应用数学和力学, 第 22 卷 第 3 期(2001 年 3 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2001) 03_0325_06

一类高阶拟线性椭圆型方程奇摄动广义边值问题*

莫嘉琪[1], 欧阳成[2]

(1. 安徽师范大学 数学系, 芜湖 241000; 2. 湖州师范学院 数学系, 湖州 313000)

(戴世强推荐)

摘要: 讨论了一类拟线性椭圆型方程奇摄动广义边值问题· 在适当的条件下, 研究了 Dirichlet 问题广义解的存在、唯一性及其渐近性态·

关 键 词: 椭圆型方程; 奇异摄动; 广义解
中图分类号: O175.29 文献标识码: A

引 言

作者在文[1]~[8]中曾研究了一类奇摄动问题· 本文涉及的是奇摄动问题的广义解· 今讨论如下高阶拟线性椭圆型方程 Dirichlet 问题:

$$\varepsilon L_{2m}[u]+\sum_{i=1}^{n}b_i(\boldsymbol{x},u)\frac{\partial u}{\partial x_i}=f(\boldsymbol{x},u)\qquad(\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\Omega\subset\mathbf{R}^n),\tag{1}$$

$$\frac{\partial^j u}{\partial n^j}(\boldsymbol{x})=0\qquad(\boldsymbol{x}\in\partial\Omega;j=0,1,\cdots,m-1),\tag{2}$$

其中 ε 是正的小参数, Ω 为 $\mathbf{R}^n$ 中的有界凸域, $\partial\Omega=\partial\Omega_{+}+\partial\Omega_{-}$ 为 Ω 的光滑边界, 其中 $\partial\Omega_{+}$ 是子特征线进入区域 Ω 的边界, 而 $\partial\Omega_{-}$ 是子特征线退出区域 Ω 的边界, 且

$$L_{2m}\equiv\sum_{1\leqslant|\mu|,|\sigma|\leqslant m}(-1)^{|\mu|}D^{\mu}(a_m^{\mu\sigma}(\boldsymbol{x})D^{\sigma}),$$

$$D_j=\frac{\partial}{\partial x_j},\quad D^{\alpha}=D_1^{\alpha_1}D_2^{\alpha_2}\cdots D_n^{\alpha_n},\quad|\alpha|=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j,$$

而 $m\geqslant 1$, $x^{\alpha}=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$, 系数 $a^{\mu\sigma}$ 和 b_i 假设为在 $C^{\infty}(\Omega)$ 中的实值函数, L_{2m} 为在 Ω 一致强椭圆型的:

$$\sum_{1\leqslant|\mu|,|\sigma|\leqslant m}^{n}\xi^{\mu}a_m^{\mu\sigma}(x)\xi^{\sigma}\geqslant\lambda_m|\xi|^{2m}:=\lambda_m\Big(\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\Big)^m\qquad(\forall\xi\in\mathbf{R}^n;x\in\Omega,\ \lambda_m>0),$$

f 为它的变元在对应的区域内充分光滑的实值函数, $\dfrac{\partial}{\partial n}$ 为在 $\partial\Omega$ 上的外法向导数·

首先假设:

[H$_1$] 原问题(1)~(2)的退化问题:

* 收稿日期: 2000_02_28; 修订日期: 2000_10_28
作者简介: 莫嘉琪(1937—), 男, 浙江德清县人, 教授, 美国《美学评论》和德国《数学摘要》评论员.

$$\sum_{i=1}^{n} b_i(\boldsymbol{x}, w)\frac{\partial w}{\partial x_i} = f(\boldsymbol{x}, w) \qquad (\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \Omega \subset \mathbf{R}^n), \tag{3}$$

$$w(\boldsymbol{x}) = 0 \qquad (\boldsymbol{x} \in \partial\Omega_-)\cdot \tag{4}$$

