应用数学和力学, 第 22 卷 第 4 期(2001 年 4 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2001) 04_0373_09

Newton_Riemann 时空中的动力学( )

张荣业

(中国科学院 数学研究所, 北京 100080)

(钱伟长推荐)

摘要: 讨论了 Newton_Riemann 时空中运动的相对性及运动方程的协变性, N_R 时空中 Newton 力学与广义相对论的某些关系及其异同

关 键 词: 伪 Reimann 流形; Reimann 流形; 绝对微分; 平行移动; 相对性; 协变性
中图分类号: O313 1 文献标识码: A

引 言

在( ) (见: 应用数学和力学, 2000 年 21 卷 7 期, 746 754 页) 中我们建立了 N_R 时空中的动力学并给出它在流体力学中的应用 经典 Newton 力学中有 Galilean 相对性原理, 数学上它表现为 Newton 运动方程在 Galilean 变换群下其形式不变 那是在系统 S 的位形空间是 Euclid 空间, 位形时空是 Newtonian_Galilean 时空的情况下成立[1,2] 当系统 S 的位形时空是 N_R 时空时, 是否存在相对性原理? 在数学上它如何表现? 再则流形上有许多坐标系, 在这些坐标系的变换下, 运动方程是否改变? 如何改变?

我们在本文中就讨论这些问题: N_R 时空中 Newton 力学的相对性及运动方程的协变性

1 相 对 性

当在 Riemann 流形 M^n 中运动的质点位于坐标邻域 U M^n 时, 坐标为$(x^1, x^2, \quad, x^n)$, 速度为 $\boldsymbol{V}(t) = x^j(t) \ _j$ 它从时刻 t_0 到 t 在 U 中运动的轨线 的弧长为

$$S(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{g(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{V})}\, \mathrm{d}t, \tag{1}$$

速度为 $\mathrm{d}S/\mathrm{d}t = |\boldsymbol{V}(t)| = \sqrt{g(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{V})}$ 选用弧长 S 为参数, 则

$$\boldsymbol{V}(t) = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{V}(s), \tag{2}$$

$$\boldsymbol{V}(s) = \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s}\ _j = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{V}(t)$$

显然, $|\boldsymbol{V}(s)| = 1$, $\boldsymbol{V}(s)$ 是 的单位切向量 关于 t 绝对微分(2) 后得

$$\frac{\mathbf{D}\boldsymbol{V}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 S}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{V}(s) + \left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\right)^2 \frac{\mathbf{D}\boldsymbol{V}(s)}{\mathrm{d}s}, \tag{3}$$

收稿日期: 1998_03_07; 修订日期: 2000_07_07
作者简介: 张荣业(1938) , 男, 广东开平人, 研究员, 研究方向: 微分几何、微分方程.

$\mathbf{D}V(s)/\mathrm{d}s$ 是 的测地曲率向量, $|\mathbf{D}V(s)/\mathrm{d}s|$是 的测地曲率 计算表明

$$\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{|V(t)|}g\left(\frac{\mathbf{D}V(t)}{\mathrm{d}t},V(t)\right), \tag{4}$$

$$\frac{\mathbf{D}V(s)}{\mathrm{d}s}=\frac{1}{|V(t)|^2}\left[\frac{\mathbf{D}V(t)}{\mathrm{d}t}-\frac{V(t)}{|V(t)|^2}g\left(\frac{\mathbf{D}V(t)}{\mathrm{d}t},V(t)\right)\right] \tag{5}$$

若$\mathbf{D}V(t)/\mathrm{d}t=0$, 则$|V(t)|=\mathrm{const}$, $\mathbf{D}V(s)/\mathrm{d}s=0$, $|\mathbf{D}V(s)/\mathrm{d}s|=0$ 而测地曲率为零的曲线是测地线 从流形M^n内部看, 是 直线 但一般来说, Riemann 曲率R^i_{jkl} 0 当$M^n=R^n$时, 在直角坐标系x^j下, 连络系数 $^j_{kl}=0$, $R^i_{jkl}=0$, $i,j,k,l=1,2,\quad,n$, 测地线是通常的直线

$\mathbf{D}V(t)/\mathrm{d}t$ 是质点在M^n 中运动的加速度, Newton 运动方程

$$m\frac{\mathbf{D}V}{\mathrm{d}t}=F^{\#} \tag{6}$$

(见( ))

所以, 外力$F=0$时, 加速度$\mathbf{D}V/\mathrm{d}t=0$, 速率不变, 测地曲率为0, 质点静止或以不变速率沿测地线 运动 即质点服从如下:

