \frac{d_0}{f_0^2(\eta)}\exp\left[-\int_{\eta_1}^{\eta}\frac{f_0 f_1 - g_0}{f_0}\mathrm{d}t\right], \tag{10}$$

其中 d_0 是待定常数, η_1 是 $[-a, b]$ 上的某固定点, 使便于确定常数 d_0• 此时方程(9) 成为齐次方程, 取其解

$$y_1 = A_1(\eta) + C_1(\eta)\mathrm{e}^{-\xi}. \tag{11}$$

其中 $A_1(\eta)$, $C_1(\eta)$ 是待定函数• 将(8) 式和(11) 式代入方程 (5c), 得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 y_2}{\partial \xi^3} + \frac{\partial^2 y_2}{\partial \xi^2} = \frac{-\mathrm{e}^{-\xi}}{f_0(\eta)}\Bigg[&\frac{\mathrm{d}C_1}{\mathrm{d}\eta} + \frac{2f_{0,x} + f_1 f_0 - g_0}{f_0}C_1 - \frac{2f_0 C_0'' + (3f_{0,x} + 2f_1 f_0 - g_0)C_0'}{f_0^2} - \\ &\frac{(f_{0,xx} + f_1 f_{0,x} - f_2 f_0^2 + f_0 g_1)C_0}{f_0^2}\Bigg] - \frac{1}{f_0^3}(f_0 A_0'' + g_0 A_0' + h_0 A_0).\end{aligned} \tag{12}$$

从上式的右端看出 $A_0(\eta)$ 应是(1) 的退化方程的解,

$$f_0(\eta)A_0'' + g_0(\eta)A_0' + h_0(\eta)A_0 = 0, \tag{13}$$

和 $C_1(\eta)$ 确定于非齐次方程

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}C_1}{\mathrm{d}\eta} + \frac{2f_{0,x} + f_1 f_0 - g_0}{f_0}C_1 = \frac{1}{f_0^2}[&2f_0 C_0'' + 3(f_{0,x} + 2f_1 f_0 - g_0)C_0' + \\ &(f_{0,xx} + f_1 f_{0,x} - f_2 f_0^2 + f_0 g_1)C_0].\end{aligned} \tag{14}$$

此时方程(12) 化为齐次方程, 解得

$$y_2 = A_2(\eta) + C_2(\eta)\mathrm{e}^{-\xi}, \tag{15}$$

其中 $A_2(\eta)$, $C_2(\eta)$ 是待定函数• 将(8)、(11) 和(15) 式代入方程(5d)(取 $n = 4$), 可以类似地得到确定 $A_2(\eta)$ 和 $C_2(\eta)$ 的非齐次方程从而求得 $y_1(\xi, \eta)$• 如此继续下去可以求得 $y_n(\xi, \eta)$, $n \geqslant 2$, 它们都具有形式

$$y_n = A_n(\eta) + C_n(\eta)\mathrm{e}^{-\xi}, \tag{16}$$

除掉在 $f_0(x)$ 的零点外都有效•

从 $y_n(\xi, \eta)$ 的形式可以看出, 当积分

$$I(x; x_0) = \int_{x_0}^{x} f_0(t)\mathrm{d}t > 0$$

时, (16) 式右端第二项将随 $\varepsilon \to 0$ 而指数型地趋于零, 只在 x_0 点的邻域校正 $A_n(\eta)$, 这有助于我们预测解的渐近形态•

2 边 值 问 题

作为一个例子考虑边值问题

$$\begin{cases}\varepsilon y''' + f(x;\varepsilon)y'' + g(x;\varepsilon)y' + h(x;\varepsilon)y = 0, \\ y'(-a;\varepsilon) = \alpha(\varepsilon),\ y(b;\varepsilon) = \beta(\varepsilon),\ y'(b;\varepsilon) = \gamma(\varepsilon),\end{cases} \tag{17}$$

其中 $\alpha(\varepsilon)$、$\beta(\varepsilon)$、$\gamma(\varepsilon)$ 具有渐近展开式

$$\alpha(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\alpha_i,\quad \beta(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\beta_i,\quad \gamma(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\gamma_i.$$

如同二阶方程一样地，若边值问题的极限解为非零解，则称边值问题出现共振，否则称边值问题为非共振的[1]• 在方程(1)的系数是解析函数的假设下，出现共振的必要条件是存在非零的外部解[2]•

