

文章编号:1000-0887(2004)01-0093-07

考虑二次梯度项影响的非线性不稳定 渗流问题的精确解^{*}

曹绪龙^{1,2}, 同登科³, 王瑞和³

(1.中国科学院兰州化学物理研究所,甘肃兰州 730000;
2.胜利油田有限公司地质科学研究院,山东东营 257000;
3.石油大学应用数学系,山东东营 257061)

(张鸿庆推荐)

摘要: 考虑了二次梯度项影响的非线性径向流动问题的无限大地层和有界地层渗流模型。在井底定流量和定压生产时,对无限大地层及有界地层(包括封闭和定压地层)六种情况,利用广义 Weber 变换和广义 Hankel 变换求得了实空间的解析解,分析了非线性压力解与线性压力解的差异,发现在晚时段其差异可达 8% 以上。因此在试井长时要考虑二次梯度项的影响。

关键词: 非线性流动; 积分变换; 解析解; 试井分析

中图分类号: TE312 **文献标识码:** A

引 言

在某些操作过程中,很小的压力梯度可能引起预测孔隙压力分布方面的显著错误,例如水力压裂,大的压降流动,试井,钻杆测试和大的压降脉冲测试,特别地,高灵敏度的压力测量装置必定能检测到如此小的压力波动。在流动系统中,忽略这个波动是由于探测线性化近似,而不是由于异常。而以往的理论大多是假设小的压缩率或小的压力梯度,忽略非线性二次梯度项^[1]。为了描述二次梯度项的影响,欧德(Odeh)和巴布(Babu)^[2]在流动方程中保留二次梯度项^[2],建立了考虑二次梯度项影响的非线性压力不稳定试井模型。发现非线性解注入井压力变化与生产井压力变化不同,不像线性解预测的那样。Finjord 和 Aadnoy 用这种非线性方法解决稳态和拟稳态条件的油藏压力^[3]。Wang 和 Dusseault 在弹性多孔介质方面用一种相似的方法^[4]。Charabarty 的研究表明^[5],非线性项在具有高注入量和小油藏传导率定流量生产时有显著影响。同登科用数值方法^[6,7,8]讨论了考虑二次梯度项影响的双重介质流动问题,但他们都没有给实空间的精确解,更没有讨论定压生产和有界地层。实际油藏是有限的,因此有必要进一步完善考虑二次梯度项影响的非线性渗流模型及其试井理论。

利用 Weber 变换和 Hankel 变换给出了定流量和定压生产时,无限大地层,有界封闭和有界

• 收稿日期: 2002-08-29; 修订日期: 2003-08-02

基金项目: 国家 973 项目(2002CB211708)

作者简介: 曹绪龙(1964—),男,河北黄骅人,博士,高级工程师;

同登科(联系人, Tel: 86-546-8393487; Fax: 86-546-8396065; E-mail: tongdk@mail.hdpu.edu.cn).

定压地层考虑二次梯度项影响的实空间精确解,讨论了非线性压力动态特征、非线性参数和边界对压力动态的影响,传统模型为非线性参数 $\alpha = 0$ 时的特例.

1 考虑二次梯度项影响的非线性压力不稳定分析模型

假设:1) 储层厚度一致为 h , 且产层厚度全部打开, 流体径向流入井内(或从井眼将流体注入地层); 2) 孔隙介质均一, 各向同性; 3) 孔隙度和渗透率是常数(与压力无关); 4) 流体的压缩系数是常值, 流体粘度是常数. 在储层中心一口井定产量或定压生产时, 考虑二次梯度项影响的弱可压缩液体圆柱对称问题可描述如下

$$\frac{\partial^2 p_D}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_D}{\partial r_D} - \alpha \left(\frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right)^2 = \frac{\partial p_D}{\partial t_D} \quad (1)$$

