应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2001) 04_0420_05

关于非扩张映象的耗散扰动问题*

罗元松

(宜宾师专, 四川宜宾 644007)

(张石生推荐)

摘要: 研究非扩张映象的耗散扰动问题• 并把所得结果应用于研究某些类型的非线性积分方程解的存在性•

关 键 词: 非扩张映象; 增生映象; 不动点; 非线性积分方程
中图分类号: O177.91 文献标识码: A

1 引言及预备知识

本文中处处假定 H 是一实 Hilbert 空间, $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 表 H 上的内积, P 是 H 中的锥• 借助于锥 P 在 H 中引出偏序" $\leqslant$", 即对任意给定的 $x, y \in H$, $x \leqslant y$ 当而且仅当 $y - x \in P$•

多值映象 $\mathrm{A}: D(\mathrm{A}) \subseteq H \to 2^H$ 称为增生的, 如果

$$\langle u - v, x - y\rangle \geqslant 0, \quad \forall x, y \in D(\mathrm{A}),\ u \in \mathrm{A}x,\ v \in \mathrm{A}y•$$

如果 $\mathrm{A}: D(\mathrm{A}) \subseteq H \to 2^H$ 是增生的, 则算子 $-\mathrm{A}$ 称为耗散的•

近年来关于增生映象不动点的存在性问题被很多人讨论过(比如, 见文[1~4])•

本文的目的是在实 Hilbert 空间 H 的锥 P 中研究 $-\mathrm{A}+\mathrm{T}$ 型的映象不动点的存在性问题, 其中 $\mathrm{A}: D(\mathrm{A}) \subseteq P \to 2^P$ 是一增生映象, 而 $\mathrm{T}: P \to P$ 是一非扩张映象• 在文末, 我们还利用本文结果研究 $L^2(\Omega)$ 中某些类型的非线性积分方程解的存在性问题•

2 主要结果

在本节中我们处处假定

$$(\mathrm{A}+\mathrm{I})(D(\mathrm{A})) = P, \tag{1}$$

其中 $\mathrm{A}: D(\mathrm{A}) \subseteq P \to 2^P$ 是一增生映象, I 是一恒等映象•

关于满足条件(1)的增生映象的某些性质, 可参考文献[5, 6, 7]•

我们有下面的结果

定理 2.1 设 $\mathrm{A}: D(\mathrm{A}) \subseteq P \to 2^P$ 是一增生映象且满足条件(1)• 设 Ω 是 H 中的一开有界子集, $\theta \in \Omega$, 设 $\mathrm{T}: P \to P$ 是一非扩张映象• 如果下列条件满足:

---

* 收稿日期: 1999_10_08; 修订日期: 2000_03_07
基金项目: 四川省教委重点科研基金资助项目(川教计[1998]162 号" 具增生算子的非线性方程研究")
作者简介: 罗元松(1947—), 男, 四川兴文县人, 教授, 现任宜宾师专校长.

$$x \not\leqslant \mathrm{T}x, \qquad \forall x \in \partial\Omega \cap D(\mathrm{A}),$$

则$-\mathrm{A}+\mathrm{T}$在$D(\mathrm{A})$中存在不动点•

证　对任一$0 \leqslant k_n < 1$, $k_n \to 1$, $k_n\mathrm{T}: \Omega \cap P \to P$是一$k_n$_集压缩映象• 因$x \not\leqslant \mathrm{T}x$, $\forall x \in \partial\Omega \cap D(\mathrm{A})$, 故$k_n\mathrm{T}x \not\geqslant x$, $\forall x \in \partial\Omega \cap D(\mathrm{A})$• 于是由[5]中引理1知, 不动点指数

$$i(-\mathrm{A}+k_n\mathrm{T}, \Omega \cap D(\mathrm{A})) = 1,$$

故$-\mathrm{A}+k_n\mathrm{T}$存在不动点$x_n \in \Omega \cap D(\mathrm{A})$, 即

$$x_n = (\mathrm{I}+\mathrm{A})^{-1}k_n\mathrm{T}x_n•$$

让$k_n \to 1$, 则$\{x_n\}$有一子序列$\{x_m\} \subset \{x_n\}$, 使得x_m弱收敛于x^*• 令

$$x_\lambda = (1-\lambda)x^* + \lambda(\mathrm{I}+\mathrm{A})^{-1}\mathrm{T}x^*, \qquad \lambda \in (0,1)•$$