惯性定律 当外力(或合力)为零时, 质点在M^n 中静止或以不变速度沿测地线运动 运动方程是

$$\frac{\mathbf{D}V(t)}{\mathrm{d}t}=0, \tag{7}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x^j}{\mathrm{d}t^2}+\ {}^j_{k\,l}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}t}=0, \tag{8}$$

$$\frac{v^j}{t}+\frac{v^j}{x^l}v^l+\ {}^j_{k\,l}v^kv^l=0, \tag{9}$$

其中$x^j=v^j(t,x)$ 若$M^n=R^n$或在充分小的邻域内, x^j 是 Descartes 坐标系, 则为

$$\frac{\mathrm{d}^2x^j}{\mathrm{d}t^2}=0\qquad(j=1,2,\quad,n) \tag{10}$$

这时, 若采用任意坐标系, 则 $^j_{k\,l}$ 0, 尽管$R^i_{jkl}=0$ 运动方程仍为(8) 或(9) 的形式

空间是平坦的, 若且仅若 Riemann 曲率消失 Riemann 张量是流形平坦或弯曲的测度

定义 使惯性定律成立的(坐标系)参考系称惯性系

如上述使(8)~(10)成立的坐标系称惯性坐标系

定理 1 固定在 U 上具有坐标系x^j 和时间坐标t 的惯性参考系记作K, 则沿测地线 以不变速度$u=u^j\ {}_j$ 相对于K 平行移动的参考系K, 具有坐标系x^j 和时间坐标$t\ (=t)$, 也是惯性系 在这些惯性系中所有 Newton 力学定律保持它们的形式不变

证明 ( ) 一观察者从K 观察质点$\boldsymbol{x}$ 在 U M^n 中运动, 外力$F=0$时沿测地线 运动 另一观察者从K 观察同一质点的运动, 其坐标关系为

$$(\mathrm{A})\quad\begin{cases}x^j=x^j+x^j(t),\\ t=t;\end{cases}\quad\text{或}\begin{cases}x^j=x^j-x^j(t),\\ t=t,\end{cases}$$

其中$x^j(t)$是$\boldsymbol{u}=u^j\ {}_j$ 的积分曲线, 且$x^j=u^j(t)$ 而$\boldsymbol{u}$ 沿 不变, 故

$$\frac{\mathbf{D}u}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}t}+\ {}^j_{kl}u^kx^l=0 \tag{11}$$

又 $/\ x^j=\ /\ x^j$(即 $_j=\ _j$), 故

$$\boldsymbol{V}- \boldsymbol{u} = (x^j - u^j)\ _j = x^j\ _j = \boldsymbol{V}$$

$\boldsymbol{V}$ 是从K 观察到的质点$\boldsymbol{x}$ 的运动速度; $\boldsymbol{V}$ 是从K 观察到的$\boldsymbol{x}$ 的速度 于是

$$0 = \frac{\mathbf{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathbf{D}(\boldsymbol{V}-\boldsymbol{u})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathbf{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t},$$

即
$$\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} + {}^j_{kl}x^k x^l = 0 \tag{12}$$

就是说从K 看来质点$\boldsymbol{x}$ 也沿测地线运动, 方程为(12) 它与(8) 一样, 形式不变 这里 ${}^j_{kl} = {}^j_{kl}$, $j, k, l = 1, 2, , n$ 所以$K(t, x)$ 也是惯性系

( ) 更一般地, K 和K 如上, K 与K 中的标架分别是 $_j$ 和 , j, $= 1, 2, , n$, 其关系为 $= a^j\ _j$, $\boldsymbol{A} = (a^j)\ GL(n, R)$ 则从K 和K 看到质点$\boldsymbol{x}$ 在$U\ M^n$ 中运动的坐标关系为

$$(\mathrm{B})\quad \begin{cases} x^j = a^j x + x^j(t), \\ t = t \end{cases}$$

故
$$\boldsymbol{V}- \boldsymbol{u} = (x^j - u^j)\ _j = a^j x\ _j = x = \boldsymbol{V} \tag{13}$$

绝对微分之得

$$\mathbf{D}\boldsymbol{V} = \mathbf{D}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{V}) = \mathbf{D}\boldsymbol{V},$$

即

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}x^j + {}^j_l x^l)\ _j = {} & [\mathrm{d}(a^j x + u^j) + (a^l x + u^l)\ {}^j_l]\ _j = \\ & [\mathrm{d}a^j x + a^l x\ {}^j_l]\ _j = \\ & [\mathrm{d}a^j x + a^l a^k\ {}^j_{lk} x\ \mathrm{d}x]\ _j = \\ & a^j [\mathrm{d}x + a_j a^l a^k\ {}^j_{lk} x\ \mathrm{d}x] \frac{x}{x^j} = \\ & [\mathrm{d}x + x\ \mathrm{d}x]\end{aligned}$$