情形 1 方程(1)只存在一个有界的非零外部解(除掉常数因子)，并在 $x=-a$ 和 $x=b$ 的邻域分别成立

$I(x;-a)>0$，当 $-a<x<-a+\delta$；$I(x;b)>0$，当 $b-\delta<x<b$，

其中 δ 是小的正数•

若以 $\phi(x)$ 表示退化方程(13)的有界非零解，则方程(1)的有界非零外部解是

$$y_{\text{out}}=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n(a_n\phi(x)+\Phi_n(x)),$$

其中 $a_n(n=0,1,2,\cdots)$ 是待定常数；$\Phi_0\equiv 0$，$\Phi_n(x)(n=1,2,3,\cdots)$ 分别是下面递推方程的特解，

$$\begin{cases}f_0A_1''+g_0A_1'+h_0A_1=-A_1^{\circledS} & (A_0\equiv a_0\phi(x)),\\ f_0A_n''+g_1A_n'+h_0A_n=-A_{n-1}^{\circledS}-\sum\limits_{k=1}^{n}(f_kA_{n-k}''+g_kA_{n-k}'+h_kA_{n-k}) & (n=2,3,\cdots)\bullet\end{cases}\tag{18}$$

根据 $y_n(\xi,\eta)$ 的形式，可以预测边值问题(17)的形式渐近解是

$$y(x)=y(\xi,\eta;\varepsilon)=\begin{cases}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n[a_n\phi(\eta)+\Phi_n(\eta)+H^{(1)}(\eta)(C_n^{(1)}(\eta)+\Psi_n(\eta))\mathrm{e}^{-\xi}],\\ \qquad \xi=\dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_{-a}^{\eta}f_0\mathrm{d}t, \qquad \text{当} -a\leqslant x\leqslant 0,\\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n[a_n\phi(\eta)+\Phi_n(\eta)+H^{(2)}(\eta)(C_n^{(2)}(\eta)+\Psi_n(\eta))\mathrm{e}^{-\xi}],\\ \qquad \xi=\dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_{b}^{\eta}f_0\mathrm{d}t, \qquad \text{当}\ 0\leqslant x\leqslant b,\end{cases}\tag{19}$$

其中

$$C_n^{(1)}(\eta)=\frac{d_n^{(1)}}{f_0^2(\eta)}\exp\left[-\int_{-a}^{\eta}\frac{f_0f_1-g_0}{f_0}\mathrm{d}t\right],\quad C_n^{(2)}(\eta)=\frac{d_n^{(2)}}{f_0^2(\eta)}\exp\left[-\int_{b}^{\eta}\frac{f_0f_1-g_0}{f_0}\mathrm{d}t\right];$$

$$H^{(1)}(\eta)=\begin{cases}1, & \text{当} -a\leqslant x\leqslant -a+\dfrac{\delta}{2},\\ h^{(1)}(\eta), & \text{当} -a+\dfrac{\delta}{2}\leqslant x\leqslant -a+\delta,\\ 0, & \text{当} -a+\delta\leqslant x\leqslant 0,\end{cases}\tag{19a}$$

$$H^{(2)}(\eta)=\begin{cases}0, & \text{当}\ 0\leqslant x\leqslant b-\delta,\\ h^{(2)}(\eta), & \text{当}\ b-\delta\leqslant x\leqslant b-\dfrac{\delta}{2},\\ 1, & \text{当}\ b-\dfrac{\delta}{2}\leqslant x\leqslant b;\end{cases}\tag{19b}$$

$\Psi_0\equiv 0$，$\Psi_n(n=1,2,3,\cdots)$ 分别是下面形式的递推方程(参看(14)式)的特解

$$\frac{\mathrm{d}C_n}{\mathrm{d}\eta}+\frac{2f_{0,x}+f_1f_0-g_0}{f_0}C_n=F_n(C_0,C_1,\cdots,C_{n-1})\qquad(n=1,2,3,\cdots),\tag{20}$$

F_n 是各变元的一次齐次函数；$h^{(1)}(\eta)$、$h^{(2)}(\eta)$ 是无限次可微的连接函数；a_n、$d_n^{(1)}$、$d_n^{(2)}(n=0,1,2,\cdots)$ 确定于边界条件

$$
\begin{cases}
\left(\varepsilon^{-1} f_0 \dfrac{\partial}{\partial \xi} + \dfrac{\partial}{\partial \eta}\right) y \Big|_{\eta = -a,\, \xi = 0} = \alpha(\varepsilon), \qquad y \mid_{\eta = b,\, \xi = 0} = \beta(\varepsilon), \\
\left(\varepsilon^{-1} f_0 \dfrac{\partial}{\partial \xi} + \dfrac{\partial}{\partial \eta}\right) y \Big|_{\eta = b,\, \xi = 0} = \gamma(\varepsilon).
\end{cases}
\tag{21}
$$