因$(\mathrm{I}+\mathrm{A})^{-1}$是非扩张的, 故有

$$\langle x_\lambda - (\mathrm{I}+\mathrm{A})^{-1}\mathrm{T}x_\lambda - [x_m - (\mathrm{I}+\mathrm{A})^{-1}\mathrm{T}x_m], x_\lambda - x_m\rangle \geqslant$$
$$\|x_\lambda - x_m\|^2 - \langle(\mathrm{I}+\mathrm{A})^{-1}\mathrm{T}x_\lambda - (\mathrm{I}+\mathrm{A})^{-1}\mathrm{T}x_m, x_\lambda - x_m\rangle•$$

让$m \to \infty$得知

$$\|x_m - (\mathrm{I}+\mathrm{A})^{-1}\mathrm{T}x_m\| = \|(\mathrm{I}+\mathrm{A})^{-1}k_m\mathrm{T}x_m - (\mathrm{I}+\mathrm{A})^{-1}\mathrm{T}x_m\| \leqslant$$
$$(1-k_m)\|\mathrm{T}x_m\| \to 0,$$

从而有

$$\langle x_\lambda - (\mathrm{I}+\mathrm{A})^{-1}\mathrm{T}x_\lambda, x_\lambda - x^*\rangle \geqslant 0•$$

于是得知

$$\langle(1-\lambda)x^* + \lambda(\mathrm{I}+\mathrm{A})^{-1}\mathrm{T}x^* - (\mathrm{I}+\mathrm{A})^{-1}\mathrm{T}((1-\lambda)x^* + \lambda(\mathrm{I}+\mathrm{A})^{-1}\mathrm{T}x^*),$$
$$\lambda(\mathrm{I}+\mathrm{A})^{-1}\mathrm{T}x^* - \lambda x^*\rangle \geqslant 0• \tag{2}$$

在(2)中先除以λ, 然后记$\lambda \to 0^+$, 即得

$$\langle x^* - (\mathrm{I}+\mathrm{A})^{-1}\mathrm{T}x^*, (\mathrm{I}+\mathrm{A})^{-1}\mathrm{T}x^* - x^*\rangle \geqslant 0•$$

上式表明$x^* = (\mathrm{I}+\mathrm{A})^{-1}\mathrm{T}x^*$, 即$x^*$是$-\mathrm{A}+\mathrm{T}$在$D(\mathrm{A})$中的一个不动点•

定理证毕•

定理2.2　设$\mathrm{A}: D(\mathrm{A}) \subseteq P \to 2^P$是一增生映象且满足条件(1)• 设$\Omega$是$H$中的一有界开集, $\theta \in \Omega$, 设$\mathrm{T}: P \to P$是一非扩张映象• 如果满足条件:

$$\|\mathrm{T}x\| \leqslant \|x\|, \qquad \forall x \in \partial\Omega \cap D(\mathrm{A}),$$

则$-\mathrm{A}+\mathrm{T}$在$D(\mathrm{A})$中存在不动点•

证　对每一$k_n: 0 \leqslant k_n < 1$, $k_n \to 1$, $k_n\mathrm{T}$是一k_n_集压缩映象, 且有

$$\|k_n\mathrm{T}x\| \leqslant \|\mathrm{T}x\| \leqslant \|x\|, \qquad \forall x \in \partial\Omega \cap D(\mathrm{T})•$$

由[5]中定理3, $-\mathrm{A}+k_n\mathrm{T}$有不动点$x_n \in \Omega \cap D(\mathrm{T})$• 不失一般性可设$\{x_n\}$弱收敛于$x^*$, 当$k_n \to 1$时, 于是由定理2.1的证明, 可证$x^*$是$-\mathrm{A}+\mathrm{T}$在$D(\mathrm{A})$中的不动点•

定理证毕•

定理2.3　设$\mathrm{A}: D(\mathrm{A}) \subseteq P \to 2^P$是一增生映象且满足条件(1)• 设$\Omega$是$H$中的一有界开集, $\theta \in \Omega$, 设$\mathrm{T}: P \to P$是一非扩张映象• 如果满足条件:

$$\langle u - \mathrm{T}x, x\rangle \geqslant 0, \qquad \forall x \in \partial\Omega \cap D(\mathrm{A}), \quad u \in \mathrm{A}x,$$

则$-\mathrm{A}+\mathrm{T}$在$D(\mathrm{A})$中存在不动点•

证　对每一$k_n: 0 \leqslant k_n < 1$, $k_n \to 1$, $k_n\mathrm{T}$是一k_n_集压缩映象• 令

$$H(t,x)=tk_n\mathrm{T}x,\qquad \forall (t,x)\in[0,1]\times(\Omega\cap P).$$

下证

$$x\notin -\mathrm{A}x+H(t,x),\qquad \forall(t,x)\in[0,1]\times(\partial\Omega\cap D(\mathrm{A})).$$

