文章编号: 1000_0887(2001 02_0111_08

不带微结构的连续统中新的能量守恒定律和 C_D 不等式*

戴天民

(辽宁大学 数学应用中心和数学系, 沈阳 110036

(我刊编委戴天民来稿

摘要: 对连续统力学中的基本定律和均衡方程以及 C_D 不等式进行了认真的再研究• 指出了现有的动量矩均衡定律和能量守恒定律以及 Clausius_Duhem 不等式的不完整性, 并且提出了不带微结构的局部和非局部非对称连续统中新的而且更为普遍的能量守恒定律和相应的能量均衡方程以及 C_D 不等式•

关 键 词: 局部非对称; 非局部非对称; 连续统力学; 能量守恒定律; 能量均衡方程; C_D 不等式

中图分类号: O313.2 文献标识码: A

引 言

连续统力学是一门既古老而又年轻的学科• 它是以适用于所有物质的基本定律和表征各类物质特性的本构理论两大支柱为基础而建立起来的•

最早的经典连续统力学的理论框架由以质量守恒定律, Cauchy 第一运动方程(动量均衡定律 和第二运动方程(动量矩均衡方程或应力对称定理 为基本定律和以虎克定律为本构理论所组成•

长期以来没有人怀疑过这个理论框架• 直到 1909 年, 法国 Cosserat[1] 两兄弟出版“Theorie des Corps Deformable” 专著, 突破了应力对称定理, 从而建立起有向粒子连续统模型, 并成为广义连续统力学的开山之作• 但是, 由于理论超前, 在当时并没引起人们的注意, 以至于竟埋没了近半个世纪• 直到 1958 年, 美国两位理性力学家 Ericksen 和 Truesdell 及德国连续统力学家 Guenther 同时发表有关论文才使 Cosserat 连续统得到公认, 并在各国迅速发展•

到 1945 年作为现代连续统力学基础理论的理性力学开始复兴(可参阅钱伟长, 郭仲衡, 戴天民为中国大百科全书力学卷撰写的理性力学词条[2] • 理性力学的重要成就之一就是对物质体理论进行公理化, 其中包括基本公理和本构公理体系• 到目前为止, 国内外已出版多部连续统力学的专著和教材, 因为太多, 不便一一列举• 但就作者所知, 除了陈至达[3] 的专著“ 有理力学”, 几乎所有专著和教材除在本构理论方面各具特色外, 至今都仍然采用经典连续

* 收稿日期: 2000_01_03; 修订日期: 2000_09_20
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19672023 ; 辽宁省教育委员会 A 类基础性研究项目
作者简介: 戴天民(1931— ,男, 满族, 博士, 教授, 博导, 已发表论文 50 余篇, 出版专著译著 10 部.

统力学中的质量守恒定律、Cauchy 第一和第二运动方程、以及能量守恒定律, 有的再加上熵不等式•

Eringen 曾于 1975 年在[4]中对动量矩均衡定律和能量守恒定律中分别加上考虑在孤立点处作用有集中力 $\boldsymbol{F}_\alpha$ 和集中力偶 $\boldsymbol{M}_\alpha$ 影响的项:

$$\sum_\alpha(\boldsymbol{p}_\alpha\times\boldsymbol{F}_\alpha+\boldsymbol{M}_\alpha)\ 和\ \sum_\alpha(\boldsymbol{F}_\alpha\cdot\boldsymbol{V}_\alpha+\boldsymbol{M}_\alpha\cdot\omega_\alpha)\cdot$$

这些是很重要的概念• 遗憾的是, 他没有继续深入探讨, 而是就此止步, 放弃这些影响, 又回到经典连续统的范畴• G. E. Mase[5] 于 1970 年曾用一个习题指出, 如果连续统内存在体力矩, 则应力张量就不再是对称的• 陈至达[6] 于 1981 年提出考虑体力矩的动量矩均衡方程

$$(\sigma_j^i+(\sigma_j^i)^{\mathrm{T}}+\rho m_j^i=0\cdot$$

这里 σ_j^i 和 m_j^i 分别为应力张量和根据体力矩矢量 $\boldsymbol{m}$ 定义的二阶张量• 由于体力矩的效应, 应力张量不再对称• 若体力矩为零, 则又归结为应力对称定理, 即Cauchy第二运动定律• 这应该看作是多年来连续统力学发展中的又一次突破• 这类工作涉及到对传统的连续统力学中的动量矩均衡定律需加修正的现实• 奇怪的是, 在所有带微结构的广义连续统理论中没有不考虑体力矩的, 而在传统的连续统力学中直到 1981 年又都回避体力矩的存在• 陈[6] 及宋彦琦和陈[7] 已建立起有限变形非对称弹性理论的广义变分原理•