依次地解得 $d_0^{(1)} = d_0^{(2)} = 0$, 和

$$
a_0 = \frac{\beta_0}{\phi(b)}, \quad d_1^{(1)} = \left(\frac{\beta_0}{\phi(b)} \phi'(-a) - \alpha_0\right) f_0(-a),
$$

$$
d_1^{(2)} = \left(\frac{\beta_0}{\phi(b)} \phi'(b) - \gamma_0\right) f_0(b), \cdots
$$

根据 $y_n(\xi, \eta)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ 所满足的递推关系式, 再考虑到指数因子 $\mathrm{e}^{-\xi}$ 当 $\xi \to \infty$ 时 (即 $\varepsilon \to 0$ 时) 是 ε 的任意阶小量, 容易验证 $Y_N = \sum_{n=0}^{N} \varepsilon^n y_n$ 是边值问题 (17) 的形式渐近解, 即成立

$$
\begin{cases}
\varepsilon Y_N''' + f(x;\varepsilon) Y_N'' + g(x;\varepsilon) Y_N' + h(x;\varepsilon) Y_N = O(\varepsilon^{N+1}), \\
Y_N'(-a;\varepsilon) = \sum\limits_{n=0}^{N-1} \varepsilon^n \alpha_n, \quad Y_N(b;\varepsilon) = \sum\limits_{n=0}^{N} \varepsilon^n \beta_n, \quad Y_N'(b;\varepsilon) = \sum\limits_{n=0}^{N-1} \varepsilon^n \gamma_n.
\end{cases}
\tag{22}
$$

情形 2　方程 (1) 存在两个线性无关的有界外部解, 并在 $x = -a$ 的邻域成立

$$
I(x; -a) > 0, \qquad \text{当} -a < x < -a + \delta,
$$

δ 小的正数.

若以 $\phi_1(x)$ 和 $\phi_2(x)$ 表示退化方程 (13) 的两个线性无关的有界解, 则方程 (1) 的有界外部解是

$$
y_{\mathrm{out}} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \left(a_n \phi_1(x) + b_n \phi_2(x) + \Phi_n(x)\right),
$$

其中 a_n、b_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ 是待定常数; $\Phi_0 \equiv 0$, $\Phi_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ 分别确定于递推方程 (18).

根据 $y_n(\xi, \eta)$ 的形式. 可以预测边值问题的形式渐近解是

$$
y(x) = y(\xi, \eta; \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \left[a_n \phi_1(\eta) + b_n \phi_2(\eta) + \Phi_n(\eta) + H(\eta)\left(C_n(\eta) + \Psi_n(\eta)\right) \mathrm{e}^{-\xi}\right],
$$

$$
\xi = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-a}^{\eta} f_0 \, \mathrm{d}t, \qquad \text{当} -a \leqslant x \leqslant b,
\tag{23}
$$

其中 $$C_n(\eta) = \frac{d_n}{f_0^2(\eta)} \exp\left[-\int_{-a}^{\eta} \frac{f_0 f_1 - g_0}{f_0} \mathrm{d}t\right],$$

和

$$
H(\eta) = \begin{cases}
1, & \text{当} -a \leqslant x \leqslant -a + \delta, \\
h(\eta), & \text{当} -a + \delta \leqslant x \leqslant 0, \\
0, & \text{当 } 0 \leqslant x \leqslant b,
\end{cases}
\tag{24}
$$

$h(\eta)$ 是无限次连续可微的连接函数; $\Psi_0 \equiv 0$, Ψ_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ 分别是形式 (20) 的递推方程的特解; a_n、b_n 和 d_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ 确定于边界条件

$$
\begin{cases}
\left(\varepsilon^{-1} f_0 \dfrac{\partial}{\partial \xi} + \dfrac{\partial}{\partial \eta}\right) y \Big|_{\eta = -a,\, \xi = 0} = \alpha(\varepsilon), \\
\sum\limits_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \left(a_n \phi_1 + b_n \phi_2 + \Phi_n\right) \mid_{\eta = b} = \beta(\varepsilon), \\
\sum\limits_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \left(a_n \phi_1' + b_n \phi_2' + \Phi_n'\right) \mid_{\eta = b} = \gamma(\varepsilon).
\end{cases}
\tag{25}
$$