初始条件

$$p_D |_{t_D=0} = 0, \quad (2)$$

内边界条件

$$\left. \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right|_{r_D=1} = -1, \quad (3)$$

$$p_D |_{r_D=1} = 0. \quad (4)$$

考虑井眼储集时, 内边界条件为

$$C_D \left. \frac{\partial p_D}{\partial t_D} \right|_{r_D=1} - \left. \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right|_{r_D=1} = 1,$$

外边界条件

$$\left. \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right|_{r_D=r_{De}} = 0, \quad (5)$$

$$p_D |_{r_D=r_{De}} = 0, \quad (6)$$

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} p_D = 0. \quad (7)$$

对于定量生产时, 无因次压力无因次压缩系数定义为:

$$p_D = \frac{2\pi kh(p_i - p)}{\mu q}, \quad \alpha = \frac{q\mu c}{2\pi kh}.$$

对于定压生产时

$$p_D = \frac{(p_i - p)}{p_i - p_w}, \quad \alpha = c(p_i - p_w).$$

其它无因次量定义为

$$r_D = \frac{r}{r_w}, \quad t_D = \frac{kt}{c\phi\mu r_w^2}, \quad C_D = \frac{c}{2\pi\phi c_i h r_w^2}$$

其中 p_w 为定压生产时井底压力, k, ϕ 分别为孔隙度和渗透率, μ 为液体粘度, c 为流体压缩系数, p_i 是初始地层压力.

考虑二次梯度项影响非线性渗流问题的 6 个典型初边值问题: 1) 定产量生产有界封闭地层问题, 式(1), (2), (3), (5), 简称为问题 I; 2) 定产量生产有界定压地层问题, 式(1), (2), (3), (6), 简称为问题 II; 3) 定压生产有界封闭地层问题, 式(1), (2), (4), (5), 简称为问题 III; 4) 定产量生产有界封闭地层问题, 式(1), (2), (4), (6), 简称为问题 IV; 5) 定产量生产无限大地层问题, 式(1), (2), (3), (7), 简称为问题 V; 6) 定压生产无限大地层问题, 式(1), (2), (4), (7), 简称为问题 VI.

2 考虑二次梯度项影响的不稳定渗流问题的精确解

2.1 模型 I 的精确解

模型中的微分方程是非线性方程,无法直接求解,作变换

$$p_D = -\alpha^{-1} \ln x, \quad (8)$$

模型 I 可化为

$$\frac{\partial^2 x}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial x}{\partial r_D} = \frac{\partial x}{\partial t_D}, \quad (9)$$

$$x|_{t_D=0} = 1. \quad (10)$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial r_D} - \alpha x \right) |_{r_D=1} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial x}{\partial r_D} |_{r_D=r_{De}} = 0. \quad (12)$$

作广义 Hankel 变换^[5]

$$\bar{x}(x_n, t_D) = \int_1^{r_{De}} r_D B(s_n r_D) x(r_D, t_D) dr_D, \quad (13)$$

其中

$$B(s_n r_D) = [s_n J_1(s_n) + \alpha J_0(s_n)] Y_0(s_n r_D) - [s_n Y_1(s_n) + \alpha Y_0(s_n)] J_0(s_n r_D), \quad (14)$$

s_n 是方程

$$[s J_1(s) + \alpha J_0(s)] Y_1(s r_{De}) - [s Y_1(s) + \alpha Y_0(s)] J_1(s r_{De}) = 0 \quad (15)$$

的第 n 个根.

对方程(9)~(12)关于 r_D 应用广义 Hankel 变换得

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial t_D} = -s_n^2 \bar{x}, \quad \bar{x}|_{t_D=0} = \frac{2\alpha}{\pi s_n^2}.$$

求解得

$$\bar{x} = \left(\frac{2\alpha}{\pi s_n^2} \right) \exp[-s_n^2 t_D]. \quad (16)$$

对(16)作 Hankel 逆变换得

$$x(r_D, t_D) = \pi \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp[-s_n^2 t_D] B(s_n r_D) J_1^2(s_n r_{De})}{\{ [s_n J_1(s_n) + \alpha J_0(s_n)]^2 - (s_n^2 + \alpha^2) J_1^2(s_n r_{De}) \}}. \quad (17)$$