设相反,则存在 $t_0\in[0,1]$, $x_0\in\partial\Omega\cap D(\mathrm{A})$ 及 $u_0\in\mathrm{A}x_0$ 使得 $x_0=-u_0+t_0k_n\mathrm{T}x_0$. 于是有

$$\|x_0\|^2=-t_0k_n\langle u_0-\mathrm{T}x_0,x_0\rangle+(-1+t_0k_n)\langle u_0,x_0\rangle. \tag{3}$$

因 $(\mathrm{I}+\mathrm{A})D(\mathrm{A})=P$, 故 $\theta\in\mathrm{A}\theta$. 于是由假设条件和(3) 得知 $\|x_0\|^2\leqslant 0$, 即 $x_0=\theta$. 这与 $\theta\in\Omega$ 相矛盾. 于是由[5] 中定理 1(c) 得知 $-\mathrm{A}+k_n\mathrm{T}$ 的不动点指数

$$\mathrm{i}(-\mathrm{A}+k_n\mathrm{T},\ \Omega\cap D(\mathrm{A}))=\mathrm{i}(-\mathrm{A}+0,\ \Omega\cap D(\mathrm{A})).$$

另由[5] 中定理 1(a) 知

$$\mathrm{i}(-\mathrm{A}+0,\ \Omega\cap D(\mathrm{A}))=1,$$

故

$$\mathrm{i}(-\mathrm{A}+k_n\mathrm{T},\ \Omega\cap D(\mathrm{A}))=1.$$

从而得知 $-\mathrm{A}+k_n\mathrm{T}$ 在 $\Omega\cap D(\mathrm{A})$ 中有不动点 x_n. 不失一般性可设$\{x_n\}$弱收敛于x^* (当 $k_n\to 1$ 时). 故由定理 2. 1 中的证明方法, 可证 x^* 是 $-\mathrm{A}+\mathrm{T}$ 在 $D(\mathrm{A})$ 中的不动点.

定理证毕.

3 应 用

在本文中, 我们将应用第 2 节中所得结果研究一类非线性积分方程解的存在性问题.

设 $\Omega\subset R^n$ 是一非空的可测子集, $\mathrm{mes}(\Omega)=1$, 设$f(x,y):\Omega\times[0,+\infty)\to[0,\infty)$ 是一函数满足 Caratheodory 条件, 即

1) 对每一 $y\in[0,+\infty)$, $f(x,y)$ 关于 x 是可测的;

2) 对几乎一切的 $x\in\Omega$, $f(x,y)$ 关于 y 是连续的.

再设f 满足下列条件:

(a) $(f(x,y)-f(x,z))(y-z)\geqslant 0,\quad \forall x\in\Omega,\ y,z\in[0,+\infty)$;

(b) 对每一 $x\in\Omega$, 存在 $N(y)>0$, 使得

$$f(x,y)\leqslant N(y)\cdot y,\qquad \forall y\in[0,+\infty),$$

这里 $N(y)$ 表依赖于 y 的正数.

于是由条件(a), 对每一 $x\in\Omega$, $f(x,y)$ 关于 y 连续,

$$f(x,y):[0,+\infty)\to[0,+\infty)\ 是增生的.$$

故由[5] 中命题 1 及条件(b) 知

$$(\mathrm{I}+f(x,\cdot))([0,+\infty))=[0,+\infty)$$

对几乎一切的 $x\in\Omega$ 成立. 令

$$P=\{u(\cdot)\in L^2(\Omega):u(x)\geqslant 0\quad \text{a. e.}\quad x\in\Omega\},$$

则 P 是$L^2(\Omega)$ 中的锥. 记

$$D(\mathrm{A})=\{u(\cdot)\in P:f(x,u(x))\in L^2(\Omega)\}$$

且定义映象

$$\mathrm{A}:D(\mathrm{A})\subseteq P\to P:\mathrm{A}u(x)=f(x,u(x)),\qquad \forall x\in\Omega,\ u(\cdot)\in D(\mathrm{A}),$$

于是由条件(a) 知 $\mathrm{A}:D(\mathrm{A})\subseteq P\to P$ 是增生的, 因$(\mathrm{I}+f(x,\cdot))([0,+\infty))=[0,+\infty)$ 且(I

