应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2001) 04_0435_06

二阶奇异非线性微分方程边值问题的正解*

李仁贵, 刘立山

(曲阜师范大学 数学系, 山东曲阜 273165)

(张石生推荐)

摘要: 分别在 $0 \leqslant f_0^+ < M_1$, $m_1 < f_\infty^- \leqslant \infty$ 和 $0 \leqslant f_\infty^+ < M_1$, $m_1 < f_0^- \leqslant \infty$ 的情形下研究了非线性奇异边值问题 $u'' + g(t)f(u) = 0$, $0 < t < 1$, $\alpha u(0) - \beta u'(0) = 0$, $\gamma u(1) + \delta u'(1) = 0$ 正解的存在性, 其中 $f_0^+ = \overline{\lim}_{u\to 0} f(u)/u$, $f_\infty^- = \underline{\lim}_{u\to\infty} f(u)/u$, $f_0^- = \underline{\lim}_{u\to 0} f(u)/u$, $f_\infty^+ = \overline{\lim}_{u\to\infty} f(u)/u$, g 在区间[0, 1] 的端点可以具有奇性•

关 键 词: 二阶奇异边值问题; 正解; 锥; 不动点
中图分类号: O175.8 文献标识码: A

引 言

本文考察二阶奇异非线性微分方程边值问题(BVP)

$$\begin{cases} u'' + g(t)f(u) = 0 & 0 < t < 1, \\ \alpha u(0) - \beta u'(0) = 0 & \gamma u(1) + \delta u'(1) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geqslant 0$ 且 $\rho := \beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\delta > 0$, $f \in C([0, \infty), [0, \infty))$, g 允许在端点 $t = 0$ 和 $t = 1$ 具有奇性• 此类方程在非线性椭圆方程的径向对称解, 非牛顿流体理论, 反应扩散, 多孔媒质中的气体湍流等问题的研究中有着广泛的背景• 当函数 $g(t)$ 在[0, 1] 上连续时, BVP(1) 是非奇异的, 这方面的结果相对较多, 例如文[1] 给出了非奇异 BVP(1) 的正解• 最近, 文[2] 对超线性($f_0 = \lim_{u\to 0} f(u)/u = 0$, $f_\infty = \lim_{u\to\infty} f(u)/u = \infty$) 或次线性($f_0 = \infty$, $f_\infty = 0$), 在 $g \in C((0, 1), [0, \infty))$ 且 $0 < \int_0^1 G(s, s)g(s)\mathrm{d}s < \infty$ 的条件下分别得到了 BVP(1) 正解的存在性•

本文在更为广泛的极限条件和可积条件下研究了 BVP(1) 正解的存在性• 具体地说, 在 $0 \leqslant f_0^+ < M_1$, $m_1 < f_\infty^- \leqslant \infty$ 或 $0 \leqslant f_\infty^+ < M_1$, $m_1 < f_0^- \leqslant \infty$ 及 $0 < \int_0^1 G(s, s)g(s)\mathrm{d}s < \infty$ 的条件下得到了 BVP(1) 正解的存在性, 其中 m_1、M_1 的定义见第 1 节• 本文的主要结果本质上改进和推广了文[1, 2] 中的主要结果•

1 预备知识和引理

设 E 是实 Banach 空间, P 是 E 中的锥, P 导出 E 中的半序“$\leqslant$”, 即 $x \leqslant y \Leftrightarrow y - x \in P$•

* 收稿日期: 200_01_17; 修订日期: 2000_03_03
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19871048); 山东省自然科学基金资助项目(Y98A09012)
作者简介: 李仁贵(1968—), 男, 山东安丘人, 讲师, 硕士.

设 $G(t,s)$ 为边值问题

$$\begin{cases} u''=0 & 0<t<1, \\ \alpha u(0)-\beta u'(0)=0, & \gamma u(1)+\delta u'(1)=0 \end{cases} \tag{2}$$

的 Green 函数, 则

$$G(t,s)=\begin{cases} \frac{1}{\rho}(\gamma+\delta-\gamma t)(\beta+\alpha s) & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1, \\ \frac{1}{\rho}(\gamma+\delta-\gamma s)(\beta+\alpha t) & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1. \end{cases}$$

容易看出:

$$G(t,s)\leqslant G(s,s), \qquad 0\leqslant t,\ s\leqslant 1. \tag{3}$$

为方便起见, 我们列出本文将要用到的一些条件:

(H_1) $f\in C([0,\infty),[0,\infty))$;

(H_2) $g\in C((0,1),[0,\infty))$ 满足 $0<\int_0^1 G(s,s)g(s)\mathrm{d}s<\infty$.