将(17)式代入(8)式得

$$p_D(r_D, t_D) = -\frac{1}{\alpha} \ln \left[\pi \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp[-s_n^2 t_D] B(s_n r_D) J_1^2(s_n r_{De})}{\{ [s_n J_1(s_n) + \alpha J_0(s_n)]^2 - (s_n^2 + \alpha^2) J_1^2(s_n r_{De}) \}} \right]. \quad (18)$$

井壁处的压降 ($r_D = 1$)

$$p_{wD}(t_D) = -\frac{1}{\alpha} \ln \left[\pi \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp[-s_n^2 t_D] J_1^2(s_n r_{De})}{\{ [s_n J_1(s_n) + \alpha J_0(s_n)]^2 - (s_n^2 + \alpha^2) J_1^2(s_n r_{De}) \}} \right]. \quad (19)$$

模型 I 考虑井筒储集的拉氏空间反演解为

$$p_D(r_D, t_D) = -\frac{1}{\alpha} \ln \{ 1 - \alpha L^{-1} [K_0(r_D \sqrt{s}) I_1(r_{De} \sqrt{s}) + I_0(r_D \sqrt{s}) K_1(r_{De} \sqrt{s})] \times [s(C_D s + \alpha) \lambda_1 + s \sqrt{s} \lambda_2]^{-1} \}, \quad (20)$$

其中 $\lambda_1 = I_0(\sqrt{s}) K_1(r_{De} \sqrt{s}) + K_0(\sqrt{s}) I_1(r_{De} \sqrt{s})$, $\lambda_2 = K_1(\sqrt{s}) I_1(r_{De} \sqrt{s}) - I_1(\sqrt{s}) K_1(r_{De} \sqrt{s})$.

2.2 模型 II ~ 模型 VI 的精确解

利用 Hankel 变换和 Weber 可得其它情况的解, 列于表 1.

表 1 考虑二次梯度项影响的不稳定渗流问题的精确解

类型	实空间压力解	s_n 满足的方程
II	$p_D(r_D, t_D) = -\frac{1}{\alpha} \ln \left[\frac{\alpha \ln r_D + 1}{\alpha \ln r_{De} + 1} + \frac{\pi \alpha (1 - \alpha \ln r_{De})}{(\alpha \ln r_{De} + 1)} \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp[-s_n^2 t_D] B_1(s_n r_D) J_0^2(s_n r_{De})}{\{ [s_n J_1(s_n) + \alpha J_0(s_n)]^2 - (s_n^2 + \alpha^2) J_0^2(s_n r_{De}) \}} \right]$	$B_1(s_n r_D) = [s_n J_1(s_n) + \alpha J_0(s_n)] Y_0(s_n r_D) - [s_n Y_1(s_n) + \alpha Y_0(s_n)] J_0(s_n r_D)$ $s_n \text{ 是方程 } B_1(s r_{De}) = 0 \text{ 的第 } n \text{ 个根.}$
III	$p_D(r_D, t_D) = -\frac{1}{\alpha} \ln [e^{-\alpha} + \pi(e^{-\alpha} - 1) \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp[-s_n^2 t_D] B_2(s_n r_D) J_1^2(s_n r_{De})}{\{ J_0^2(s_n) + J_1^2(s_n r_{De}) \}}]$	$B_2(s_n r_D) = Y_0(s_n) J_0(s_n r_D) - J_0(s_n) Y_0(s_n r_D)$ $s_n \text{ 是方程 } Y_0(s) J_1(s r_{De}) - J_0(s) Y_1(s r_{De}) = 0 \text{ 的第 } n \text{ 个根.}$
IV	$p_D(r_D, t_D) = -\frac{1}{\alpha} \ln \left[e^{-\alpha} + \frac{1 - e^{-\alpha}}{\ln r_{De}} \ln r_D + \pi(e^{-\alpha} - 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp[-u^2 t_D] B_3(s_n r_D) J_0^2(s_n r_{De})}{\{ [J_0^2(s_n) - J_0^2(s_n r_{De}) \}} \right]$	$B_3(s_n r_D) = Y_0(s_n) J_0(s_n r_D) - J_0(s_n) Y_0(s_n r_D)$ $s_n \text{ 是方程 } B_3(s r_{De}) = 0 \text{ 的第 } n \text{ 个根.}$
V	$p_D(r_D, t_D) = -\frac{1}{\alpha} \ln \left[1 - \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(1 - \exp[-u^2 t_D]) [\alpha \varphi_{0,0}(r_D, 1, u) + u \varphi_{0,1}(r_D, 1, u)] du}{u \{ [\alpha J_0(u) + u J_1(u)]^2 + [\alpha Y_0(u) + u Y_1(u)]^2 \}} \right]$	$\varphi_{m,n}(x, y, \lambda) = Y_m(x\lambda) J_n(y\lambda) - J_m(x\lambda) Y_n(y\lambda), J_m(x), Y_m(x) \text{ 分别为第一类, 第二类 Bessel 函数.}$
VI	$p_D(r_D, t_D) = -\frac{1}{\alpha} \ln \left[e^{-\alpha} + \frac{2(e^{-\alpha} - 1)}{\pi} \times \int_0^{\infty} \frac{\varphi_{0,0}(1, r_D, s) \exp[-s^2 t_D] ds}{[J_0^2(s) + Y_0^2(s)] s} \right]$	$\varphi_{0,0}(1, r_D, s) = J_0(s r_D) Y_0(s) - Y_0(s r_D) J_0(s)$