在 Ω 上除 $\partial\Omega_+$ 与 $\partial\Omega_-$ 的交点 A_1 和 A_2 外(在交点处子特征线与边界相切)有唯一解的 $\boldsymbol{w(x)} \in C^{\infty}$•

代替问题(1)~(2),我们考虑广义 Dirichlet 问题:

$$\varepsilon B_m[\phi, u] + B_1[\phi, u] = -\sum_{i=1}^{n}(\phi, [b_i(\boldsymbol{x}, u) - b_i(\boldsymbol{x}, w)]D_i u) +$$

$$(\phi, f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) - f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w})) \quad (\forall \phi \in C_0^{\infty}(\Omega)), \tag{5}$$

其中

$$B_m[\phi, u] \equiv \varepsilon \sum_{1 \leqslant |\mu|, |\sigma| \leqslant m}(D^{\mu}\phi, a_m^{\mu\sigma}D^{\sigma}u),$$

$$B_1[\phi, u] \equiv \sum_{i=1}^{n}(\phi, b_i(\boldsymbol{x}, w)D_i u) - (\phi, f(\boldsymbol{x}, w)),$$

而 $C_0^{\infty}(\Omega)$ 为由 Ω 中具有紧支函数并具有 $C^{\infty}(\Omega)$ 的子集,表示式 $B_m[v, u]$ 为与 $L_{2m}[u]$ 有关的双线性形式,该形式是关于 $a_m^{\mu\sigma}$ 以及 v 和 u 在 Ω 中有界并被定义在 Sobolev 空间 $H^m(\Omega)$ 的具有有限模:

$$\|\phi\|_j = \left\{\sum_{|\alpha| \leqslant j}\int_{\Omega} |D^{\alpha}\phi(x)|^2 \mathrm{d}x\right\}^{1/2} \quad (\forall \phi \in C^m(\Omega); j = 1, m),$$

同时 (u, v) 是被定义在 $H_0^m(\Omega)$ 中的内积,其中 $H_0^m(\Omega)$ 为 $C_0^{\infty}(\Omega)$ 中完备空间•

首先,我们来研究问题(5)的解 $u \in H_0^m(\Omega)$•

1 广义解的存在、唯一性

现在再假设:

[H$_2$] 存在不依赖于 v 和 u 的常数 $C_{j1}(j = 1, m)$:

$$|B_j[v, u]| \leqslant C_{j1}\|v\|_j \cdot \|u\|_j, (j = 1, m, \forall v, u \in H_0^m)$$

和不依赖于 v 的常数 $C_{j2}(j = 1, m)$:

$$|B_j[v, v]| \geqslant C_{j2}\|v\|_j^2 \quad (j = 1, m, \forall v \in H_0^m);$$

[H$_3$] 存在常数 $\delta_i(i = 0, 1, 2, 3)$,使得:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} b_i\right| \leqslant \frac{\delta_1}{4}, \quad \left|\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial b_i}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial x_i}\right| \leqslant \delta_2, \quad \delta_0 \leqslant \frac{\partial f}{\partial u} \leqslant \delta_3(\forall \boldsymbol{x} \in \Omega, \forall u \in \mathbf{R}),$$

且 $\sum_{i=1}^{3}\delta_i < C_{12}$;

[H$_4$] 系数 $a_m^{\mu\sigma}, 1 \leqslant |\mu|, |\sigma| \leqslant m$ 在 Ω 中有上界 C_{m3},且

$$|a_m^{\mu\sigma}(\boldsymbol{x}) - a_m^{\mu\sigma}(\boldsymbol{y})| \leqslant c_m(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|)(|\mu| = |\sigma| = m; \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \Omega),$$

其中 $c_m(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|) \to 0$,当 $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| \to 0$•

现证如下定理:

定理 1 在假设[H$_1$]~[H$_3$]下,广义边值问题(5)存在唯一的解 $u(\boldsymbol{x}) \in H_0^m(\Omega)$•

证明 首先任取一个函数 $u_0(\boldsymbol{x}) \in H_0^m(\Omega)$,考虑广义线性 Dirichlet 边值问题

$$\varepsilon B_m[\phi, u] + B_1[\phi, u] = -\sum_{i=1}^{n}(\phi, [b_i(\boldsymbol{x}, u_0) - b_i(\boldsymbol{x}, w)]D_i u_0 +$$

$$(\phi, f(\boldsymbol{x}, u_0) - f(\boldsymbol{x}, w)) \qquad (\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)),$$

由 Lax_Milgram 定理[9] 及假设[H1] ~ [H3], 在 Hilbert 空间 H_0^m 中, 表示式为

$$F[v] = \varepsilon B_m[v, u] + B_1[v, u]$$

的每一有界泛函 $F[v]$, 可决定唯一的 u•

今取

$$F[v] = \left(v, -\sum_{i=1}^{n}[b_i(\boldsymbol{x}, u_0) - b_i(\boldsymbol{x}, w)]D_i u_0 + f(\boldsymbol{x}, u_0) - f(\boldsymbol{x}, w)\right),$$

则存在唯一的广义解 $u_1(\boldsymbol{x}) \in H_0^m(\Omega)$, 满足

$$\varepsilon B_m[\phi, u_1] + B_1[\phi, u_1] = -\sum_{i=1}^{n}(\phi, [b_i(\boldsymbol{x}, u_0) - b_i(\boldsymbol{x}, w)]D_i u_0 +$$
$$(\phi, f(\boldsymbol{x}, u_0) - f(\boldsymbol{x}, w)) \qquad (\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)),$$

利用迭代法, 设 $u_{j-1}(\boldsymbol{x}) \in H_0^m(\Omega)$, 并考虑方程

$$\varepsilon B_m[\phi, u_j] + B_1[\phi, u_j] = -\sum_{i=1}^{n}(\phi, [b_i(\boldsymbol{x}, u_{j-1}) - b_i(\boldsymbol{x}, w)]D_i u_{j-1} +$$
$$(\phi, f(\boldsymbol{x}, u_{j-1}) - f(\boldsymbol{x}, w)) \qquad (\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)),$$

则我们能得到 $u_j(x) \in H_0^m(\Omega)$• 于是得到一个函数列: $\left\{u_j(\boldsymbol{x}) \in H_0^m(\Omega), j = 0, 1, \dots\right\}$• 并不难得到存在唯一的 Dirichlet 问题(5) 广义解 $u(\boldsymbol{x}) \in H_0^m(\Omega)$, 使得

$$\lim_{j\to\infty}(\phi, u_j) = (\phi, u) \qquad (\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega))•$$

定理 1 证毕•

2 渐 近 解

设 $u(\boldsymbol{x})$ 为广义边值问题(5) 的广义解, $w(x)$ 为退化问题(2) ~ (3) 的解• 令

$$u(\boldsymbol{x}) = w(\boldsymbol{x}) + z(\boldsymbol{x})•$$

因此 $z(\boldsymbol{x})$ 满足

$$\varepsilon B_m[\phi, z] + B_1[\phi, z] = (\phi, -\varepsilon L_{2m}[w]) - (\phi, \sum_{i=1}^{n}[b_i(\boldsymbol{x}, w+z) - b_i(\boldsymbol{x}, w)]D_i z) -$$
$$(\phi, \sum_{i=1}^{n}[b_i(\boldsymbol{x}, z+w) - b_i(\boldsymbol{x}, w)]D_i w) + (\phi, f(\boldsymbol{x}, w+z) - f(\boldsymbol{x}, w)),$$
$$(\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega))• \tag{6}$$

因为 $z(x)$ 不属于 $H_0^m(\Omega)$• 所以引入边界层校正项 v, 使得 $w + v$ 属于 $H_0^m(\Omega)$• 设

$$u(\boldsymbol{x}) = w(\boldsymbol{x}) + v(\boldsymbol{x}) + z(\boldsymbol{x}), \tag{7}$$