由 $\int_0^1 G(s,s)g(s)\mathrm{d}s>0$ 及 $g\in C((0,1),[0,\infty))$, 存在 $t_0\in(0,1)$, 使得 $g(t_0)>0$, 故存在 $a,b\in[0,1]$, $a<b$, 使得 $t_0\in(a,b)$. 在 $C[0,1]$ 中, 构造所有非负函数所构成锥的子锥如下:

$$K=\left\{u\in C[0,1]\mid u(t)\geqslant 0, \min_{a\leqslant t\leqslant b}u(t)\geqslant M\|u\|\right\},$$

其中

$$\|u\|=\sup_{t\in[0,1]}|u(t)|,\quad M=\min\left\{\frac{\delta+(1-b)\gamma}{\delta+\gamma}, \frac{a\alpha+\beta}{\alpha+\beta}\right\},$$

显然 $0<M<1$. 由(H_2), 可定义算子 $A: C[0,1]\to C[0,1]$ 如下:

$$Au(t)=\int_0^1 G(t,s)g(s)f(u(s))\mathrm{d}s.$$

从(3) 式, 有

$$Au(t)=\int_0^1 G(t,s)g(s)f(u(s))\mathrm{d}s\leqslant\int_0^1 G(s,s)g(s)f(u(s))\mathrm{d}s \qquad t\in[0,1],$$

故

$$\|Au\|\leqslant\int_0^1 G(s,s)g(s)f(u(s))\mathrm{d}s.$$

易知 Green 函数 $G(t,s)$ 满足

$$\frac{G(t,s)}{G(s,s)}\geqslant M \qquad t\in[a,b],\ s\in[0,1],$$

于是

$$\int_a^b G(t,s)g(s)\mathrm{d}s\geqslant M\int_0^1 G(s,s)g(s)\mathrm{d}s>0 \qquad t\in[a,b],$$

且当 $u\in K$ 时, 有

$$\min_{a\leqslant t\leqslant b}Au(t)=\min_{a\leqslant t\leqslant b}\int_0^1 G(t,s)g(s)f(u(s))\mathrm{d}s\geqslant$$
$$M\int_0^1 G(s,s)g(s)f(u(s))\mathrm{d}s\geqslant M\|Au\|,$$

因此有下列引理:

引理 1　$A(K)\subset K$•

引理 2　设条件(H_1)和(H_2)成立, 则 $A: K\to K$ 是全连续的•

证明　首先证明A是连续的•　令 $N=\int_0^1 G(s,s)g(s)\,ds$•　设 $u_n, u_0\in K$ 且 $u_n\to u_0$, 那么 $\|u_n\|\leqslant L<\infty$, $\forall n\geqslant 0$•　由于 f 在 $[0,L]$ 上连续, 所以它在 $[0,L]$ 上一致连续, 从而对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 当 $|u'-u''|<\delta$ 时, 有 $|f(u')-f(u'')|<N^{-1}\varepsilon$•　由 $u_n\to u_0$ 知, 存在 $n_0\in\mathbf{N}$, 使得当 $n\geqslant n_0$ 时, 有 $\|u_n-u_0\|<\delta$, 从而当 $n\geqslant n_0$, $t\in[0,1]$ 时, 有 $|f(u_n(t))-f(u_0(t))|<N^{-1}\varepsilon$, 故当 $n\geqslant n_0$ 时, 有

$$\begin{aligned}\|Au_n-Au_0\|&=\left\|\int_0^1 G(t,s)g(s)[f(u_n(s))-f(u_0(s))]\,ds\right\|\leqslant\\&N^{-1}\varepsilon\int_0^1 G(s,s)g(s)\,ds=\varepsilon,\end{aligned}$$

即算子 $A: K\to K$ 是连续的•

其次, 对任意有界集 $B\subset K$, 证 $A(B)\subset K$ 是一致有界的•　由 B 有界知, 存在常数 $m>0$, 使得 $\|u\|\leqslant m$, $\forall u\in B$•　令 $C=\max\{f(u): 0\leqslant u\leqslant m\}$, 则有 $\|Ax\|\leqslant CN$, $\forall x\in B$, 即 $A(B)$ 是一致有界的•