又是 Eringen, 他在[8]中研究非局部弹性学性力学问题时提到: 具有 $\rho=0$ 的非极性情况, 动量矩均衡方程

$$\varepsilon_{lmn}t_{mn}+\rho(\hat{t}_l-\varepsilon_{lmn}x_m\hat{f}_n)=0$$

的括号内两项一般说来不为零, 故知, 在非局部弹性力学中应力可能是不对称的• 这一论断是正确的• 遗憾的是, 他又就此止步, 强令 $\rho(\hat{t}_l-\varepsilon_{lmn}x_m\hat{f}_n)=0$, 于是又回到经典的应力对称性范畴• 高键于 1988 年在他的博士论文[9] 中根据非局部连续统理论的公理化体系提出考虑外加体力矩影响的非局部弹性理论, 实现了 Eringen 提出的在非局部弹性力学中应力可能是非对称的猜想, 从而突破了传统的非局部理论中应力仍为对称的框框• 接着他又和戴天民及陈至达分别提出具有非局部体力矩的非局部弹性理论[10] 及非对称的非局部塑性理论[11]• 最近, 高键又在这一领域取得了很大进展[12, 13]• 戴天民[14] 提出非局部非对称弹性理论的更为普遍的功能原理, 从而可以同时推导出相应问题的运动方程、能量均衡方程以及应力和位移边界条件•

为了分清问题的性质, 我们建议把应力为对称的传统的理论称为局部对称连续统理论和非局部对称连续统理论, 而把应力为非对称的更为普遍的理论称为局部非对称连续统理论和非局部非对称连续统理论•

作者对现有的连续统理论中的基本定律和均衡方程以及 C_D 不等式进行了认真的再研究, 并指出在应力非对称性方面已有突破, 但是能量守恒守律和与之相关的 C_D 不等式却依然如故, 似乎至今还未曾有人怀疑过这里可能会有问题• 为此, 本文将给出不带微结构的连续统理论中更为普遍的新的能量守恒定律和与之相应的 C_D 不等式•

为了简单和比较起见, 本文除另作说明外一律采用文献[8]和[15]中的符号和记法, 并采用直角坐标系表述和推导• 为清楚起见, 传统的和更为普遍的以及新的结果分别用公式号 (和(* 以及(** 加以区别•

1 传统的基本定律和均衡方程以及 C_D 不等式

在传统的连续统力学中有下列 5 个公理公设成立。通过局部化便可得到相应的局部和非局部均衡方程。

1.1 基本公理 1(质量守恒定律)

A. 全局质量守恒定律

物体总质量在运动中不变，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho \mathrm{d}v = 0. \tag{1a}$$

B. 局部质量均衡方程

$$\dot{\rho} + \rho v_{k,k} = 0. \tag{1b}$$

C. 非局部质量均衡方程

$$\dot{\rho} + \rho v_{k,k} = \hat{\rho}. \tag{1c}$$

不失普遍性，本文为推导方便起见，令 $\hat{\rho} = 0$。

1.2 基本公理 2(动量均衡定律)

A. 全局动量均衡定律

动量的时间变化率等于作用在物体上的合力，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho \boldsymbol{v} \mathrm{d}v = \oint_A \boldsymbol{t}_{(\boldsymbol{n})} \mathrm{d}a + \int_V \rho \boldsymbol{f} \mathrm{d}v. \tag{2a}$$

B. 局部动量均衡方程(Cauchy 第一运动定律

$$t_{kl,k} + \rho(f_l - \dot{v}_l) = 0. \tag{2b}$$

C. 非局部动量均衡方程

$$t_{kl,k} + \rho(f_l - \dot{v}_l) = -\rho \hat{f}_l. \tag{2c}$$

1.3 基本公理 3(动量矩均衡定律)