依次解得

$$d_0=0,\ a_0=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}\beta_0 & \phi_2(b)\\ \gamma_0 & \phi_2'(b)\end{vmatrix},\ b_0=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}\phi_1(b) & \beta_0\\ \phi_1'(b) & \gamma_0\end{vmatrix},$$

$$d_1=(a_0\phi_1'(-a)+b_0\phi_2'(-a)-\alpha_0)f_0(-a),\ \cdots,$$

其中 $\Delta=(\phi_1(b)\phi_2'(b)-\phi_2(b)\phi_1'(b))$•

根据各递推关系式, 和指数因子 $e^{-\xi}$ 的性质, 容易验证 $Y_N=\sum_{n=0}^{N}\varepsilon^n y_n$ 是边值问题(17) 的形式渐近解, 即成立(22) 式•

若在 $x=b$ 的邻域成立

$$I(x;b)>0,\qquad 当\ b-\delta<x<b,$$

δ 是小的正数, 则可预测边值问题的形式渐近解是

$$y(x)=y(\xi,\eta;\varepsilon)=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n[a_n\phi_1(\eta)+b_n\phi_2(\eta)+\Phi_n(\eta)+\overline{H(\eta)}(C_n(\eta)+\Psi_n(\eta))e^{-\xi}],$$

$$\xi=\frac{1}{\varepsilon}\int_b^{\eta}f_0\mathrm{d}t,\qquad 当-a\leqslant x\leqslant b•$$

各符号的意义与上面相同, 只是 $H(\eta)$ 被代替成

$$\overline{H(\eta)}=\begin{cases}0, & 当-a\leqslant x\leqslant 0,\\ h(\eta), & 当\ 0\leqslant x\leqslant b-\delta,\\ 1, & 当\ b-\delta\leqslant x\leqslant b\end{cases}$$

和边界条件(25) 被代替成

$$\begin{cases}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n(a_n\phi_1'+b_n\phi_2'+\Phi_n')\mid_{\eta=-a}=\alpha(\varepsilon),\\ \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n(a_n\phi_1+b_n\phi_2+\Phi_n)\mid_{\eta=b}=\beta(\varepsilon),\ \left(\varepsilon^{-1}f_0\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial\eta}\right)y\Big|_{\eta=b,\xi=0}=\gamma(\varepsilon)•\end{cases}\tag{26}$$

情形 3 方程(1) 不存在有界的非零外部解•

在此情形, 如果方程(1) 的边值问题的解的极限存在, 则只可能是零解• 在下面条件下,

$$\beta(\varepsilon)\equiv\gamma(\varepsilon)\equiv 0,\ I(x;-a)>0,\qquad 当-a<x<-a+\delta,$$

可以预测边值问题(17) 的形式渐近解是

$$y(x)=y(\xi,\eta;\varepsilon)=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n H(\eta)(C_n(\eta)+\Psi_n(\eta))e^{-\xi},\qquad 当-a\leqslant x\leqslant b•\tag{27}$$

各符号的意义与情形 2 相同, 只是待定常数 $d_n(n=0,1,2,\cdots)$ 确定于边界条件

$$\left(\varepsilon^{-1}f_0\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial\eta}\right)y\Big|_{\eta=-a,\xi=0}=\alpha(\varepsilon),\tag{28}$$

可依次地求得

$$d_0=0,\ d_1=-\alpha_0 f_0(-a),\ \cdots•$$

3 渐 近 性

引理[5] 在边值问题

$$\begin{cases}y'''=f(x)y''+g(x)y'+h(x)y, & -a<x<b,\end{cases}\tag{29}$$

$$\quad y'(-a)=A,\ y(b)=B,\ y'(b)=C\tag{30}$$

中, 若系数 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$ 在 $[-a,b]$ 上连续, 且 $h(x)\geqslant 0$, 并存在在 $[-a,b]$ 中是三次连续可微的函数 ω 和 $\underline{\omega}$ 满足

$$\overline{\omega}''' \leqslant f(x)\overline{\omega}'' + g(x)\overline{\omega}' + h(x)\overline{\omega},\quad \underline{\omega}''' \geqslant f(x)\underline{\omega}'' + g(x)\underline{\omega}' + h(x)\underline{\omega}, \tag{31}$$

$$\overline{\omega} \leqslant \underline{\omega},\quad \overline{\omega}' \geqslant \underline{\omega}',\qquad \text{当} -a \leqslant x \leqslant b, \tag{32}$$