最后证明 $A(B)$ 是等度连续的, 当 $t\in(0,1)$ 时, 有

$$\begin{aligned}\left|\frac{d}{dt}Au(t)\right|&=\left|\frac{d}{dt}\left[\int_0^t\frac{1}{\rho}(\gamma+\delta-\gamma t)(\beta+\alpha s)g(s)f(u(s))\,ds+\right.\right.\\&\left.\left.\int_t^1\frac{1}{\rho}(\gamma+\delta-\gamma s)(\beta+\alpha t)g(s)f(u(s))\,ds\right]\right|=\\&\left|\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\rho}(\gamma+\delta-\gamma t)\int_0^t(\beta+\alpha s)g(s)f(u(s))\,ds+\right.\right.\\&\left.\left.\frac{1}{\rho}(\beta+\alpha t)\int_t^1(\gamma+\delta-\gamma s)g(s)f(u(s))\,ds\right]\right|=\\&\left|-\frac{\gamma}{\rho}\int_0^t(\beta+\alpha s)g(s)f(u(s))\,ds+\right.\\&\left.\frac{\alpha}{\rho}\int_t^1(\gamma+\delta-\gamma s)g(s)f(u(s))\,ds\right|\leqslant\\&\frac{C\gamma}{\rho}\int_0^t(\beta+\alpha s)g(s)\,ds+\frac{C\alpha}{\rho}\int_t^1(\gamma+\delta-\gamma s)g(s)\,ds:=x(t)\text{•}\end{aligned}$$

下证 $x\in L(0,1)$•　因为

$$\begin{aligned}\int_0^1 x(t)\,dt&=tx(t)\Big|_0^1-\int_0^1 tx'(t)\,dt=\\&\lim_{t\to 1^-}tx(t)-\lim_{t\to 0^+}tx(t)-\int_0^1\frac{C}{\rho}g(t)(2\alpha\gamma t+\beta\gamma-\alpha\gamma-\alpha\delta)t\,dt=\\&\lim_{t\to 1^-}\frac{C\gamma t}{\rho}\int_0^t(\beta+\alpha s)g(s)\,ds+\lim_{t\to 0^+}\frac{C\alpha t}{\rho}\int_t^1(\gamma+\delta-\gamma s)g(s)\,ds+\\&\int_0^1\frac{C}{\rho}g(t)(\alpha\gamma+\alpha\delta-\beta\gamma-2\alpha\gamma t)t\,dt\leqslant\\&\frac{C\gamma}{\rho}\int_0^1(\beta+\alpha s)g(s)\,ds+\frac{C}{\rho}\int_0^1 sg(s)(\alpha\gamma+\alpha\delta-\beta\gamma-2\alpha\gamma s)\,ds+\end{aligned}$$

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{C\alpha t}{\rho}\int_t^1(\gamma+\delta-\gamma s)g(s)\mathrm{d}s\leqslant$$
$$C\int_0^1\frac{1}{\rho}(\beta\gamma+2\alpha\gamma s+\alpha\delta s-\beta\gamma s-2\alpha\gamma s-2\alpha\gamma s^2)g(s)\mathrm{d}s+$$
$$\lim_{t\to 0^+}\int_t^1\frac{C}{\rho}(\gamma+\delta-\gamma s)(\beta+\alpha s)g(s)\mathrm{d}s\leqslant$$
$$C\int_0^1\frac{1}{\rho}(2\beta\gamma+2\beta\delta-2\beta\gamma s+2\alpha\gamma s+2\alpha\delta s-2\alpha\gamma s^2)g(s)\mathrm{d}s+$$
$$C\int_0^1 G(s,s)g(s)\mathrm{d}s=$$
$$2C\int_0^1\frac{1}{\rho}(\beta+\alpha s)(\gamma+\delta-\gamma s)g(s)\mathrm{d}s+C\int_0^1 G(s,s)g(s)\mathrm{d}s=$$
$$3C\int_0^1 G(s,s)g(s)\mathrm{d}s<\infty,$$

从而 $x(t)\in L(0,1)$，由积分的绝对连续性知，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，对 $\forall t_1,t_2\in[0,1]$，当 $|t_1-t_2|<\delta$ 时，对 $\forall u\in B$ 有

$$|Au(t_1)-Au(t_2)|=\left|\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Au(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\left|\int_{t_1}^{t_2}x(t)\mathrm{d}t\right|<\varepsilon,$$