所以
$$0 = \frac{\mathbf{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathbf{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}$$

即从K 看来质点$\boldsymbol{x}$ 也作测地线运动 运动方程是

$$\frac{\mathbf{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}\quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x\ x = 0,$$

它与(8) 的形式一样 它们间的关系为

$$\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} + {}^j_{kl}x^k x^l = a^j \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x\ x\right),$$

其中
$$= a_j a^l a^k\ {}^j_{lk}$$

注意到$\boldsymbol{u}$ 沿 平行移动时的绝对微分 $\mathbf{D}\boldsymbol{u} = (\mathrm{d}u^j + u^l\ {}^j_l)\ _j = 0$ 所以, K 也是惯性系

( ) 若从K 和K 观察到质点$\boldsymbol{x}$ 的坐标关系为

$$(\mathrm{C})\quad \begin{cases} x = a_k x^k + x(t), \\ t = t, \end{cases}$$

$\boldsymbol{A} = (a_k)\ GL(n, R)$, 则

$$(x - u) = a_k x^k = x^k\ _k,$$

或
$$(x^k + a^k a)\ _k = x$$

令

$$u^k = a^k u$$

则(C)变为

$$x^k = a^k x - x^k(t), \quad t = t,$$

其中 $x^k = a^k x$ 它与(B) 的变换形式一样

所以,以不变速度 $\boldsymbol{u} = a^k u_k$ 沿测地线 相对于K 平行移动的参考系K 也是惯性系 而且运动规律不变,且有

定理2 运动方程 $\mathbf{D}V/\mathrm{d}t = 0$ 在变换(A)、(B)、(C) 下保持形式不变

当 $M^n = R^n$ 时,在 Descartes 坐标系下(A)、(B)、(C) 是Galilean 变换 运动定律在这种变换下的不变性称为相对性原理 特别,$M^n = R^n$ 时,在 Galilean 变换下的不变性称为 Galilean 相对性原理

这表明在任何惯性系中运动规律是一样的;运动方程也是一样的

相对论中借助于 Riemann 几何改写质点惯性运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}} = - {}^{j}_{kl} x^k x^l \qquad (j, k, l = 0, 1, 2, 3)$$

x^j 称Lorentz坐标, 是固有时间(the proper time) 它是质点在时空的世界线(the world line) 上从 t_0 到 t 运动所经过的时间 此时空是惯性指数为1的4维伪Riemann 流形 Einstein 称之为引力存在时弯曲的 Riemann 空间 而$-\,{}^{j}_{kl} x^k x^l$ 解释为引力

注意,向量(场) 在 Euclid 空间中平行移动时与线路无关,而在非 Euclid 的 Riemann 空间(流形) 中向量场沿曲线不变,平行移动与线路有关

外力 $\boldsymbol{F}$ 0时运动方程是(6) 质点运动的轨线一般不是测地线 然而沿此曲线 以不变速度 $\boldsymbol{u}$ 相对于K 平行移动的K 上观察质点$\boldsymbol{x}$ 在 U M^n 中的运动与从K 观察到的同一质点 $\boldsymbol{x}$ 的运动是一样的,即在变换(A)、(B)、(C) 下方程形式不变

事实上,从 K 看方程是

$$m\left(\frac{\mathbf{D}V}{\mathrm{d}t}\right)^{\mathrm{b}} = \boldsymbol{F}; \tag{14}$$

从K 上看,方程是

$$m\left(\frac{\mathbf{D}V}{\mathrm{d}t}\right)^{\mathrm{b}} = \boldsymbol{Fc\#} \tag{15}$$

具体地,由(14),为简单计,设 $m = 1$,

$$\boldsymbol{F} = F_k \mathrm{d}x^k = g_{jk}\left(\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} + \#^j_{rl} x^r x^l\right)\mathrm{d}x^k =$$

$$g_{jk}\left(\frac{\mathrm{d}xc^A}{\mathrm{d}t} + \#c^A_{BC} xc^B xc^C\right)\frac{5x^j}{5xc^A}\mathrm{d}x^k = \left(\frac{\mathbf{D}V}{\mathrm{d}t}\right)^{\mathrm{b}},$$

$$\boldsymbol{Fc} = Fc_R \mathrm{d}xc^R = F_k \frac{5x^k}{5xc^R}\mathrm{d}xc^R = g_{jk}\frac{5x^j}{5xc^A}\frac{5x^k}{5xc^R}\left(\frac{\mathrm{d}xc^A}{\mathrm{d}t} + \#c^A_{BC} xc^B xc^C\right)\mathrm{d}xc^R =$$

$$gc_{AR}\left(\frac{\mathrm{d}xc^A}{\mathrm{d}t} + \#c^A_{BC} xc^B xc^C\right)\mathrm{d}xc^R = \left(\frac{\mathbf{D}Vc}{\mathrm{d}t}\right)^{\mathrm{b}},$$