以及成立

$$\underline{\omega}'(-a) \leqslant A \leqslant \overline{\omega}'(-a),\ \overline{\omega}(b) \leqslant B \leqslant \underline{\omega}(b),\ \underline{\omega}'(b) \leqslant C \leqslant \overline{\omega}'(b), \tag{33}$$

则边值问题(29)、(30)存在解 $y = y(x)$, 和满足不等式

$$\overline{\omega}(x) \leqslant y(x) \leqslant \underline{\omega}(x),\ \underline{\omega}'(x) \leqslant y'(x) \leqslant \overline{\omega}'(x),\qquad -a \leqslant x \leqslant b. \tag{34}$$

此引理是文[5]中定理5的特例情形. 按Nagumo给出的定义[6], 称满足不等式(31)的函数 $\overline{\omega}(x)$ 和 $\underline{\omega}(x)$ 分别为方程(29)的上解和下解.

回到边值问题(17), 在共振即情形1和2下, 有定理

定理1 若 $h(x) \leqslant 0\ (-a \leqslant x \leqslant b)$ 和存在 $\varphi(x) \in C^3[-a, b]$ 使得

$$f_0(x)\varphi'' + g_0(x)\varphi' + h_0(x)\varphi > 0,\qquad -a \leqslant x \leqslant b, \tag{35}$$

$$\varphi'(-a) < 0,\ \varphi(b) > 0,\ \varphi'(b) < 0, \tag{36}$$

则边值问题有解 $y = y(x;\varepsilon)$ 满足不等式

$$\overline{\omega}(x;\varepsilon) \leqslant y(x;\varepsilon) \leqslant \underline{\omega}(x;\varepsilon),\ \underline{\omega}'(x;\varepsilon) \leqslant y'(x;\varepsilon) \leqslant \overline{\omega}'(x;\varepsilon), \tag{37}$$

其中

$$\overline{\omega}(x;\varepsilon) = Y_N - \varepsilon^N K\varphi(x),\ \underline{\omega}(x;\varepsilon) = Y_N + \varepsilon^N K\varphi(x), \tag{38}$$

K 是充分大的正数, $Y_N = \sum_{n=0}^{N}\varepsilon^n y_n(x)$ 是 N 阶形式渐近解.

证 首先证明 $\overline{\omega}$ 和 $\underline{\omega}$ 分别是方程的上解和下解. 今

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\overline{\omega}''' + f(x;\varepsilon)\overline{\omega}'' + g(x;\varepsilon)\overline{\omega}' + h(x;\varepsilon)\overline{\omega} = \\
&\quad \varepsilon Y_N''' + f(x;\varepsilon)Y_N'' + g(x;\varepsilon)Y_N' + h(x;\varepsilon)Y_N - \varepsilon^{N+1}K\varphi''' - \\
&\quad \varepsilon^N K(f(x;\varepsilon)\varphi'' + g(x;\varepsilon)\varphi' + h(x;\varepsilon)\varphi) = \\
&\quad \varepsilon^{N+1}M(x;\varepsilon) - \varepsilon^{N+1}K\varphi''' - \varepsilon^N K[(f_0(x)\varphi'' + g_0(x)\varphi' + h_0(x)\varphi) + \varepsilon N(x;\varepsilon)],
\end{aligned}$$

其中 $M(x;\varepsilon)$、$N(x;\varepsilon)$ 是 $-a \leqslant x \leqslant b,\ 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ 上的有界函数. 当 K 充分大和 ε_0 充分小时, 上式不取正值, 所以 $\overline{\omega}$ 满足上解的条件. 应用同样的方法可知 $\underline{\omega}$ 满足下解的条件. 又

$$\begin{aligned}
&\underline{\omega}'(-a) = Y_N'(-a) + \varepsilon^N K\varphi'(-a) = \alpha(\varepsilon) - (\varepsilon^N\alpha_N + \varepsilon^{N+1}\alpha_{N+1} + \cdots) + \\
&\quad \varepsilon^N K\varphi'(-a) \leqslant \alpha(\varepsilon), \\
&\overline{\omega}'(-a) = Y_N'(-a) - \varepsilon^N K\varphi'(-a) \geqslant \alpha(\varepsilon),
\end{aligned}$$

所以 $\underline{\omega}'(-a) \leqslant \alpha(\varepsilon) \leqslant \overline{\omega}'(-a)$. 应用同样的方法可知

$$\overline{\omega}(b) \leqslant \beta(\varepsilon) \leqslant \underline{\omega}(b),\ \underline{\omega}'(b) \leqslant \gamma(\varepsilon) \leqslant \overline{\omega}'(b).$$

根据引理可知定理成立.