2.3 对模型 V 的解的讨论

1) 拉氏空间的解

对模型 V 经变换(8)后关于 t_D 作 Laplace 变换

$$\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial \bar{x}}{\partial r_D} = s \bar{x}, \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial r_D} - \alpha \bar{x} \right) \Big|_{r_D=1} = 0, \lim_{r_D \rightarrow \infty} \bar{x} = 1/s.$$

由此可得拉氏空间的解为

$$\bar{x}(r_D, s) = \frac{1}{s} - \frac{\alpha K_0(\sqrt{s} r_D)}{s [\alpha K_0(\sqrt{s}) + \sqrt{s} K_1(\sqrt{s})]}. \quad (21)$$

代回变换(8)得模型 V 的拉氏空间的反演解为

$$p_D(r_D, t_D) = -\frac{1}{\alpha} \ln \left[1 - \alpha L^{-1} \left\{ \frac{K_0(\sqrt{s} r_D)}{s [\alpha K_0(\sqrt{s}) + \sqrt{s} K_1(\sqrt{s})]} \right\} \right]. \quad (22)$$

考虑井眼储集的拉氏空间的反演解为

$$p_D(r_D, t_D) = -\frac{1}{\alpha} \ln \left[1 - \alpha L^{-1} \left\{ \frac{K_0(\sqrt{s} r_D)}{s [(C_D s + \alpha) K_0(\sqrt{s}) + \sqrt{s} K_1(\sqrt{s})]} \right\} \right]. \quad (23)$$

2) 短时渐近解

当 $s \rightarrow \infty$ 时, 此时的贝塞尔函数可近似为

$$K_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \quad (24)$$

利用(24)式可将(21)式近似为

$$\bar{x}(r_D, s) = \frac{1}{s} - \frac{\alpha \exp[-(r_D - 1)(\sqrt{s})]}{\sqrt{r_D} (\alpha + \sqrt{s}) s}. \quad (25)$$

对(25)式进行拉氏反演得

$$x(r_D, t_D) = 1 - \frac{1}{\sqrt{r_D}} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{r_D - 1}{2\sqrt{t_D}} \right) - \exp[\alpha^2 t_D + \alpha(t_D - 1)] \operatorname{erfc} \left(\frac{r_D - 1}{2\sqrt{t_D}} + \alpha\sqrt{t_D} \right) \right]. \quad (26)$$