即(14) 与(15) 一致# 从 K 和Kc 观察,质点遵循同样的规律运动,其中

$$gc_{AR} = g_{jk}\frac{5x^j}{5xc^A}\frac{5x^k}{5xc^R}$$

而

$$\#c^A_{BC} = \frac{5xc^A}{5x^j}\frac{5x^r}{5xc^B}\frac{5x^l}{5xc^C}\#^j_{rl} + \frac{5xc^A}{5x^j}\frac{5^2x^j}{5xc^B\,5xc^C}\#$$

在(A)下，$\Gamma^{j}_{rl} = \Gamma^{j}_{rl}$; 在(B)下，$\Gamma'^{A}_{BC} = a^{A}_{j} a^{r}_{B} a^{l}_{C} \Gamma^{j}_{rl}$#

综上述，

$$\boldsymbol{F}' = F'_{R} \mathrm{d}x'^{R} = F_{k} \frac{\partial x^{k}}{\partial x'^{R}} \mathrm{d}x'^{R},\quad \boldsymbol{F} = F_{k} \mathrm{d}x^{k},$$

$$\boldsymbol{F}' = \left(\frac{\mathbf{D}\boldsymbol{V}'}{\mathrm{d}t}\right)^{\flat} = \left(\frac{\mathbf{D}(\boldsymbol{V} - \boldsymbol{u})}{\mathrm{d}t}\right)^{\flat} = \left(\frac{\mathbf{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}\right)^{\flat} = \boldsymbol{F}\# \tag{16}$$

2　协 变 性

如上，可见在 Riemann 曲率不为零的 Riemann 流形 M^n 中，Newton 运动方程不是在 Galilean 下不变，而是在(A)、(B)、(C) 下不变# 只有 $M^n = R^n$ 或在 M^n 的充分小的坐标邻域中在 Descartes 坐标系下才在 Galilean 下不变# 再者力学规律由微分方程描述，而流形上有许多坐标系，在这些坐标系的变换下，运动方程是否不变？也就是说，质点从一坐标邻域运动到另一坐标邻域时，运动方程是否改变？如何改变？研究质点在流形中的运动可否任选一坐标系 (U, U) 就可以了？为此，必须考察一般坐标变换下运动方程的变化规律# 即运动方程的协变性# 所谓协变是：在坐标变换下运动方程保持它的形式# 不是所有方程在坐标变换下是协变的# 有些方程在某些坐标变换下是协变的，在另一些坐标变换下不是协变的# 这里有两个问题：保持某一类方程的形式，寻找使方程协变的变换；保持某种变换而改变方程的形式(如 Einstein 所做)# 我们现在证明

定理 3　Newton 方程 $m(\mathbf{D}\boldsymbol{V}/\mathrm{d}t)^{\flat} = \boldsymbol{F}$ 在一般坐标变换下是协变的# 此方程在 Riemann 流形 M^n 中，不管它是平坦的还是弯曲的，都是正确的#

我们先提出如下

一般协变原理　力学方程在 Riemann 流形 M^n 中成立，只要它满足下述两个条件：

11 这个方程在 Euclid 空间 R^n))) 平坦的 Riemann 流形中成立，即当 Riemann 度量 g_{jk} 是 Euclid 度量 $\delta_{jk}(= 1, j = k; = 0, j \neq k)$，且连络系数 $\Gamma^{j}_{kl} = 0$, $j, k, l = 1, 2, \dots, n$ 时，它与空间 R^n 中的方程一致；

21 这个方程是一般协变的，即在一般坐标变换 $x \mid y\ x'$ 下，它保持自己的形式不变#

如前，在 Riemann 流形 M^n 中 Newton 方程是

$$m\left(\frac{\mathbf{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}\right)^{\flat} = \boldsymbol{F} \tag{17}$$

即

$$m g_{jk}\left(\frac{\mathrm{d}\dot{x}^{j}}{\mathrm{d}t} + \Gamma^{j}_{rl}\dot{x}^{r}\dot{x}^{l}\right) = F_{k}, \tag{18}$$