其中余项 z 属于 $H_0^m(\Omega)$•

首先 在 $\partial\Omega$ 的附近建立局部坐标系, 定义在 $\partial\Omega$ 的邻域中的每一点 Q 的坐标 (ρ, ϕ) 按如下方法: 坐标 $\rho (\leqslant \rho_0)$ 为点 Q 到边界 $\partial\Omega$ 的距离, 其中 ρ_0 为足够小, 使得 $\partial\Omega$ 上的每一点的内法线在 $\partial\Omega$ 的邻域内互不相交• $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1})$ 为 $(n-1)$_维流形 $\partial\Omega$ 上的一个非奇坐标系• 点 Q 的坐标与点的坐标 φ 相同, 这里的点 P 是过点 Q 的内法线在边界 $\partial\Omega$ 的交点•

在 $\partial\Omega$: $0 \leqslant \rho \leqslant \rho_0$ 邻域中, 我们构造如下形式的边界层校正项 v:

$$v(\boldsymbol{x}) = \psi(\boldsymbol{x})\left(\sum_{j=0}^{m-1} c_j \rho^j\right)\exp\left[-\frac{\rho}{\varepsilon^r}\right], \tag{8}$$

其中 r 是正常数, $c_j, (j = 0, 1, \cdots, m-1)$ 为常数, 待定. $\psi(x) \equiv \psi(\rho) \in C^\infty[0, \infty)$, 且

$$\psi(\rho) = \begin{cases} 1 & \left(0 \leqslant \rho \leqslant \frac{1}{3}\rho_0\right), \\ 0 & \left(\rho \geqslant \frac{2}{3}\right). \end{cases}$$

因为 $w \in C^\infty(\Omega)$, 函数 $w + v$ 属于 $C^\infty(\Omega)$, 故 $(w + v) \in H_0^m(\Omega)$, 此时

$$\left.\frac{\partial^j (w + v)}{\partial \rho^j}\right|_{\rho = 0} = 0 \quad (j = 0, 1, \cdots, m-1). \tag{9}$$

由(9), 系数 $c_j, j = 0, 1, \cdots, m-1$, 满足

$$\sum_{i=0}^{j} c_i i! \begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix} \frac{(-1)^{j-i}}{\varepsilon^{(j-i)r}} = -\left.\frac{\partial^j w}{\partial \rho^j}\right|_{\rho=0} \qquad (j = 0, 1, \cdots, m-1).$$

不难看出

$$c_0 = -w|_{\rho=0} = O(1),$$

$$c_1 = -\left.\frac{\partial w}{\partial \rho}\right|_{\rho=0} + \frac{c_0}{\varepsilon^r} = O(\varepsilon^{-r}),$$

$$c_2 = -\frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2}\right|_{\rho=0} + \frac{c_1}{\varepsilon^r} = O(\varepsilon^{-2r}).$$

这时我们可得到

$$c_j = O(\varepsilon^{-jr}) \qquad (j = 0, 1, \cdots, m-1).$$

于是对充分小的 ε, 有

$$\|v\|_j^2 \leqslant d_j \sum_{i=0}^{j} \int_\Omega \left(\frac{\partial^i v}{\partial \rho^i}\right)^2 \mathrm{d}\Omega,$$

其中 d_j 为不依赖于 ε 的常数.

设 $\rho = \varepsilon^r \tau$, 可得

$$\frac{\partial^j v}{\partial \rho^j} = \frac{1}{\varepsilon^{jr}} \frac{\partial^j}{\partial \tau^j}\left[\psi(x) \sum_{i=0}^{m-1} \varepsilon^{ir} c_i \tau^i \exp[-\tau]\right] = O(\varepsilon^{-jr}).$$

因为 $d\rho = \varepsilon^r d\tau$, 我们便得到

$$\|v\|_j^2 = O(\varepsilon^{(-2j+1)r}) \qquad (j = 0, 1, \cdots, m-1). \tag{10}$$

3　余项估计和最后的结果

定义余项

$$u(\boldsymbol{x}) = w(\boldsymbol{x}) + z(\boldsymbol{x})$$

及

$$u(\boldsymbol{x}) = w(\boldsymbol{x}) + v(\boldsymbol{x}) + z(\boldsymbol{x}),$$

其中 w 为退化问题(3) ~ (4) 的解, v 为由(8) 给定的边界校正项. 我们在下面给出这两个余项的先验估计.