A. 全局动量矩均衡定律

动量矩的变化率等于作用在物体上的力和力偶的合力矩，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{v} \mathrm{d}v = \oint_A \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{t}_{(\boldsymbol{n})} \mathrm{d}a + \int_V \rho \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{f} \mathrm{d}v. \tag{3a}$$

B. 局部动量矩均衡方程 (Cauchy 第二运动定律

由(3a，有

$$\int_V \varepsilon_{ijl}\left\{ t_{jl} + x_j[\rho(f_l - \dot{v}_l) + t_{kl,k}]\right\} \mathrm{d}v = 0. \tag{a}$$

考虑到(2b，则由上式得局部动量矩均衡方程:

$$\varepsilon_{ijl} t_{jl} = 0 \text{ 或 } t_{jl} = t_{lj}. \tag{3b}$$

此即应力对称定理。

C. 非局部动量矩均衡方程

考虑到(2c，我们由(a 可得非局部动量矩均衡方程:

$$\varepsilon_{ijl}(t_{jl} - \rho x_j \hat{f}_l) = 0. \tag{3c}$$

评注 1 从上式可见，若非局部体力剩余 $\hat{f}_l$ 存在，则应力也不是对称的，但在非局部对称弹性理论[8]和非局部非对称弹性理论[10]的线性问题中均已证明 $\rho \hat{f}_l = 0$。 □

1.4 基本公理 4(能量守恒定律)

A. 全局能量守恒定律

动能和内能的时间变化率等于所有力和力偶的功率以及进入或离开物体所有其它能量的总和, 即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho\left(\varepsilon+\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\right)\mathrm{d}v=\oint_A(\boldsymbol{t}_{(n)}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{d}a+\int_V\rho(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}+h)\mathrm{d}v. \tag{4a}$$

B. 局部能量均衡方程

由(4a 有

$$\int_V\left\{(-\rho\dot{\varepsilon}+t_{kl}v_{l,k}+q_{k,k}+\rho h)+[\rho(f_l-\dot{v}_l)+t_{kl,k}]v_l\right\}\mathrm{d}v=0. \tag{b}$$

考虑到(2b , 则由上式得局部能量均衡方程:

$$\rho\dot{\varepsilon}=t_{kl}v_{l,k}+q_{k,k}+\rho h. \tag{4b}$$

评注 2 由(a 我们可见, 动量均衡方程寓于动量矩均衡定律之中. 按理说, 动量均衡方程和动量矩均衡方程应当寓于能量守恒定律之中, 但从(b , 却看不到动量矩方程的表现, 这便是多年来存在于能量守恒定律中的隐患. 这就说明它是不完整的, 需要重建新的能量守恒定律的形式. □

C. 非局部能量均衡方程

考虑到(2c , 我们由(b 可得非局部能量均衡方程:

$$-\rho\dot{\varepsilon}+t_{kl}v_{l,k}+q_{k,k}+\rho h-\rho v_l\hat{f}_l+\rho\hat{h}=0. \tag{4c}$$

评注 3 由于(4a 是不完整的, 所以上列非局部能量均衡方程也不可能是完整的. □

1.5 基本公理 5(熵不等式)

A. 全局熵不等式

总熵 H 的时间变化率永远不小于经过物体表面熵的流入通量 S 以及由体源供应的熵流入通量 B 之和, 即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V\rho\eta\,\mathrm{d}v-\int_V\rho b\,\mathrm{d}v-\oint_A S_k\,\mathrm{d}a_k\geqslant 0. \tag{5a}$$

B. 局部熵不等式

$$\rho\dot{\eta}-\rho b-S_{k,k}\geqslant 0. \tag{5b}$$

C. 非局部熵不等式

$$\rho\dot{\eta}-S_{k,k}-\rho b-\rho\hat{b}\geqslant 0. \tag{5c}$$

1.6 Clausius_Duhem 不等式

A. 局部 C_D 不等式

考虑到绝对温度 θ, 自由能量 Ψ 和自由熵通量 $\boldsymbol{p}$:

$$b=h/\theta,\quad \Psi=\varepsilon-\theta\eta,\quad \boldsymbol{p}=(\boldsymbol{q}/\theta)-\boldsymbol{S},$$