故 $A(B)$ 是等度连续的• 因此 $A:K\to K$ 是全连续算子• □

设 K 是实 Banach 空间 E 中的锥，令 $K_r=\{x\in K:\|x\|\leqslant r\}$，$\partial K_r=\{x\in K:\|x\|=r\}$，且 $K_{r,R}=\{x\in K:r\leqslant\|x\|\leqslant R\}$，这里 $0<r<R<\infty$•

引理 3[3] 设 K 是实 Banach 空间 E 中的锥，$A:K_R\to K$ 是全连续算子• 假定下列条件成立:

(i) $\|Ax\|\leqslant\|x\|$，$\forall x\in\partial K_R$;

(ii) 存在 $e\in\partial K_1$，使得 $x\neq Ax+\lambda e$，$x\in\partial K_r$，$\lambda>0$•

那么 A 在 $K_{r,R}$ 中存在不动点•

如果(i)在 ∂K_r 上成立，且(ii)在 ∂K_R 上成立，则结论仍然成立•

2 主要结果

定理 设条件(H_1)和(H_2)成立，并且下列条件之一成立:

(h_1) $0\leqslant f_0^+<M_1$ 且 $m_1<f_\infty^-\leqslant\infty$;

(h_2) $0\leqslant f_\infty^+<M_1$ 且 $m_1<f_0^-\leqslant\infty$•

其中

$$f_0^+:=\overline{\lim_{u\to 0}}\frac{f(u)}{u},\ f_\infty^-:=\underline{\lim_{u\to\infty}}\frac{f(u)}{u},\ f_0^-:=\underline{\lim_{u\to 0}}\frac{f(u)}{u},\ f_\infty^+:=\overline{\lim_{u\to\infty}}\frac{f(u)}{u},$$
$$M_1=\left(\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1 G(t,s)g(s)\mathrm{d}s\right)^{-1},\quad m_1=\left(\min_{a\leqslant t\leqslant b}\int_a^b G(t,s)g(s)\mathrm{d}s\right)^{-1}•$$

则 BVP(1) 至少存在一个正解 $u\in C[0,1]$，且 $u(t)>0$，$0<t<1$•

证明 易知 BVP(1) 有解的充要条件是算子方程 $u=Au$ 有解• 由引理 1 和引理 2 知 $A:K\to K$ 是全连续的•

(a) 假设(h_1)成立• 由 $0\leqslant f_0^+<M_1$ 知，存在 $r>0$，当 $0<u\leqslant r$ 时，有 $f(u)<M_1u$• 于是，当 $u\in K$ 且 $\|u\|=r$ 时，据(3) 式知

$$\mathrm{A}u(t)=\int_0^1 G(t,s)g(s)f(u(s))\mathrm{d}s\leqslant M_1\int_0^1 G(t,s)g(s)u(s)\mathrm{d}s\leqslant r=\|u\|,\tag{4}$$

从而

$$\|\mathrm{A}u\|\leqslant\|u\|,\qquad\forall u\in\partial K_r.$$

另一方面，由 $\bar{f}_\infty>m_1$ 知，存在 $\eta>M$，使得 $f(x)\geqslant m_1x$，$\forall x\geqslant\eta$. 令 $R=M^{-1}\eta$，则有

$$\min\left\{u(t):a\leqslant t\leqslant b\right\}\geqslant M\|u\|=\eta\qquad u\in\partial K_R.\tag{5}$$

令 $\phi(t)\equiv 1$，$t\in[0,1]$，则 $\phi\in\partial K_1$. 下面证明

$$u\neq \mathrm{A}u+\lambda\phi\qquad u\in\partial K_R,\ \ \lambda>0.$$

若不然，存在 $u_0\in\partial K_R$ 及 $\lambda_0>0$，使得 $u_0=Au_0+\lambda_0\phi$. 令 $\delta=\min\left\{u_0(t):a\leqslant t\leqslant b\right\}$，则由(5)式知 $\delta\geqslant\eta$，从而有

$$\begin{aligned}u_0(t)=&\int_0^1 G(t,s)g(s)f(u_0(s))\mathrm{d}s+\lambda_0\phi(t)\geqslant\\&m_1\int_a^b G(t,s)g(s)u_0(s)\mathrm{d}s+\lambda_0\geqslant\\&m_1\delta\int_a^b G(t,s)g(s)\mathrm{d}s+\lambda_0\geqslant\\&\delta+\lambda_0.\end{aligned}$$

这意味着 $\delta\geqslant\delta+\lambda_0>\delta$，矛盾. 故由引理 3 知 A 在 $K_{r,R}$ 中存在不动点 u. 由于 $u''(t)=-g(t)f(u(t))\leqslant 0$，故由 u 的图象上凸及 $\|u\|\geqslant r>0$ 可推知，对 $t\in(0,1)$，有 $u(t)>0$.