因为 $C_0^\infty(\Omega)$ 包含 $H_0^m(\Omega)$, 且 $\boldsymbol{z} \in H_0^m(\Omega)$, 由(6), (7), 有

$$\varepsilon B_m[z, z] + B_1[z, z] = (z, -\varepsilon L_{2m}[w]) - \left(z, \sum_{i=1}^{n}[b_i(\boldsymbol{x}, w + z) - b_i(\boldsymbol{x}, w)]D_i z\right) -$$

$$\left(z, \sum_{i=1}^{n}[b_i(\boldsymbol{x}, z + w) - b_i(\boldsymbol{x}, w)]D_i w\right) + (z, f(\boldsymbol{x}, w + z) - f(\boldsymbol{x}, w)),$$

$$(\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega))\cdot$$

故由假设$[H_2] \sim [H_3]$, 对于充分小的 ε, 可得

$$\begin{aligned}
&\varepsilon B_m[z,z] + B_1[z,z] = (z, -\varepsilon L_{2m}[w]) - (z, \sum_{i=1}^{n}[b_i(\boldsymbol{x}, w+z) - b_i(\boldsymbol{x}, w)]D_i z) - \\
&\quad (z, \sum_{i=1}^{n}[b_i(\boldsymbol{x}, z+w) - b_i(\boldsymbol{x}, w)]D_i w) + (z, f(\boldsymbol{x}, w+z) - f(\boldsymbol{x}, w)) - \\
&\quad \varepsilon B_m[z,v] - B_1[z,v] \leqslant \\
&\quad \| z\|_0[\varepsilon[\| L_{2m}[w]\|_0 + \frac{\delta_1}{2}\| z\|_1 + \delta_2\| z\|_0 + \delta_3\| z\|_0] + \\
&\quad \varepsilon C_{m1}\| z\|_m\| v\|_m + C_{11}\| z\|_1\| v\|_1 \leqslant \\
&\quad \| z\|_0[\varepsilon[\| L_{2m}[w]\|_0 + \frac{\delta_1}{2}(\| z\|_1 + \| v\|_1) + (\delta_2 + \delta_3)(\| z\|_0 + \| v\|_0)] + \\
&\quad \varepsilon C_{m1}\| z\|_m\| v\|_m + C_{11}\| z\|_1\| v\|_1\cdot
\end{aligned}$$

由假设$[H_2]$, 我们有

$$\begin{aligned}
&\varepsilon C_{m2}\| z\|_m^2 + (C_{12} - (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3)\| z\|_1 \leqslant \\
&\quad \| z\|_0[\varepsilon[\| L_{2m}[w]\|_0 + \frac{\delta_1}{2}\| v\|_1 + (\delta_2 + \delta_3)\| v\|_0] + \\
&\quad \varepsilon C_{m1}\| z\|_m\| v\|_m^2 + C_{11}\| z\|_1\| v\|_1\cdot
\end{aligned}$$

于是存在正常数 C_1, 使得

$$\begin{aligned}
\varepsilon\| z\|_m^2 + \| z\|_1^2 \leqslant C_1\Big\{&\| z\|_0[\varepsilon[\| L_{2m}[w]\|_0 + \frac{\delta_1}{2}\| v\|_1 + (\delta_2 + \delta_3)\| v\|_0] + \\
&\varepsilon C_{m1}\| z\|_m\| v\|_m + C_{11}\| z\|_1\| v\|_1\Big\}\cdot
\end{aligned}$$