那么短时渐近解为

$$p_D(r_D, t_D) = -\frac{1}{\alpha} \ln \left[1 - \frac{1}{\sqrt{r_D}} \operatorname{erfc} \left(\frac{r_D - 1}{2\sqrt{t_D}} \right) + \frac{1}{\sqrt{r_D}} \exp[\alpha^2 t_D + \alpha(t_D - 1)] \operatorname{erfc} \left(\frac{r_D - 1}{2\sqrt{t_D}} + \alpha\sqrt{t_D} \right) \right]. \quad (27)$$

3) 长时渐近解

当 $t_D \rightarrow \infty$ 时, $s \rightarrow 0$ 此时有

$$K_0(s) = -\left(\ln \frac{s}{2} + \gamma \right), \quad K_1(s) = \frac{1}{s}. \quad (28)$$

将(26)代入(21)式得

$$\bar{x}(r_D, s) = \frac{1}{s} \left[1 + \alpha \left(\frac{\sqrt{s} r_D}{2} + \gamma \right) \left(1 + \alpha \left(\frac{\sqrt{s}}{2} + \gamma \right) \right) + O(\alpha^2) \right]. \quad (29)$$

对(29)作拉氏反演得

$$x(r_D, t_D) = 1 - \frac{\alpha}{2} \ln \frac{4t_D}{Cr_D^2} + \frac{\alpha^2}{4} \left(\ln \frac{4t_D}{Cr_D^2} \right)^2 - \frac{\alpha^2 \pi^2}{24}, \quad (30)$$

其中 $C = e^\gamma$, $\gamma = 0.5772$, 是欧拉常数. 则长时渐近解为

$$p_D(r_D, t_D) = -\frac{1}{\alpha} \left[1 - \frac{\alpha}{2} \ln \frac{4t_D}{Cr_D^2} + \frac{\alpha^2}{4} \left(\ln \frac{4t_D}{Cr_D^2} \right)^2 - \frac{\alpha^2 \pi^2}{24} \right]. \quad (31)$$

3 压力曲线动态特征

考虑常量生产, 无限大地层情况, 图1是线性和非线性无因次井眼压力解在 $C_D = 0, 1000$ 两种不同的值随时间的变化, 非线性解被 $\alpha = 0.01, 0.0001$ 两个值所刻画.

从图1可以看出, 考虑或不考虑无因次井储系数, 线性解和非线性解之间的差异很小, 线性解与 $\alpha = 0.0001$ 时非线性解几乎完全重合. 但是, 随着时间的增加, 线性解与非线性解间的差异由 α 的值控制, 从图1可知, 线性解和非线性解的误差在 $t_D = 10^9$ 时可达9%, 而在早时却没有多少差别.

为了定量的描述线性解与非线性解间的差异, 我们定义

$$\varepsilon = 1 - \frac{p_{Dnl}}{p_{Dl}}, \quad (32)$$

其中 p_{Dnl} 和 p_{Dl} 分别为无因次非线性和线性解, 从(32)式知 ε 与0的偏离越大, 线性解与非线性解的差异越大.

图2展现的是井眼附近对于两个不同的井储系数 C_D 值误差的瞬时变化. 在初时段, 半径越接近井眼和井储系数越大, 误差越小. 随着时间的增加, 误差增加. 为了研究在较大的半径和较长的误差动态, 我们观察图3, 发现在任何径向距离的误差的大小不仅依赖于 α 和 C_D 值, 而且还依赖时间, 时间越短(如 $t_D = 10^5$), 对任何 α 和 C_D 值误差越小. 在较长的时间(如 $t_D = 10^8$), 误差的空间分布不受 C_D 的影响. 从图3中注意到在任何给定的时间, 误差的空间

