应用数学和力学,第 22 卷 第 3 期(2001 年 3 月
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2001 03_0221_07
创刊廿周年纪念特刊论文

PLK 方法与符号运算

戴世强

(上海市应用数学和力学研究所, 上海大学, 上海 200072

(我刊编委戴世强来稿

摘要: 阐述将 PLK 方法与符号运算相结合的途径和有效性 首先简述 PLK 方法的思路和发展简史: 其次, 概述运行符号运算时经常遇到的 中间表达式爆炸 困难, 为克服这一困难, 作者提出一种半逆序算法: 通过以符号形式 冻结 中间表达式中冗长的部分, 到最后阶段再予 解冻 ; 并且通过综述作者在一系列非线性波动和非线性振动方面的工作, 讨论 PLK_符号运算方法的具体应用, 其中, Duffing 方程的摄动解的计算机延伸表明, 用 PLK 方法导得的渐近级数解的收敛半径为 1, 从而大大拓广了解的适用范围; 分层流体中内孤立波和超弹性杆中孤立波对撞的研究表明, 用所提出的方法可以进行手工计算难以进行的复杂运算, 借此可得出高阶演化方程和高阶渐近解, 正确地解释实验结果; 并说明采用半逆序算法后, 可在微机上实现繁复的符号运算 最后得出结论: 借助于符号运算, 可大大增强 PLK 方法的生命力, 至少对保守系统的振动和波动问题的求解, 它是一个非常有效的工具

关 键 词: PLK 方法; 摄动方法; 符号运算; 中间表达式爆炸; 半逆序算法
中图分类号: O175 文献标识码: A

引 言

PLK 方法是一种有效的摄动方法, 它的提出和发展已有上百年的历史(参看文献[1~ 6] 十九世纪八十年代, Poincare 和 Lindstedt 等人, 在研究天体力学问题过程中, 在对因变量作摄动时, 同时将频率参数进行摄动, 这相当于引进坐标的线性变换, 从而解决了一直困扰人们的长期项问题; 1949 年, Lighthill 在研究更为复杂的空气动力学问题时, 拓广了上述方法, 引进了坐标的非线性变换, 成功地消除了摄动解的奇异性; 1953 年, 郭永怀在处理平板边界层问题时, 把 Lighthill 方法与边界层方法完美地结合起来, 求得了正确的边界层解, 并于 1956 年将结果推广到激波与边界层的干扰问题 1956 年钱学森对这一方法作了综述分析, 并将其命名为 Poincare_Lighthill_Kuo 方法(简称 PLK 方法

近五十年来, PLK 方法在自然科学领域中, 特别是力学中得到了广泛应用, 许多学者对此又作了进一步发展, 举其要者有: 林家翘的解析特征线法(1954 、Pritulo 和 Usher 的重整化法 (1962, 1969 、Keller 和丁汝的正交条件法(1966 、Sigalov 的完全近似法(1981 以及戴世强的推广(1990 (详见文献[1, 7~ 9] 近二十年来, 本文作者和他的学生采用 PLK 方法及其与其它

收稿日期: 2000_01_23; 修订日期: 2000_11_27
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19972035
作者简介: 戴世强(1941 , 男, 浙江定海人, 教授, 博导, 从事流体力学和应用数学研究, 已发表论文 80 余篇.

方法结合的形式,求解了流体力学、一般力学和固体力学中的一系列问题,如分层流体中的内孤立波及其各种相互作用、分层流体中的椭圆余弦波、深水中的代数孤立波、单自由度的非线性振动、弹性杆中的非线性振动和非线性波、超弹性杆中的孤立波的对撞等等(见文献[9~33]),事实证明,PLK 方法是处理许多非线性问题的有力工具,只要运用适当,不仅可以用来解决弱非线性问题,而且可以用于研究强非线性问题

在应用 PLK 方法时有一个共同的问题:尽管此法在摄动法中是运算较为简约的一种,但在求高阶摄动解时运算仍不可避免地相当繁复,而解决实际问题时为了得到更准确的解,这种高阶解又是必不可少的;进入七十年代以来,人们发展了符号运算方法,为用计算机运算替代手工运算开辟了途径 本文旨在叙述将运用 PLK 方法与符号运算相结合的途径及其有效性,下节概述符号运算的基本概念和发展情况,论及在应用符号运算中的主要困难 所谓 中间表达式爆炸 ;第二节介绍我们为解决这一困难而提出的一种半逆序算法;第三节简述作者及其课题组成员利用这一算法所做的一些工作,最后得出相应的结论