由估计式(10), 我们能够得到

$$\varepsilon\| z\|_m^2 + \| z\|_1^2 \leqslant C_2\left\{\varepsilon^2 + \varepsilon^{1+(-2m+1)r} + \varepsilon^r\right\}, \tag{11}$$

其中 C_2 为与 ε 无关的正常数·

令 $r = \dfrac{1}{2m}$, 并由(11)我们便得到了一个先验估计:

$$\varepsilon\| z\|_m^2 + \| z\|_1^2 \leqslant O(\varepsilon^{1/2m})\cdot$$

关于 z 的估计为

$$\varepsilon\| z\|_m^2 + \| z\|_1^2 \leqslant \varepsilon(\| z\|_m^2 + \| v\|_m^2) + (\| z\|_1^2 + \| v\|_1^2),$$

并由(10), 得到

$$\varepsilon\| z\|_m^2 + \| z\|_1^2 \leqslant O(\varepsilon^{1/2m})\cdot$$

于是我们有如下定理:

定理 2 在假设$[H_1] \sim [H_4]$下, 对于充分小的 ε, Dirichlet 问题(5)的广义解 $u \in H_0^m(\Omega)$ 在 Ω 中处除了点A_1和A_2的邻域 $\Omega_{\delta(A_1)}$ 和 $\Omega_{\delta(A_2)}$ 外的 Ω 中, 满足关系式:

$$\| u - w\|_1 = O(\varepsilon^{1/4m}), \quad \| u - w\|_m = O(\varepsilon^{1/4m - 1/2}) \qquad (0 < \varepsilon \ll 1),$$

其中 $w(x)$ 为退化问题(3) ~ (4)的解·

[参 考 文 献]

[1] MO Jia_qi. A class of singularly perturbed reaction diffusion integral differential system[J]. Acta Math Appl Sinica, 1999, **15**(1): 19—23.

[2] MO Jia_qi. A class of singularly perturbed boundary value problems for nonlinear differential systems [J]. J Sys Sci and Math Scis, 1999, **12**(1): 55—58.

[3] MO Jia_qi. A class of singularly perturbed problems with nonlinear reaction diffusion equation[J]. Advance in Math, 1998, **27**(1): 53—58.

[4] MO Jia_qi, CHEN Yu_sen. A class of singularly perturbed for reaction diffusion systems with nonlocal boundary conditions[J]. Acta Math Sci, 1997, **17**(1): 25—30.

[5] 莫嘉琪. 一类奇摄动反应扩散系统[J]. 应用数学和力学, 1997, **18**(3): 255—260.

[6] MO Jia_qi. A singularly perturbed nonlinear boundary value problem[J]. J Math Anal Appl, 1993, **178**(1): 289—293.

[7] MO Jia_qi. Singular perturbation for a class of nonlinear reaction diffusion systems[J]. Science in China Ser A, 1989, **32**(11): 1306—1315.

[8] MO Jia_qi, Singular perturbation for a boundary value problems of fourth order nonlinear differential equation[J]. Chinese Ann Math, 1987, **8**B(1): 80—88.

[9] De Jager E M, JIANG Fu_ru. The Theory of Singular Perturbation[M]. Amsterdam: North_Holland Publishing Co, 1996.

A Class of Singularly Perturbed Generalized Boundary Value Problems for Quasilinear Elliptic Equation of Higher Order

MO Jia_qi[1], OUYANG Cheng[2]

(1. Department of Mathematics, Anhui Normal University, Wuhu 241000, P R China;
2. Department of Mathematics, Huzhou Teachers College, Huzhou, Zhejiang 313000, P R China)

Abstract: The singularly perturbed generalized boundary value problems for the quasilinear elliptic equation of higher order are considered. Under suitable conditions, the existence, uniqueness and asymptotic behavior of the generalized solution for the Dirichlet problems are studied.

Key words: elliptic equation; singular perturbation; generalized solution