其中速度 $\boldsymbol{V} = \dot{x}^{j}\partial_{j}$，加速度 $\mathbf{D}\boldsymbol{V}/\mathrm{d}t$，作用力 $\boldsymbol{F} = F_{k}\mathrm{d}x^{k}$#

由(18)，$M^n = R^n$ 时，在 Decartes 坐标系 x^j 下，度量 $g_{jk} = \delta_{jk}$, $\Gamma^{j}_{kl} = 0$, (18) 变为

$$m\frac{\mathrm{d}\dot{x}^{j}}{\mathrm{d}t} = F_{j}, \tag{19}$$

(17) 变为

$$m\mathrm{d}\boldsymbol{V}/\mathrm{d}t = \boldsymbol{F}\# \tag{20}$$

条件 1 被满足# 由于 M^n 的每一点有一邻域微分同胚于 R^n，故在 M^n 的每一点的充分小的邻域中存在 Decartes 坐标系使得在此充分小的邻域中运动方程取(19)、(20)的形式# 但若取任意坐标系，不仅在此邻域内，即此 $M^n = R^n$，由于 Γ^{j}_{kl} 明显出现，方程仍是(17)、(18) 的形式(见后

述)#

在一般坐标变换 $7: x \mid y \ \ xc$ 下, $7_* 5_j = \dfrac{5xc^A}{5x^j} 5_{cA}$,

$$7_* \ \boldsymbol{V} = x^j 7_* 5_j = x^j \frac{5xc^A}{5x^j} 5_{cA} = xc^A 5_{cA} = \boldsymbol{Vc}, \tag{21}$$

$$xc^A = a^A_j x^j, \quad a^A_j = \frac{5xc^A}{5x^j}\#$$

绝对微分 $5_j = a^A_j 5_{cA}$, 得

$$X^l_j 5_l = (\mathrm{d}a^A_j + a^B_j X^{cA}_B) 5_{cA},$$

$$X^l_j a^A_l = \mathrm{d}a^A_j + a^B_j X^{cA}_B,$$

$$X^{cA}_B = a^j_B (X^l_j a^A_l - \mathrm{d}a^A_j) = a^j_B X^l_j a^A_l + a^A_j \mathrm{d}a^j_B,$$

$$\#^{cA}_{BC} \mathrm{d}xc^C = \frac{5x^j}{5xc^B} \frac{5xc^A}{5x^l} \#^l_{jk} \mathrm{d}x^k + \frac{5xc^A}{5x^j} \frac{5^2 x^j}{5xc^B 5xc^C} \mathrm{d}xc^C,$$

故

$$\#^{cA}_{BC} = \frac{5x^j}{5xc^B} \frac{5x^k}{5xc^C} \frac{5xc^A}{5x^l} \#^l_{jk} + \frac{5xc^A}{5x^j} \frac{5^2 x^j}{5xc^B 5xc^C}\# \tag{22}$$

由(17)、(18)及(22), 且因度量

$$g = g_{jk} \mathrm{d}x^j \quad \mathrm{d}x^k = g_{jk} \frac{5x^j}{5xc^B} \frac{5x^k}{5xc^C} \mathrm{d}xc^B \quad \mathrm{d}xc^C = gc_{BC} \mathrm{d}xc^B \quad \mathrm{d}xc^C = gc,$$

有

$$\begin{aligned} Fc_C \mathrm{d}xc^C &= F_k \frac{5x^k}{5xc^C} \mathrm{d}xc^C = m g_{jk} \frac{5x^j}{5xc^B} \frac{5x^k}{5xc^C} \frac{5xc^B}{5x^j} \left(\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} + \#^j_{rl} x^r x^l \right) \mathrm{d}xc^C = \\ & mgc_{BC} \left[\frac{\mathrm{d}xc^B}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{5xc^B}{5x^j} \frac{5x^r}{5xc^A} \frac{5x^l}{5xc^D} \#^j_{rl} + \frac{5xc^B}{5x^j} \frac{5^2 x^j}{5xc^A 5xc^D} \right) xc^A xc^D \right] \mathrm{d}xc^C = \\ & mgc_{BC} \left(\frac{\mathrm{d}xc^B}{\mathrm{d}t} + \#c^B_{AD} xc^A xc^D \right) \mathrm{d}xc^C \end{aligned} \tag{23}$$

即

$$m \left(\frac{\mathbf{D}\, \boldsymbol{Vc}}{\mathrm{d}t} \right)^{\mathrm{b}} = \boldsymbol{Fc}, \tag{24}$$

$$mgc_{BC} \left(\frac{\mathrm{d}xc^B}{\mathrm{d}t} + \#c^B_{AD} xc^A xc^D \right) = Fc_C\# \tag{25}$$