则由(4c 和(5c 间消去 h , 可得局部 C_D 不等式:

$$-\frac{\rho}{\theta}(\dot{\Psi}+\eta\dot{\theta})+\frac{1}{\theta}t_{kl}v_{l,k}+\frac{1}{\theta^2}q_k\theta_{,k}+p_{k,k}\geqslant 0. \tag{6a}$$

B. 非局部 C_D 不等式

由(4c 和(5c 间消去 h , 可得非局部 C_D 不等式:

$$-\frac{\rho}{\theta}(\dot{\Psi}+\eta\dot{\theta})+\frac{1}{\theta}t_{kl}v_{l,k}+\frac{1}{\theta^2}q_k\theta_{,k}+p_{k,k}-\frac{\rho}{\theta}\hat{f}_k v_k+\frac{\rho}{\theta}\hat{h}-\rho\hat{b}\geqslant 0. \tag{6b}$$

2　更为普遍的基本定律和均衡方程以及 C_D 不等式

下面来系统地建立不带微结构的连续统的基本定律和均衡方程以及 C_D 不等式, 并给出更为普遍的或是新的相对完整的表达形式•

2.1　基本公理 1(质量守恒定律)

A. 全局质量守恒定律

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho \mathrm{d}v = 0 \qquad (1a$$

B. 局部质量守恒方程

$$\dot{\rho} + \rho v_{k,k} = 0 \qquad (1b$$

C. 非局部质量均衡方程

$$\dot{\rho} + \rho v_{k,k} = \hat{\rho} \qquad (1c$$

2.2　基本公理 2(动量均衡定律)

A. 全局动量均衡定律

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho \boldsymbol{v} \mathrm{d}v = \oint_A \boldsymbol{t}_{(\boldsymbol{n})} \mathrm{d}a + \int_V \rho \boldsymbol{f}\, \mathrm{d}v \qquad (2a$$

B. 局部动量均衡方程

$$t_{kl,k} + \rho(f_l - \dot{v}_l) = 0 \qquad (2b$$

C. 非局部动量均衡方程

$$t_{kl,k} + \rho(f_l - \dot{v}_l) = -\rho \hat{f}_l \qquad (2c$$

2.3　基本公理 3(动量矩均衡定律)

A. 全局动量矩均衡定律

在这里加上体力偶矢量 $\rho \boldsymbol{c}$, 于是有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{v} \mathrm{d}v = \oint_A \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{t}_{(\boldsymbol{n})} \mathrm{d}a + \int_V \rho(\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{f} + \boldsymbol{c}) \mathrm{d}v \qquad (3a^*$$

B. 局部动量矩均衡方程

由(3a * 有

$$\int_V \left\{ (\varepsilon_{ijl} t_{jl} + \rho c_i) + \varepsilon_{ijl} x_j [\rho(f_l - \dot{v}_l) + t_{kl,k}] \right\} \mathrm{d}v = 0 \qquad (a^*$$

考虑到(2b , 则由上式得局部动量矩均衡方程:

$$\varepsilon_{ijl} t_{jl} + \rho c_i = 0 \qquad (3b)^*$$

这便是陈至达在[6]中给出的所谓应力和体力矩平衡方程• 可见, 即使在不带有微结构的连续统理论中只要有体力矩存在, 应力就不再是对称的•

C. 非局部动量矩的均衡方程:

考虑到(2c 并考虑非局部体力矩剩余 $\rho \hat{c}_i$, 我们由(a) * 可得非局部动量矩均衡方程:

$$\varepsilon_{ijl} t_{jl} + \rho c_i - \rho(\varepsilon_{ijl} x_j \hat{f}_l - \hat{c}_i) = 0 \qquad (3c)^*$$

由上式可见, 体力矩 c_i 以及非局部体力剩余 $\hat{f}_l$ 和非局部体力矩剩余 $\hat{c}_i$ 都可能引起应力非对称性, 这便是高键和戴天民在[10]中给出的结果•

2.4　基本公理 4(能量守恒定律)

A. 全局能量守恒定律

现在我们来公设新的带有交叉项的全局能量守恒定律如下:

$$\int_V \rho\left[\dot{\varepsilon} + \dot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{p}\times\dot{\boldsymbol{v}})\cdot\theta\right]\mathrm{d}v = \oint_A\left[\boldsymbol{t}_{(\boldsymbol{n})}\cdot\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{t}_{(\boldsymbol{n})})\cdot\theta + \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}\right]\mathrm{d}a +$$
$$\int_V \rho\left[\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{f} + \boldsymbol{c})\cdot\theta + h\right]\mathrm{d}v. \qquad (4a)^{**}$$

这里等号左侧第 3 项, 右侧第 2 项, 第 5 项和第 6 项交叉项分别表示考虑转动影响而增加的动量矩引起的动能变化率, 面力引起的面矩的功率, 体力引起的矩和外加体力矩的功率, 其中 θ 为转动速度. 这些都是针对传统的能量守恒定律的不完整性而提出来的.