1 符号运算简介

符号运算(即计算机代数 近年来在科学计算和工程分析中得到了非常广泛的应用,人们普遍认为,这是计算机应用的一个重大突破,目前符号运算已经深入到几乎所有领域的教学和科研实践,正如 A. Heck 所指出的: 计算机代数系统是所有需要作计算的人的有力工具,在现代纯粹科学和应用科学的研究和教育中是必不可少的 (详见文献[34~37]中的评述

符号运算的主要功能在于:在计算机上以符号形式进行运算,实现公式的机器推演 如果与初等数学相类比,寻常的数值计算可比拟为算术运算,而符号运算则可比拟为代数运算(故有计算机代数之说 ,前者只适用于个例分析,而后者的结果则具有普遍性,因此,符号运算有数值计算无法企及的优越性 由于用计算机系统取代了人工推导,演算速度成千万倍增加,使得原先令人望而生畏的繁复计算变得简易快捷,这方面,行内人士所津津乐道的辉煌战例是关于月球轨道的计算:法国天体力学家 Delaunay 耗时 20 年于 1867 年出版了月球轨道计算的专著,1970 年,法国科学家 Deprit, Henrard 和 Rom 在一台小计算机上采用 Rom 的计算机代数系统,花了 20 个小时,就重复了 Delaunay 的全部计算,还发现了他的两个错误[35]

近二三十年来,全世界涌现很多计算机代数软件系统,著名的有七八十种,其中有通用商业软件系统和专用软件系统,就通用系统而言,最常见的有:Mathematica, Maple, MACSYMA, REDUCE, DERIVE 等等,经过这些年的优胜劣汰,现今国际上头两种系统并驾齐驱、霸占市场,即 Wolfram 研究公司研制的 Mathematica 系统(已推出 4 0 版本 和 Waterloo 大学研制的 Maple 系统(已有 5 4 版本 ,它们都有运算功能齐全(可做几乎所有可行的数学运算 和扩展功能强的优点

众所周知,摄动法的应用经常受运算繁复的制约,需要求高阶渐近解时,往往用手工难以完成复杂的推导,因此,符号运算一出现,自然地引起了摄动专家的注意,不久就有了摄动与计算机代数相结合的专著(如[38] 作者和他的课题组多年来从事摄动方法的应用研究,近十年中,在国家和上海市自然科学基金的资助下,对这种结合作了一些探索,本文专就 PLK 方法与符号运算的结合给予综述 如引言所述,符号运算的应用过程中,最主要的困难在于所谓 中间表达式爆炸 ,下一节就此作一简述

2 中间表达式爆炸和半逆序算法

中间表达式爆炸 (intermediate expression swell 这一说法最早出现在 van Dyke 的论文中

(参看[34] ,指的是在符号运算过程中,由于中间表达式越来越冗长,最后到了计算机不能容忍的地步,导致溢出和运算中断 其起因在于:符号运算与寻常的数值计算不同,数值计算中参数单元可作多用途安排,整个计算不必开出很多单元占用大量存贮空间,而符号运算中所有的变量参数都需要有自己的单元而无法共用,而且不能控制中间结果以固定格式存贮,须多占很大的空间,随着求解阶数的增大,这种问题愈益突出

为了克服中间表达式爆炸的困难,我们专门设计了一种算法,即半逆序算法(详见文[39] 其基本思路是:放弃常规的运算顺序,将中间运算步骤进行调整,例如求三阶解时,首先求出三阶解: $u_3 = u_3(u_1, u_2)$,再求 $u_2 = u_2(u_1)$,然后给出 u_1,依次代入,得到三阶解 当然,也可以这样来理解:我们先求出每一阶的解,接着把它们以符号的形式冻结起来,不参与以后的运算,所以这种算法也可以称为 中间冻结算法 我们的实践表明,采用这一算法可以有效地防止中间表达式爆炸,在微机上实现复杂的符号运算

在实际运用这一算法时,应对整个问题先作综合分析,将符号运算程序作合理的分块处理 通常的做法是,先确定对每项摄动都必须进行的运算,作为预备性程序,然后割裂出各中间运算中彼此无关的部分,独立成块,每阶求解过程只启动预备程序和本阶求解的程序,这样一来,使仅有 32M 内存的微机也可以做较为繁复的符号运算