(24)、(25)与(17)、(18)形式一样# 即(17)、(18)是一般协变的# 条件2满足# 这里

$$Fc_C = F_k 5x^k / 5xc^C\#$$

在 7 下, (17) 与 (24) 的关系是

$$\boldsymbol{Fc} = 7_* \boldsymbol{F} = 7_* m \left(\frac{\mathbf{D}\, \boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} \right)^{\mathrm{b}} = m \left(\frac{\mathbf{D}\, \mathbf{7}_* \ \boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} \right)^{\mathrm{b}} = m \left(\frac{\mathbf{D}\, \boldsymbol{Vc}}{\mathrm{d}t} \right)^{\mathrm{b}}$$

或

$$\boldsymbol{Fc}^\# = m \frac{\mathbf{D}\, \boldsymbol{Vc}}{\mathrm{d}t} = m \frac{\mathbf{D}\, \mathbf{7}_* \ \boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} = m 7_* \frac{\mathbf{D}\, \boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} = 7_* \boldsymbol{F}^\# = (7_* \boldsymbol{F})^\#, \tag{26}$$

即 7_* 与 **D**, b, # 的作用顺序可交换, 其中

$$\boldsymbol{Vc} = 7_* \boldsymbol{V}, \quad \boldsymbol{Fc} = 7_* \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}\,.\ \mathbf{7}^{-1}, \quad \boldsymbol{F} = 7^* \boldsymbol{Fc} = \boldsymbol{Fc}\,.\ \mathbf{7}\#$$

根据一般协变原理Newton方程(17)、(18)在Riemann流形中成立, 不管它是平坦的还是弯曲的# 它在流形结构的任何坐标系下都是正确的#

一般协变原理表明, 力学方程若满足条件1、2, 则由2, 只要此方程在流形中的任何坐标系下成立, 则在所有坐标系中成立# 然而光滑流形局部微分同胚于 R^n, 故在流形的每一点的充

分小的邻域中存在一类坐标系使得度量 $g_{jk} = D_{jk}(= 1, j = k; = 0, j X k)$, $\#^{j}_{kl} = 0, j, k, l = 1, 2, , , n$# 条件 1 表明在此坐标系中成立, 因而在所有坐标系中成立# 所以满足一般协变原理的力学方程是正确的; (17)、(18) 是最一般的 Newton 运动方程# 按流形的任何局部坐标系写出的 Newton 方程都是(17)、(18) 这个形式, 而且这个方程是一般协变的# (17) 与流形中的坐标系的选择无关# 即使 $M^n = R^n$, 在曲线坐标系或 Decartes 坐标系以外的任何坐标系下, 方程都是(17)、(18) 这个形式# $M^n = R^n$ 或在 M^n 的充分小的区域中采用 Decartes 坐标系, 则 Newton 方程是(19)、(20), 它不是一般协变的# 它只有在 Galilean 坐标变换下协变# 这反映了 Galilean 相对性原理#

可从坐标系 (UA, UA) 中写出 Newton 方程再推导出在坐标系(UB, UB) 中的 Newton 方程, 只要 UA H UB X 且 $U_B . U_A^{-1}$ 已知#

方程的一般协变性使我们不必事先选取特定的坐标系统就能写出方程# 一般协变性限制方程的种类, 同时帮助我们挑选正确的表达式#

这样, Newton 方程在 R^n 中的 Galilean 不变性变成 M^n 中 (A)、(B)、(C) 下的不变性和一般协变性#

但是, 若不研究 Galilean 变换和(A)、(B)、(C) 变换而研究流形上任意坐标系的变换, 那么对于相对性原理适用的那类坐标系的区分就不存在了# 这时, 我们只要一般协变性# 一般协变性指出, 用不同坐标系写出的方程的一致性#

若把引力场存在的时空想象为 Riemann 流形, (按照 Einstein 的理论, 引力场存在的时空是弯曲的 Riemann 空间, 实质上它是惯性指数为 1 的伪 4 维 Riemann 流形# 而我们上面讲的 N_R 时空 N 是 $n+1$ 维 Riemann 流形# 当 $n = 3$ 时是 4 维 Riemann 流形#) 则得到广义相对论中的一般协变原理#

如上述, 在平坦的空间中采用 Decartes 坐标系, 则连络系数 $\#^{j}_{kl} = 0$# 但若力学系统采用曲线坐标系被安排在平坦的空间中, 则连络系数十分明显, 即 $\#^{j}_{kl} X 0$# 所以我们可以一般地用包括 Christoffel 符号 $\#^{i}_{kl}$, 但不包括 Riemann 张量 R^{i}_{jkl} 的方法写出方程, 而不管这个流形是平坦的还是弯曲的# 故 Newton 方程最一般的形式是(17)、(18)#