(b) 设(h_2)成立. 由于 $f_\infty^+<M_1$，故可取 $\tau\in(f_\infty,M_1)$，且存在 $R_1>0$，使得 $f(x)\leqslant\tau x$，$\forall x\geqslant R_1$，由 f 连续知，$N_1=\max\left\{f(x):0\leqslant x\leqslant R_1\right\}<\infty$，故 $0\leqslant f(x)\leqslant N_1+\tau x$，$0\leqslant x<\infty$. 令 $R=N_1(M_1-\tau)^{-1}$，则对 $\forall u\in\partial K_R$，$t\in[0,1]$ 有

$$|\mathrm{A}u(t)|\leqslant(N_1+\tau\|u\|)\int_0^1 G(t,s)g(s)\mathrm{d}s\leqslant(N_1+\tau\|u\|)/M_1=R=\|u\|.$$

故 $\|\mathrm{A}u\|\leqslant\|u\|$，$\forall u\in\partial K_R$.

另一方面，由 $\bar{f}_0>m_1$ 知，存在 $r\in(0,R)$，使得 $f(x)\geqslant m_1x$，$0\leqslant x\leqslant r$. 类似于(a)的证明可证 $u\neq \mathrm{A}u+\lambda\phi$，$u\in\partial K_r$ 及 $\lambda>0$. 故由引理 3 知 A 在 $K_{r,R}$ 中存在不动点 u. 由于 $u''(t)=-g(t)f(u(t))\leqslant 0$，故由 u 的图象上凸及 $\|u\|\geqslant r>0$ 可推知，对 $t\in(0,1)$，有 $u(t)>0$, □

注 1 定理证明的关键在于寻找函数 ϕ. 值得指出的是文[2]在本文引言中提到的条件下，利用范数型的锥压缩和拉伸定理证明了 BVP(1)正解的存在性，本文定理如文[2]一样利用范数型的锥压缩和拉伸定理来证明似乎是困难的.

注 2 本文定理本质上改进和推广了文[1,2]中的主要结果.

[参 考 文 献]

[1] Erbe L H, WANG Hai_yan. On the existence of positive solutions of ordinary differential equations[J]. Proc Amer Math Soc, 1994, **120**(3): 743—748.

[2] 马如云. 奇异二阶边值问题的正解[J]. 数学学报, 1998, **41**(6): 1225—1230.

[3] Amann H. Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces[J]. SIAM Rev, 1976, **18**(4): 620—709.

[4] 郭大钧. 非线性泛函分析[M]. 济南: 山东科技出版社, 1985.

Positive Solutions of Boundary Value Problems for Second Order Singular Nonlinear Differential Equations

LI Ren_gui, LIU Li_shan
(Department of Mathematics, Qufu Normal University, Qufu, Shangdong 273165, P R China)

Abstract: New existence results are presented for the singular second order nonlinear boundary value problems $u'' + g(t)f(u) = 0, 0 < t < 1, \alpha u(0) - \beta u'(0) = 0, \gamma u(1) + \delta u'(1) = 0$ under the conditions $0 \leqslant f_0^+ < M_1, m_1 < f_\infty^- \leqslant \infty$ or $0 \leqslant f_\infty^+ < M_1, m_1 < f_0^- \leqslant \infty$, where $f_0^+ = \overline{\lim}_{u \to 0} f(u)/u, f_\infty^- = \underline{\lim}_{u \to \infty} f(u)/u, f_0^- = \underline{\lim}_{u \to 0} f(u)/u, f_\infty^+ = \overline{\lim}_{u \to \infty} f(u)/u$, g may be singular at $t = 0$ and/or $t = 1$. The proof uses a fixed point theorem in cone theory.

Key words: second order singular boundary value problems; positive solutions; cone; fixed point