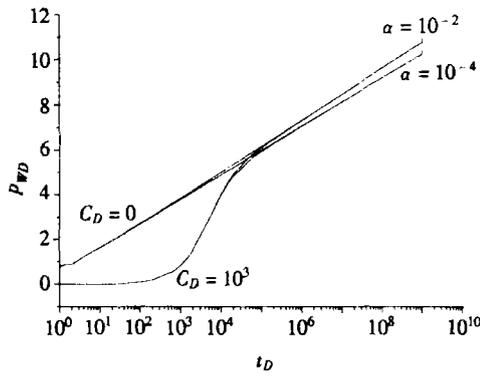


图 1 无限大地层线性与非线性压力解比较

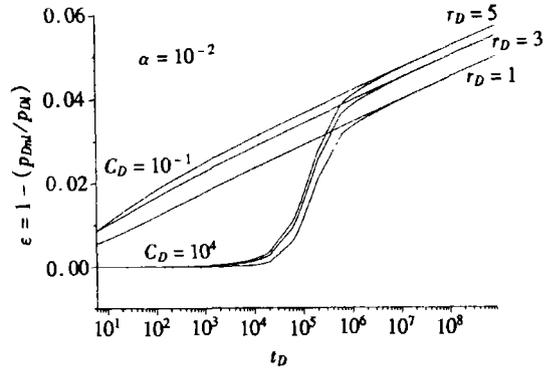


图 2 在不同的时间无限大地层的压力解的误差的变化

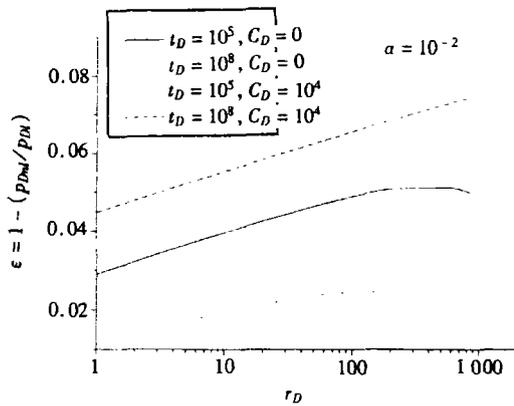


图 3 在不同的半径无限大地层压力解的误差变化

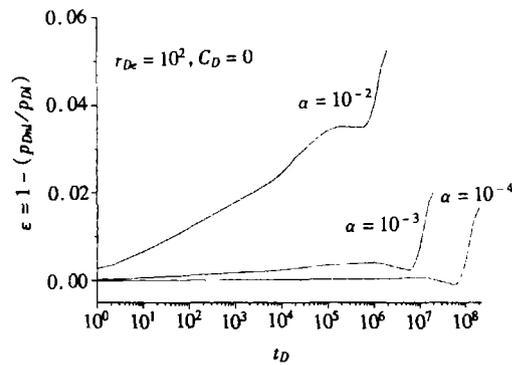


图 4 有界封闭系统误差依赖 alpha 的变化

分布随着距井眼的径向距离的增加而增加直到最大值达到,然而当最大值达到后误差趋向于平坦或下降。如果我们感兴趣的是较长时间和距井眼较距离处的压力,误差可能很大,甚至可达 10% 左右。