在实现 PLK 方法与符号运算的结合时,我们的通常做法是:首先按 PLK 方法的思路,引进适当的变换和摄动展开(有必要时联合采用其它渐近方法 ,用符号运算程序给出递推方程,然后由手工计算求得头一两项摄动解,尽可能寻求渐近解的一般规律,最后采用半逆序算法通过符号运算得到高阶渐近解 我们最常用的计算机代数软件是 Mathamatica,包括早先的 2 22 版本和新近的 3 0、4 0 版本,新版本与老版本相比,功能(包括绘图功能 更为齐全、输入更简洁、操作更为简便 我们也试用过其它系统,如 Maple, Reduce 等,在性能上各有长短之处

3 应用实例

本节叙述我们采用 PLK 方法与符号运算相结合的途径所解决的一些非线性力学问题 限于篇幅,我们仅阐明求解的思路,对细节感兴趣的读者可参看所列出的文献

3 1 单自由度的非线性振动[23~25]

我们用上述方法详尽地研究了单自由度非线性自治振动的典型方程 Duffing 方程的初值问题 先用 Lindstedt_Poincare 方法[1]对频率做摄动展开,经手工摄动,发现各阶解有余弦级数的形式,而后用 REDUCE 系统做符号运算,用半逆序算法给出了 15 阶渐近解,并将其与问题的精确解作比较,发现即使当小参数趋近于 1 时,渐近解与精确解仍相当接近,而且 15 阶渐近解优于 10 阶解,10 阶解又优于 5 阶解[23, 24];这给我们以启发:渐近解可能是收敛半径为 1 的一致收敛级数,一致收敛的一般证明遇到了多重级数的困难,我们转而求助于其它途径,首先编制 FORTRAN 程序,用了 4 小时的 CPU 时间,将摄动级数解延伸到 82 项,采用 Domb_Sykes 图(摄动解前后项最大值之比与项数的函数图 ,通过考察 Domb_Sykes 图上曲线的斜率,发现我们的关于一致收敛的上述猜想是正确的(见文[25] ,这就大大拓展了 Duffing 方程摄动解的适用范围,而且不妨猜想:用 PLK 方法等渐近方法求得的非线性自治振动的摄动级数解一般会有较好的收敛性质

3 2 弹性杆中的非线性波[26, 33]

我们先用上述方法研究了一个非线性波动方程 Cauchy 问题的计算机代数_摄动解[26],它

源于有平方非线性的弹性杆中的非线性纵波分析 所采用的是 PLK 方法中的林家翘的重整化解析特征线法[1], 应用了计算机代数系统 Mathematica2 0, 得到了关于波形和特征线的一致有效三阶渐近解

最近, 作者在访问香港城市大学期间, 与戴晖辉博士等合作, 研究了在一种超弹性杆(可压缩 Mooney_Rivlin 弹性杆 中两个孤立波的对撞[33] 这一问题的控制方程由 Cohen 和戴晖辉导出, 是两个复杂的二阶非线性方程, 问题中有两个小参数: 无量纲圆杆半径和波数, 我们发现: 存在着一种非线性弹性波_水波类比, 细杆中的长波可类比于浅水长波, 对我们的问题有一个类似于 Ursell 参数的无量纲数, 当此数具有 1 的量级时, 浅水小的 Boussinesq 理论及孤立波分析可以套用到这里, 因此, 我们在文[10, 11] 中提出的方法适用于本问题 具体来说, 采取了如下的处理步骤:

1 为了便于摄动展开, 将控制方程化成五个一阶方程;

2 按约化摄动法[40] 和 PLK 方法的思路, 进行摄动展开;

3 用 Mathematica3 0 系统求三阶渐近解;

4 结果分析、数值验证

结果发现: 与浅水波情形一样[10], 一阶解是 KdV 孤立波, 高阶解由线性化非齐次 KdV 方程描述, 当两个孤立波对撞时存在着非均匀相移, 因此导致孤立波的倾斜, 与此同时, 得了孤立波对撞时的最大波幅、单个孤立波波形和传播速度的三阶近似解 由于摄动问题的复杂性, 在作符号运算时经常遇到中间表达式爆炸, 于是我们将总程序分成五段, 由第一段控制总体运算, 其余各段分段冻结, 并针对一些常用的双曲函数运算编制了一些子程序, 供随时调用, 这样做成功地避免了经常性的溢出 整个计算工作在 IBM586 微机上进行, 采用了 Mathematica3 0 计算机代数系统, 总程序约 600 行, CPU 时间约 4 个小时, 经检验, 运算中最长的一个公式有 9470 项 这样繁复的计算用手工进行是不可思议的, 由此可见摄动法与符号运算结合的有效性 这项工作在固体中的孤立波相互作用方面具有开创性