事实上, 设 $M^n = R^n$ 或在充分小的区域 $U < M^n$ 中, 存在 Decartes 坐标系 x^j 使得质点在 R^n 或 U 中的运动方程为

$$m \frac{dx^j}{dt} = f_j \# \tag{27}$$

在一般坐标系 xc^A 下, $xc^A | y \; x^j$, 方程为

$$m g^{c}_{CD}(\&xc^C + \#^{cC}_{AB} xc^A xc^B) = f^{c}_{D}\# \tag{28}$$

(28) 如同(18), 推导如下#

R^n 或 $U < M^n$ 中的度量 g 在两种坐标系 x^j 和 xc^A 下为

$$g = dx^j \quad dx^j = \frac{5x^j}{5xc^A}\frac{5x^j}{5xc^B} dxc^A \quad dxc^B = g^{c}_{AB} dxc^A \quad dxc^B = gc$$

且 $$g^{c}_{AB} = \frac{5x^j}{5xc^A}\frac{5x^j}{5xc^B} \quad \frac{dx^j}{dt} = \frac{5x^j}{5xc^A}\frac{dxc^A}{dt}\#$$

由(27) $$f_j = m\&x^j = m\left(\frac{5^2 x^j}{5xc^A 5xc^B} xc^A xc^B + \frac{5x^j}{5xc^A}\&xc^A\right)$$

设 $m = 1$,

$$\frac{xc^C}{5x^j} f_j = \&xc^C + \frac{5xc^C}{5x^j} \frac{5^2 x^j}{5xc^A 5xc^B} xc^A xc^B,$$

因而 $$\&xc^C + \#_{AB}^{cC} xc^A xc^B = \frac{5xc^D}{5x^j} \frac{5xc^C}{5x^j} \frac{5x^j}{5xc^D} f_j = g^{cCDc} f_D \#$$

由此即得(28)# $m \ X\ 1$ 则上式左端乘以 m# 这里在 x^j 下, $\#_{kl}^j = 0$,

$$\#_{AB}^{cC} = \frac{5xc^C}{5x^j} \frac{5^2 x^j}{5xc^A 5xc^B},\ f = f_j \mathrm{d}x^j = f_j \frac{5x^j}{5xc^D} \mathrm{d}xc^D = f_D^c \mathrm{d}xc^D \#$$

(28) 归结为

$$m\left(\frac{\mathbf{D}\,\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}\right)^{\mathrm{b}} = f, \tag{29}$$

其中 $$\boldsymbol{V} = x^j 5_j = x^j \frac{5xc^A}{5x^j} 5_{cA} = xc^A 5_{cA} = \boldsymbol{V}c\#$$

可见在 R^n 或 $U < M^n$ 中采用任意坐标系 xc^A, 则连络系数不消失, 方程为(28)# 若 xc^A 是 Decartes 坐标系则连络消失, 方程形如(27)# 所以, Newton 方程统一于(17) 和(18)#

广义相对论中有类似的结论, 因 Einstein 把引力场存在的空间(时空)看作 4 维弯曲的 Riemann 空间(实是伪 Riemann 空间)#

外力为零, 无引力存在时, 自由粒子在时空中运动时的方程是

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^j}{\mathrm{d}S^2} = 0 \qquad (j = 0, 1, 2, 3), \tag{30}$$

并称坐标系 x^j 为惯性坐标系, S 是固有时间# 自由粒子在引力场存在的时空中运动时的方程是

$$\frac{\mathrm{d}^2 xc^A}{\mathrm{d}S^2} + \#_{BC}^{cA} \frac{\mathrm{d}xc^B}{\mathrm{d}S} \frac{\mathrm{d}xc^C}{\mathrm{d}S} = 0\# \tag{31}$$

一般坐标系 xc^A 称为非惯性坐标系, $A = 0, 1, 2, 3$# 有些作者称 xc^A 为 Lorentz 坐标系# (31) 中, 首项为加速度, 第二项为惯性力# 按照等效原理, 引力与惯性力无区别, 故 $-\#_{BC}^{cA} xc^B xc^C$ 是惯性力也是引力#