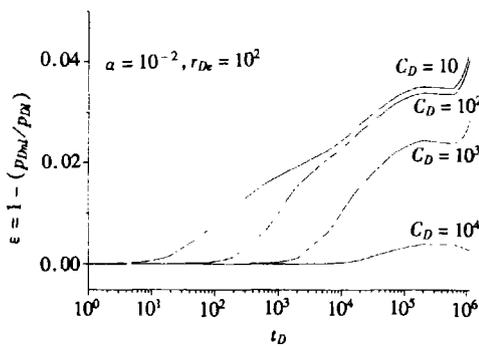


图 5 有界封闭系统误差依赖 C_D 的变化

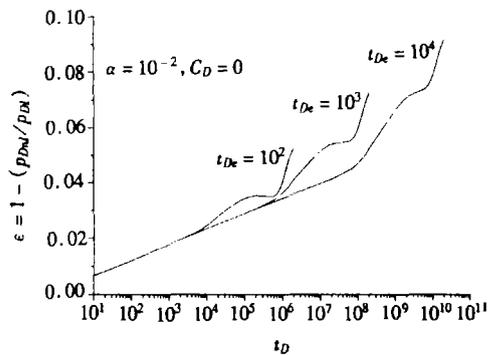


图 6 有界封闭系统误差依赖 r_De 的变化

对于定量生产、有界封闭系统,误差受到 α , r_{De} , C_D 的影响。在图 4 中, α 在整个流动过程中都影响着线性解与非线性解之间的误差的变化,初始阶段影响较小,随着时间的增加,对误差的影响越来越大, α 越大影响越大(当 $\alpha = 10^{-2}$,影响可达 6% 左右),对于较小的 α ,影响可

忽略不计(当 $\alpha = 10^{-4}$ 几乎没有影响)。从图 5 中可看出,初始阶段,误差几乎不受 C_D 的影响,随着时间的增加, C_D 的影响越来越明显, C_D 越小,对误差的影响时间越早且影响越大, C_D 越大,对误差影响的越晚,且不超过 0.5%,此时可忽略其影响。在图 6 中, r_{De} 在整个流动过程中对误差都有影响, r_{De} 越大,影响越大,特别对于较大的时间值,影响更明显。

[参 考 文 献]

- [1] 同登科,葛家理.分形油藏不稳定渗流问题的精确解[J].力学学报,1998,30(5):621—626.
- [2] Odeh A S, Babu D K. Comprising of solutions for the nonlinear and linearized diffusion equations[J]. *SPE Res Eng*, 1998, 3(4): 1202—1206.
- [3] Finjord J, Aadony B S. Effects of quadratic gradient term in steady-state and quasi-steady-state solutions for reservoir pressure[J]. *SPE Form Eval*, 1989, 4(3): 413—417.
- [4] Wang Y, Dusseault M B. The effect of quadratic gradient terms on the borehole solution in poroelastic media[J]. *Water Resour Res*, 1991, 27(12): 3215—3223.
- [5] Chakrabarty C, Farouq Ali S M, Tortike W S. Analytical solutions for radial pressure distribution including the effects of the quadratic-gradient term[J]. *Water Resour Res*, 1993, 29(4): 1171—1177.
- [6] 同登科,蔡一郎,陈钦雷.考虑二次梯度项影响的双重介质流动分析[J].工程力学,2002,19(3): 99—103.
- [7] 同登科,蔡一郎.考虑二次梯度项影响的双渗模型的动态特征[J].计算物理,2002,19(2): 177—182.
- [8] 同登科,刘敏鸽.双重介质分形油藏非线性流动分析[J].石油大学学报,2003,27(2): 59—62.

Exact Solutions for Nonlinear Transient Flow Model Including a Quadratic Gradient Term

CAO Xu-long^{1,2}, TONG Deng-ke³, WANG Rui-he³

(1. Institute of Chemical Physics, Chinese Academy of Sciences,
Lanzhou 730000, P. R. China;

2. Geological Science Research Institute, Shengli Oilfield Co. Ltd.,
Dongying, Shandong 257000, P. R. China;

3. Department of Applied Mathematics, University of Petroleum,
Dongying, Shandong 257061, P. R. China)

Abstract: The models of the nonlinear radial flow for the infinite and finite reservoirs including a quadratic gradient term were presented. The exact solution was given in real space for flow equation including quadratic gradient term for both constant-rate and constant pressure production cases in an infinite system by using generalized Weber transform. Analytical solutions for flow equation including quadratic gradient term were also obtained by using the Hankel transform for a finite circular reservoir case. Both closed and constant pressure outer boundary conditions are considered. Moreover, both constant rate and constant pressure inner boundary conditions are considered. The difference between the nonlinear pressure solution and linear pressure solution is analyzed. The difference may be reached about 8% in the long time. The effect of the quadratic gradient term in the large time well test is considered.

Key words: nonlinear flow; integral transform; analytical solution; well test analysis