3 3 非线性水波[27~ 32]

这方面的工作是本课题组过去十余年有关工作[10~ 21, 40, 41] 的延伸与发展 所得的主要成果有:

1 强分层流体中界面孤立波的四阶渐近解[27, 28]

所研究的位形是两平行刚体固壁间的两层不可压缩、不可溶混无粘流体, 用作者所建立的基本方程(见[41] , 采取约化摄动法与 PLK 方法相结合的途径, 用 Mathematica2 22 系统进行符号运算 由于控制方程是三个复杂的非线性双曲型方程, 运算过程相当繁复, 我们在当时的 IBM486 微机上求得了四阶渐近解, 所用的 CPU 时间约为 6 小时, 其中反复应用了上述半逆序算法 结果发现, 波形的三、四阶渐近解在一、二阶渐近解之间, 四阶近似波形窄于一阶波形, 即常规的 KdV 孤立波波形, 这与已知的实验结果相符

2 任意密度分层流体中内孤立波的四阶渐近解[31, 32]

对采用 Boussinesq 近似和半 Langrange 坐标所建立的控制方程, 用 PLK 方法同时将波高、水平坐标和波速进行摄动, 由可解性条件导得了各阶演化方程, 首阶方程是 KdV 方程, 高阶方程则为非齐次线性化 KdV 方程 用 Mathematica3 0 系统在 IBM486 微机上求得了四阶渐近解, 发现高阶解有很好的收敛性 由于运算比较繁复, 我们在应用半逆序算法时进行了一些改进, 如事先选定若干参数值、子程序分段编程等等

3 深水中的代数孤立波的二阶理论[30, 32]

Benjamin 等人于 1967 年发现在深水中存在一种代数孤立波, Ono 于 1975 年作了系统分析, 建立了所谓 Benjamin_Ono 方程, 其中的色散项为 Hilbert 积分, 对这种代数孤立波的高阶理论研究得较少 我们考虑的位形是: 上部有无限深的无粘均匀流体、底部有较浅的连续密度分层无粘流体, 从 Euler 方程出发, 采用约化摄动法、匹配法和 PLK 方法相结合的形式, 用 Mathematica2 22 系统, 首先导出了各阶摄动项的演化方程, 正如我们所预料的那样, 首项解满足 Benjamin_Ono 方程, 而高阶项则满足非齐次线性化 Benjamin_Ono 方程, 据此得出了二阶代数孤立波的波形

4 非线性 Klein_Gordon 方程的九阶渐近解[29]

非线性 Klein_Gordon 方程作为非线性水波的一种模型方程, 具有很大的研究价值 本课题组的田梅[29]用 Mathematica2 22 求得了一个一般的非线性 Klein_Gordon 方程的九阶渐近解, 采用了 PLK 方法, 所取的小参数是无量纲波幅, 她给出了非线性色散关系

4 结 论

从以上综述我们可以得到如下结论:

1 借助于符号运算可以大大增加 PLK 方法的生命力, 使其如虎添翼, 至少对保守系统的非线性振动和波动问题的研究是非常有力的工具 当问题的摄动级数解有良好的收敛性时, 经符号运算将摄动级数延伸到高阶, 可望解决一些强非线性问题

2 尽管已经有一些相当成熟的、可应用于微机的计算机代数软件, 在微机上实现符号运算并非坦途, 需要设计一些精巧的算法, 如本文所述的半逆序算法, 克服所谓中间表达式爆炸困难

3 本文仅涉及 PLK 方法与符号运算的结合, 实际上, 在所有科学计算和工程分析中都可以采取符号运算的途径, 当今, 符号运算与数值计算的结合已成为人们关注的热点之一, 应予充分注意

[参 考 文 献]

[1] 戴世强. PLK 方法[A]. 奇异摄动理论及其在力学中的应用[M]. (钱伟长主编), 北京: 科学出版社, 1981: 33 86.