B. 局部能量均衡方程

考虑到增加的交叉项

$$\int_V \rho(\boldsymbol{p}\times\dot{\boldsymbol{v}})\cdot\theta\,\mathrm{d}v = \int_V \rho\,\varepsilon_{ijl}x_j\dot{v}_l\theta_i\,\mathrm{d}v,$$
$$\int_V \rho(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{f})\cdot\theta\,\mathrm{d}v = \int_V \rho\,\varepsilon_{ijl}x_jf_l\theta_i\,\mathrm{d}v,$$
$$\oint_A \rho(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{t}_{(\boldsymbol{n})})\cdot\theta\,\mathrm{d}a = \oint_A \varepsilon_{ijl}x_jt_{kl}\theta_in_k\,\mathrm{d}a = \int_V \varepsilon_{ijl}(x_jt_{kl}\theta_i)_{,k}\,\mathrm{d}v =$$
$$\int_V \varepsilon_{ijl}\left[(t_{jl} + x_jt_{kl,k})\theta_i + x_jt_{kl}\theta_{i,k}\right]\mathrm{d}v,$$

把它们代入(4a)** 并加以整理后, 我们可得

$$\int_V\Big[(-\rho\dot{\varepsilon} + t_{kl}v_{l,k} + \varepsilon_{ijl}x_jt_{kl}\theta_{i,k} + q_{k,k} + \rho h) + [\rho(f_l - \dot{v}_l) + t_{kl,k}]v_l +$$
$$\left\{\varepsilon_{ijl}x_j[\rho(f_l - \dot{v}_l) + t_{kl,k}] + (\varepsilon_{ijl}t_{jl} + c_i)\right\}\theta_i\Big]\mathrm{d}v = 0. \qquad (b)^{*}$$

考虑到(2b) 和(a)*, 我们得新的局部能量均衡方程:

$$\rho\dot{\varepsilon} = t_{kl}(v_{l,k} + \varepsilon_{ijl}x_j\theta_{i,k}) + q_{k,k} + \rho h. \qquad (4b)^{**}$$

由(b)* 显然可见, 动量均衡方程和动量矩均衡方程确实寓于能量守恒定律之中, 这才合乎道理.

C. 非局部能量均衡方程

考虑到对动量均衡方程和动量矩均衡方程的非局部化以及非局部能源剩余 $\rho\hat{h}$, 我们由(b)* 可得新的非局部能量均衡方程:

$$-\rho\dot{\varepsilon} + t_{kl}(v_{l,k} + \varepsilon_{ijl}x_j\theta_{i,k}) + q_{k,k} + \rho h - \rho\hat{f}_lv_l -$$
$$\rho(\hat{c}_i - \varepsilon_{ijl}x_j\hat{f}_l)\theta_i + \rho\hat{h} = 0. \qquad (4c)^{**}$$

这种推导过程是很自然的. 若只考虑体力矩, 而不考虑转动, 即得高键和戴天民在[10]中给出的结果.

2.5 基本公理 5(熵不等式)

A. 全局熵不等式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho\eta\,\mathrm{d}v - \int_V \rho b\,\mathrm{d}v - \oint_A S_k\,\mathrm{d}a_k \geqslant 0. \qquad (5a)$$

B. 局部熵不等式

$$\rho\dot{\eta} - \rho b - S_{k,k} \geqslant 0. \qquad (5b)$$

C. 非局部熵不等式

$$\rho\dot{\eta} - \rho b - S_{k,k} - \rho\hat{b} \geqslant 0. \qquad (5c)$$

2.6 Clausius_Duhem 不等式

由于能量均衡方程的改变, C_D 不等式也要改变.