在情形3, 即非共振的情形有定理:

定理2 若 $h(x) \leqslant 0\ (-a \leqslant x \leqslant b)$, 和存在小的正数 ζ_0、δ_0 使得 $f_0(x) > \zeta_0 > 0$, 当 $-a \leqslant x \leqslant -a + \delta_0$, 则边值问题有解 $y = y(x;\varepsilon)$ 满足不等式

$$\overline{\omega}(x;\varepsilon) \leqslant y(x;\varepsilon) \leqslant \underline{\omega}(x;\varepsilon),\ \underline{\omega}'(x;\varepsilon) \leqslant y'(x;\varepsilon) \leqslant \overline{\omega}'(x;\varepsilon),$$

其中

$$\overline{\omega}(x;\varepsilon) = Y_N - \varepsilon^{N+1}KH(x)\exp\left[\frac{-1}{\varepsilon}\int_{-a}^{x}(f_0(t) - \zeta_0)\,\mathrm{d}t\right],$$

$$\underline{\omega}(x;\varepsilon) = Y_N + \varepsilon^{N+1}KH(x)\exp\left[\frac{-1}{\varepsilon}\int_{-a}^{x}(f_0(t) - \zeta_0)\,\mathrm{d}t\right],$$

K 是充分大的正数, $H(x)$ 是由(24)式定义的连接函数, Y_N 是 N 阶形式渐近解.

证 先证明 $\bar{\omega}$ 和 $\underline{\omega}$ 分别是方程的上解和下解. 今

$$\varepsilon\bar{\omega}''' + f(x;\varepsilon)\bar{\omega}'' + g(x;\varepsilon)\bar{\omega}' + h(x;\varepsilon)\bar{\omega} =$$
$$\varepsilon^{N+1}M(x;\varepsilon) - \varepsilon^{N+1}K(\varepsilon R''' + f(x;\varepsilon)R'' + g(x;\varepsilon)R' + h(x;\varepsilon)R), \tag{39}$$

其中 $M(x;\varepsilon)$ 是 $-a \leqslant x \leqslant b,\ 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ 上的有界函数,

$$R = H(x)\exp\left[\frac{-1}{\varepsilon}\int_{-a}^{x}(f_0(t) - \zeta_0)\,\mathrm{d}t\right].$$

在条件 $f_0(x) > \zeta_0 > 0$ 和 ε_0 是充分小的正数下, 可以证明(39) 式右边括号中的函数恒取正值, 所以 $\bar{\omega}$ 是上解. 应用同样的方法可以证明 $\underline{\omega}$ 是下解. 又

$$\underline{\omega}'(-a) = Y_N'(-a) + \varepsilon^{N+1}KR'(-a) = \alpha(\varepsilon) - (\varepsilon^N\alpha_N + \varepsilon^{N+1}\alpha_{N+1} + \cdots) +$$
$$\varepsilon^{N+1}K\left(H' - \frac{1}{\varepsilon}Hf_0\right)\bigg|_{x=-a} \leqslant \alpha(\varepsilon),$$

当 K 充分大, 同理 $\bar{\omega}' \geqslant \alpha(\varepsilon)$. 根据引理知此定理成立.

4 举 例

例 1 考察边值问题

$$\begin{cases} \varepsilon y''' - xy'' - (a - cx)y' - cy = 0, \\ y'(-1) = \alpha,\ y(1) = \beta,\ y'(1) = \gamma, \end{cases} \tag{40}$$

其中常数 $a > c > 0$.