[2] Poincare H. New Methods of Celestial Mechanics[M]. NASA TTF_450: English edition, 1967.

[3] Lighthill M J. A technique for rendering approximate solutions to physical problems uniformly valid [J]. Phil Mag, 1949, **40**(5): 1179 1120.

[4] Kuo Y H. On the flow of an incompressible viscous fluid past a flat plate at moderate Reynolds numbers[J]. J Math and Phys, 1953, **32**(1): 83 51.

[5] Kuo Y H. Viscous flow along a flat plate moving at high supersonic speeds[J]. J Aero Sci, 1956, **23**(1): 125 136.

[6] Tsien H S. The Poincare_Lighthill_Kuo method[J]. Advan Appl Math, 1956, **4**(2): 281 349.

[7] DAI Shi_qiang. On the generalized PLK method and its applications[J]. Acta Mech Sinica, 1990, **6**(2): 111 118.

[8] 戴世强. 完全近似法的推广及其应用[J]. 应用数学和力学, 1991, **12**(3): 237 244.

[9] 戴世强, Sigalov G F, Diogenov A V. 若干强非线性问题的近似解析解[J]. 中国科学(A 辑), 1990, **33**(2): 153 162.

[10] 戴世强. 两个界面孤立波之间的迎撞[J]. 力学学报, 1983, **15**(6): 623 632.

[11] 戴世强. 一个二流体系统中两对孤立波的相互作用[J]. 中国科学(A辑), 1983, **26**(11): 1007 1017.

[12] 戴世强. 分层流体中推广的 Boussinesq 方程和斜相互作用的孤立波, 应用数学和力学, 1984, **5**(4): 499 509.

[13] 戴世强, 张社光. 分层流体中凸孤立波与凹孤立波的相互作用[J]. 科学通报, 1986, **31**(1): 96 99.

[14] 张社光, 戴世强. 分层流体中不同模式孤立波的迎撞[J]. 上海工业大学学报, 1986, **7**(4): 375 383.

[15] 张社光, 戴世强. 分层流体中相同模式孤立波的迎撞[J]. 应用数学与计算数学学报, 1986, **1**(1): 61 69.

[16] 刘宇陆, 戴世强. 二流体系统中自由面及界面上的二阶椭圆余弦波[J]. 应用数学和力学, 1987, **8**(6): 479 484.

[17] 朱勇, 戴世强. 缓变深度分层流体中的准周期波和准孤立波[J]. 应用数学和力学, 1989, **10**(3): 202 210.

[18] 戴世强. 关于振荡型的界面孤立波[J]. 水动力学研究与进展(A辑), 1992, **7**(1): 1 6.

[19] 朱勇, 戴世强. 分层流体中 gKdV 型孤立波的迎撞[J]. 力学学报, 1992, **24**(1): 9 18.

[20] 朱勇. 一个二流体系统中 mKdV 型孤立波的迎撞[J]. 应用数学和力学, 1992, **13**(5): 389 399.

[21] DAI Shi_qiang, ZHU Yong. Perturbation solution of gKdV equation and interaction of gKdV solitary waves[A]. In: S Xiao, X Hu, Eds. Nonlinear Problems in Engineering and Science[C]. Beijing, New York: Science Press, 1992.

[22] 唐苓, 戴世强. KdV_Burgers 方程的一类渐近解: 见: 单调激波解[A]. 黄黔, 潘立宙主编: 应用数学和力学(钱伟长八十诞辰祝寿文集[M]. 北京: 科学出版社, 重庆: 重庆出版社, 1993, 400 404.

[23] 臧宏鸣, 戴世强. 一个非线性振动方程的计算机代数解, 上海工业大学学报, 1993, **14**(3): 189 197.

[24] 臧宏鸣. 若干力学问题的计算机代数_摄动研究[D]. 上海: 上海工业大学硕士学位论文, 1993.

[25] 王明祺, 戴世强. Duffing 方程摄动解的计算机延伸[J]. 上海工业大学学报, 1994, **15**(3): 384 389.

[26] 王明祺, 戴世强. 一个非线性波动方程的计算机代数_摄动解[J]. 应用数学和力学, 1995, **16**(5): 403 408.