由此可见 N_R 时空中的 Newton 力学与广义相对论中力学的异同# 前者的时空是 $n+1$ 维 Riemann 流形, 时间是绝对时间; 后者的时空是惯性指数 1 的 4 维伪 Riemann 流形, 时间是固有时间# 前者认为若 Riemann 流形是平坦的或局部平坦的, 则存在 Decartes 坐标系 x^j 使 $\#_{kl}^j = 0$, 则运动方程为(27), 若改为任意坐标系 xc^A, 则为(28); 后者认为在平坦的 4 维伪 Riemann 流形中没有引力场存在, 则存在惯性坐标系 x^j 使粒子的运动方程为(30), 若存在一般坐标系 xc^A, 运动方程为(31), 则引力场存在, 时空是弯曲的伪 Riemann 流形# 若外力存在, 则运动方程分别为

$$m \frac{\mathrm{d}^2 x^j}{\mathrm{d}S^2} = f_j,\ \mathrm{d}S^2 = G_{jk} \mathrm{d}x^j \mathrm{d}x^k, \tag{32}$$

及 $$m \frac{\mathrm{d}^2 xc^C}{\mathrm{d}S^2} = -m\#_{AB}^{cC} \frac{\mathrm{d}xc^A}{\mathrm{d}S} \frac{\mathrm{d}xc^B}{\mathrm{d}S} + gc^{CDc} f_D, \tag{33}$$

$$\mathrm{d}S^2 = g_{CD}^c \mathrm{d}xc^C \mathrm{d}xc^D,$$

$$G_{jk} = 1, j = k = 0,\ G_{jk} = -1, j = k = 1, 2, 3;\ G_{jk} = 0, j \ X\ k,$$

$$g_{CD}^c = G_{jk} \frac{5x^j}{5xc^C} \frac{5x^k}{5xc^D} \qquad A, B, C, D = 0, 1, 2, 3\#$$

(32)、(33) 与(27)、(28) 的形式一样#

几何上,空间是平坦的,若且仅若 Riemann 张量消失# Riemann 张量是具有连络的流形的曲度的量度#

平坦流形:Euclid 空间,Minkowski 空间))) 惯性指数 1 的伪 Euclid 空间,它们的 Riemann 张量是零张量# 这不意味在任意坐标系中 Christoffel 符号 $\#^{i}_{kl}$ 为零,但这些符号的函数 $R^{i}_{j\,kl}$ 等于零# 因此多数物理定律以包括 Christoffel 符号 $\#^{i}_{kl}$ 但不包括 Riemann 张量 R^{k}_{ijk} 的方法写出# 如前述 Newton 定律,不管流形是弯曲的还是平坦的# 因此主张广义相对论时空中物理定律正好象它们在平坦的 Minkowski 空间的平坦时空中在曲线坐标系下所有的同样的数学形式# 而且的确如此# 这叫(物理场对时空曲率的)最小作用原理或强等效原理# 这里需要强调之点是这个相当显著的情况:通过以曲线坐标来表达平坦空间的物理定律得到此定律的弯曲空间的形式#

本文不是讨论相对论只是指出所论与相对论的某些关系及其异同,不再继续下去#

顺便指出:流形上作用力与反作用力沿测地线大小相等方向相反#

对一些知识和资料请参阅[3]、[4]、[5]、[6]、[7]#

[参 考 文 献]

[1] Dubruvin B A, Fomenko A T, Novikov S P, Modern Geometry) Methods and Application, Part [M]. New York: Springer_Verlag, New York Inc, 1984, 1) 310.

[2] von Westenholz C. Differential Forms in Mathematical Physics[M]. Amsterdam, New York, Oxford: North_Holland Publishing Company, 1978, 198) 207.

[3] Boothby W M. An Introduction to Differentiable Manifold and Riemannian Geometry[M]. New York: Academic Press Inc (London) Ltd, 1975, 293) 331.

[4] Curtis W D, Miller F R. Differential Manifolds and Theoretical Physics[M]. Orlando, Florida: Academic Press Inc (London) Ltd, 1985, 213) 217.

[5] Weinberg S. Gravitation and Cosmology[M]. New York: John Wiley & Sons Inc, 1972, 1) 169.

[6] Schultz B F. Geometrical Methods of Mathematical Physics[M]. Bath Cambridge: Cambridge University Press, 1980, 201) 219.

[7] Eisenhart L P. An Introduction to Differential Geometry[M]. Princeton: Princeton University Press, 1947, 1) 205.

Dynamics in Newtonian_Riemannian Space_Time (　)

ZHANG Rong_ye

(Institute of Mathematics, Academia Sinica, Beijing 100080, P R China)

Abstract: The relativity of motion and covariance of equation of motion in Newtonian_Riemannian space_time, some relationship between Newton. s mechanics in N_R space_time and the general relativity, their difference and identity are discussed.

Key words: pseudo_Riemannian manifold; Riemannian manifold; absolute differential; parallel displacement; relativity; covariance