易知微分方程(40) 只有一个有界的非零外部解

$$\phi(x) = a - cx,$$

又 $I(x;\pm 1) = (1 - x^2)/2 > 0$, 当 $-1 < x < 1$, 所以此边值问题是属于情形 1. 又存在函数

$$\varphi(x) = \frac{a + c}{2c} - x$$

使得

$$-x\varphi'' - (a - cx)\varphi' - c\varphi > 0, \qquad 当\ -1 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$\varphi'(-1) < 0,\quad \varphi(1) > 0,\quad \varphi'(1) < 0.$$

根据定理 1 知, 此边值问题的解存在, 其渐近式由(19) 式给出. 渐近解的首项为

$$y_{\mathrm{pr}}(x;\varepsilon) = \begin{cases} a_0(a - cx) + \varepsilon H^{(1)}(x)d_1^{(1)}\mathrm{e}^{-cx}x^{a-2}\exp\left[\dfrac{-1}{2\varepsilon}(1 - x^2)\right], & -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ a_0(a - cx) + \varepsilon H^{(2)}(x)d_1^{(2)}\mathrm{e}^{-cx}x^{a-2}\exp\left[\dfrac{-1}{2\varepsilon}(1 - x^2)\right], & 0 \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

其中

$$a_0 = \frac{\beta}{a - c},\quad d_1^{(1)} = -\left(\frac{\beta}{a - c}c + \alpha\right),\quad d_1^{(2)} = \left(\frac{\beta}{a - c}c + \gamma\right),$$

$H^{(1)}(x)$ 和 $H^{(2)}(x)$ 是由 (19a) 和(19b) 定义的连接函数.

例 2 考察边值问题

$$\begin{cases} \varepsilon y''' - x^3y'' + 2xy' - y = 0, & -1 < x < 1, \\ y'(-1) = \alpha,\ y(1) = 0,\ y'(1) = 0. \end{cases} \tag{41}$$

易知微分方程(41) 不存在有界的非零外部解, 又 $I(x;-1) = (1 - x^4)/4 > 0$ 当 $-1 < x < 1$, 所以此边值问题是属于情形 3. 今 $h(x) = -1 < 0, f_0(x) = -x^3 > 1/9 > 0$ 当 $-1 < x < -1/2$, 满足定理 2 中的条件, 所以边值问题的解存在; 解的渐近式由(27) 式给出, 其首项为

$$y_{\mathrm{pr}}(x;\varepsilon) = \varepsilon H(x)d_1x^{-6}\exp\left[\frac{2(1 + x)}{x}\right]\exp\left[\frac{-1}{4\varepsilon}(1 - x^4)\right], \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1,$$

其中 $H(x)$ 是由(24) 式给出的连接函数(取 $a = b = 1, \delta = 1/2$), 和 $d_1 = -\alpha$•

对于其它的边界条件, 可以应用同样的方法求得其渐近解和余项的估计•

[参 考 文 献]

[1] Ackerberg R C, O'Malley R E, Jr. Boundary layer problems exhibiting resonance[J]. Stud Appl Math, 1970, **49**: 277—295.

[2] Matkowsky B J. On boundary layer problems exhibiting resonance[J]. SIAM Rev, 1975, **17**: 82—100.

[3] JIANG Fu_ru. Asymptotic solutions of boundary value problems for semilinear ordinary differential equations with turning points[J]. Computational Fluid Dynamics J, 1994, **2**(4): 471—484.

[4] 江福汝. 关于常微分方程转点问题共振的必要条件[J]. 应用数学和力学, 1989, **10**(4): 277—284.

[5] 赵为礼. 三阶非线性微分方程边值问题解的存在性[J]. 吉林大学自然科学学报, 1984, (2): 10—19.

[6] Nagumo M. Über die Differentialgleichung $y'' = f(x, y, y')$ [J]. Proc Phys Math Soc Japan, Ser 3, 1973, **19**(10): 861—866.

Asymptotic Solutions of Boundary Value Problems for Third Order Ordinary Differential Equations With Turning Points

JIANG Fu_ru[1], JIN Qi_nian[2]

(1. Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, P R China;

2. Department of Mathematics, Nanjing University, Nanjing 210000, P R China)

Abstract: Boundary value problems for third order ordinary differential equations with turning points are studied as follows:

$$\varepsilon y''' + f(x;\varepsilon)y'' + g(x;\varepsilon)y' + h(x;\varepsilon)y = 0, \qquad (-a < x < b,\ 0 < \varepsilon \ll 1),$$

where $f(x;0)$ has several multiple zero points in $(-a, b)$. The necessary conditions for exhibiting resonance is given, and the uniformly valid asymptotic solutions and the estimations of remainder terms are obtained.

Key words: boundary value problems; ordinary differential equations; turning points; asymptotic solutions