[27] ZANG Hong_ming, DAI Shi_qiang. Higher_order solutions for interfacial solitary waves in a two_fluid system[A]. In: Editorial Board of Journal of Hydrodynamics, Ed. Proc 1st Int Conf on Hydrodynamics[C]. Beijing: China Ocean Press, 1994.

[28] 戴世强, 臧宏鸣. 内孤立波的计算机代数研究[J]. 自然杂志, 1995, **17**(3): 177 179.

[29] 田梅. Klein_Gordon 方程的九阶计算机代数_摄动解[A]. 见: 戴世强, 刘曾荣, 黄黔主编. 现代数学和力学(MMM_)[C]. 苏州: 苏州大学出版社, 1995.

[30] CHENG You_liang. The evolution equation for second_order internal solitary waves in stratified fluid of great depth[J]. J Shanghai Univ, 1997, **1**(2): 130 134.

[31] CHENG You_liang, DAI Shi_qiang. Higher_order solutions for internal solitary waves via symbolic computation[A]. In: H Kim, S H Lee, S J Lee, Eds. Proc 3rd Int Conf on Hydrodynamics[C]. Seoul: Ulam Publishers, 1998.

[32] 程友良. 分层流体中孤立波的理论分析和符号运算研究[D]. 上海: 上海大学博士学位论文, 1998.

[33] DAI Hui_hui, DAI Shi_qiang, HUO Yi. Head_on collision between two solitary waves in a compress-

ible Mooney_Rivlin elastic rod[J]. Wave Motion, 2000, **32**(1): 93 111.

[34] 戴世强. 非线性力学问题的计算机代数研究[A]. 见: 戴世强, 刘曾荣, 黄黔 主编, 现代数学和力学(MMM_)[C]. 苏州: 苏州大学出版社, 1995.

[35] Calmet J, Van Hulzen J A. Computer algebra applications[A]. In: B Buchberger, G E Collins, R Loos Eds. Computer Algebra Symbolic and Algebraic Computation[M]. Beijing: World Publishing Corporation, 1988.

[36] Beltzer A I B. Engineering analysis via symbolic computation: a breakthrough[J]. Appl Mech Rev, 1990, **403**(6): 119 127.

[37] Heck A. Introduction to MAPLE[M]. New York: Springer_Verlag, 1993.

[38] Rand H R. Armbruster D. Perturbation Methods, Bifurcation Theory and Computer Algebra[M]. New York: Springer_Verlag, 1987.

[39] 戴世强, 臧宏鸣. 计算机代数应用中的一个半逆序算法[J]. 应用数学和力学, 1997, **18**(2): 105 111.

[40] 戴世强. 约化摄动法和非线性波远场分析[J]. 力学进展, 1982, **12**(2): 2 22.

[41] 戴世强. 两层流体界面上的孤立波[J]. 应用数学和力学, 1982, **3**(6): 721 731.

Poincare_Lighthill_Kuo Method and Symbolic Computation

DAI Shi_qiang

(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics,
Shanghai University, Shanghai 200072, P R China

Abstract: This paper elucidates the effectiveness of combining the Poincare_Lighthill_Kuo method (PLK method, for short) and symbolic computation. Firstly, the idea and history of the PLK method are briefly introduced. Then, the difficulty of intermediate expression swell, often encountered in symbolic computation, is outlined. For overcoming the difficulty, a semi_inverse algorithm was proposed by the author, with which the lengthy parts of intermediate expressions are first frozen in the form of symbols till the final stage of seeking perturbation solutions. To discuss the applications of the above algorithm, the related work of the author and his research group on nonlinear oscillations and waves is concisely reviewed. The computer_extended perturbation solution of the Duffing equation shows that the asymptotic solution obtained with the PLK method possesses the convergence radius of 1 and thus the range of validity of the solution is considerably enlarged. The studies on internal solitary waves in stratified fluid and on the head_on collision between two solitary waves in a hyperelastic rod indicate that by means of the presented methods, very complicated manipulation, unconceivable in hand calculation, can be conducted and thus result in higher_order evolution equations and asymptotic solutions. The examples illustrate that the algorithm helps to realize the symbolic computation on micro_commputers. Finally, it is concluded that with the aid of symbolic computation, the vitality of the PLK method is greatly strengthened and at least for the solutions to conservative systems of oscillations and waves, it is a powerful tool.

Key words: PLK method; perturbation methods; symbolic computation; intermediate expression swell; semi_inverse algorithm