$+f(x,\cdot))^{-1}$ 对几乎一切的 $x\in\Omega$ 是非扩张的, 于是当 $v(\cdot)\in P$, 有

$$(\mathrm{I}+f(x,\cdot))^{-1}v(x)\in L^2(\Omega)\cdot$$

从而有

$$(\mathrm{I}+\mathrm{A})(D(\mathrm{A}))=P\cdot$$

设 $k(x,y):\Omega\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 是满足下述条件的函数:

$$k(x,0)\in L^2(\Omega),$$

$$|k(x,y)-k(x,z)|\leqslant|y-z|,\qquad\forall x\in\Omega,\ y,z\in[0,\infty)\cdot$$

设 $\mathrm{T}:P\to P$ 是由下式定义的映象

$$\mathrm{T}u(x)=\int_\Omega k(x,u(y))\mathrm{d}y,\qquad\forall u(\cdot)\in L^2(\Omega),x\in\Omega\cdot$$

因 $k(x,y)\leqslant y+k(x,0)$, 故 T 在 P 上是适定的, 且易知 T 是非扩张的$\cdot$ 现在我们讨论如下形式的非线性积分方程

$$u(x)=-f(x,u(x))+\int_\Omega k(x,u(y))\mathrm{d}y,\qquad\forall x\in\Omega\cdot\tag{4}$$

如果 $k(\cdot,\cdot)$ 满足条件:

$$k(x,y)\leqslant M\cdot y+g(x),\qquad\forall(x,y)\in\Omega\times[0,+\infty),$$

其中 $0<M<1$ 且 $g(\cdot)\in P\cdot$ 现取 $r>0$ 使得

$$M+r^{-1}\left(\int_\Omega g^2(x)\mathrm{d}x\right)^{1/2}\leqslant1\cdot$$

则对每一 $u(\cdot)\in P$, 满足 $\left(\int_\Omega u^2(x)\mathrm{d}x\right)^{1/2}=r$, 有

$$\|\mathrm{T}u(x)\|_{L^2(\Omega)}\leqslant\|u(x)\|_{L^2(\Omega)},$$

故由定理 2.2, 方程(4)有解 $u(\cdot)\in P\cdot$

[参 考 文 献]

[1] Gatica J A, Kirk W A. Fixed point theorems for contraction mappings with applications to nonexpansive and pseudo_contractive mappings[J]. Rocky Mountain J Math, 1994, **4**: 69—79.

[2] Kirk W A, Schonberg R. Some results on pseudo_contractive mappings[J]. Pacific J Math, 1977, **71**: 89—100.

[3] Morales C. Pseudo_contractive mappings and the Leray_Schauder boundary condition[J]. Comment Math Univ Carolinae, 1979, **20**: 745—756.

[4] Reinermann J, Schonberg R. Some Results and Problems in the Fixed Point Theory for Nonexpansive and Pseudo_Contractive Mappings in Hilbert Spaces[M]. S Swaminathaned: Academic Press, 1976.

[5] Chen Y Q. The fixed point index for accretive mappings with k_set contraction perturbation in cones [J]. Internat J Math Math Sci, 1996, **19**(2): 287—290.

[6] Chen Y Q. On accretive operators in cones of Banach spaces[J]. Nonlinear Anal, TMA, 1996, **27**(10): 1125—1135.

[7] Chen Y Q, Cho Y J. On 1_set contractions accretive operators in cones of Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 1996, **201**(3): 966—980.

[8] Alspach D E. A fixed point free nonexpansive map[J]. Proc Amer Math Soc, 1981, **82**(3): 423—424.

[9] Browder F E. Nonlinear nonexpansive operators in Banach spaces[J]. Proc Nat Acad Sci USA,

1965, **54**: 1041－1044.

[10] Browder F E. Nonlinear operators and nonlinear equations of evolution in Banach spaces[J]. Proc Sympos Pure Math, 1976, **18**(2): 1023－1027.

[11] 张石生. 不动点理论及应用[M]. 重庆: 重庆出版社, 1984.

[12] Isac G. On an Altman type fixed point theorem on convex cones[J]. Rocky Mountain J Math, 1995, **2**: 701－714.

On the Problem of Dissipative Perturbations of Nonexpansive Mappings

LUO Yuan_song

(Department of Mathematics, Yibin Teachers' College,

Yibin, Sichuan 644007, P R China)

Abstract: Some fixed point theorems for mappings of the type $-A+T$ are established, where P is a cone in a Hilbert space, $A: P \to 2^P$ is an accretive mappings and $T: P \to P$ is a nonexpansive mappings. In application, the results presented in the paper are used to study the existence problem of solutions for a class of nonlinear integral equations in $L^2(\Omega)$.

Key words: nonexpansive mapping; accretive mapping; fixed point theorem; nonlinear integral equation