A. 局部 C_D 不等式

考虑到(c ,我们由(4b ** 和(5b 间消去 h,则得局部 C_D 不等式:

$$-\frac{\rho}{\theta}(\dot{\Psi}+\dot{\theta}\eta)+\frac{1}{\theta}t_{kl}(v_{l,k}+\varepsilon_{jlx}x_j\theta_{i,k})+\frac{1}{\theta^2}q_k\theta_{,k}+p_{k,k}\geqslant 0· \quad (6a^{**}$$

B. 非局部 C_D 不等式

考虑到(c ,我们由(4c ** 和(5c 间消去 h,则得非局部 C_D 不等式:

$$-\frac{\rho}{\theta}(\dot{\Psi}+\dot{\theta}\eta)+\frac{1}{\theta}t_{kl}(v_{l,k}+\varepsilon_{jlx}x_j\theta_{i,k})+\frac{1}{\theta^2}q_k\theta_{,k}+$$

$$p_{k,k}+\frac{\rho}{\theta}\hat{f}_l+\frac{\rho}{\theta}\hat{h}-\rho\hat{b}\geqslant 0· \quad (6b^{**}$$

在非局部连续统理论中,所有非局部剩余在它们的定义域上的积分必须为零,即

$$\int_V(\hat{\rho},\rho\hat{f}_l,\rho\hat{c}_i,\rho\hat{h},\rho\hat{b})\mathrm{d}v=0· \quad (7$$

到此,我们已对不带微结构的连续统力学系统地给出更为普遍的全部基本定律和相应的均衡方程以及 C_D 不等式,其中(4a ** (4b ** 和(4c ** 以及(6a ** 和(6b ** 都是新的•

3 结 束 语

(1 本文已对现有的不带微结构的连续统的基本定律和相应的均衡方程以及 C_D 不等式进行了再研究,并且系统地给出了更为普遍的相应结果,其中提出的局部和非局部非对称连续统力学的能量守恒定律和相应的均衡方程以及与之相关的 C_D 不等式都是新的•

(2 按着 Eringen 的方法[8,15]可容易地推导出相应问题的所有跳变条件• 本文给出的结果都是以 Cauchy 应力表征,故可称之为Cauchy 型的,类似地还可推导出 Piola 型和 Kirchhoff 型的相应结果• 为节省篇幅,不另列出•

(3 有关带有微结构的连续统力学的更为一般的或新的基本定律和相应的均衡方程及 C_D 不等式将在下文阐述•

[参 考 文 献]

[1] Cosserat E, Cosserat F. Theorie des Corpes Deformable[M]. Paris: Hermann et Fils, 1909.

[2] 钱伟长, 郭仲衡, 戴天民. 理性力学[A]. 中国大百科全书力学卷[C]. 北京, 上海: 中国大百科全书出版社, 1985, 288—290.

[3] 陈至达. 有理力学[M]. 徐州: 中国矿业大学出版社, 1988.

[4] Eringen A C. 连续统物理的基本原理[M]. 朱照宣 译. 南京: 江苏科学技术出版社, 1985.

[5] Mase G E. Theory and Problems of Continuum Mechanics [M]. New York: McGraw_Hill Book Company, 1970.

[6] 陈至达. 钱氏定理在有限变形极矩弹性力学广义变分原理的应用[J]. 应用数学和力学, 1981, **2**(2): 191—196.

[7] 宋彦琦, 陈至达. 有限变形非对称弹性理论变分原理[J]. 应用数学和力学, 1999, **20**(11): 1115—1120.

[8] Eringen A C. 非局部微极场论[M]. 戴天民 译. 南京: 江苏科学技术出版社, 1982.

[9] 高键. 非局部场论的几个重要问题[D]. 博士学位论文. 北京: 中国矿业大学(北京校区), 1988.

[10] 高键, 戴天民. 具有非局部体力矩的非局部弹性理论[J]. 力学学报, 1990, **22**(4): 446—455.

[11] 高键, 陈至达. 非对称的非局部塑性理论[J]. 力学学报, 1994, **26**(5): 570—581.

[12] GAO Jian. An asymmetric theory of nonlocal elasticity—Part 1, Quasicontinuum theory[J]. Int J

Solids Structures, 1999, **36**: 2947—2956.

[13] GAO Jian. An asymmetric theory of nonlocal elasticity—Part 2, Continuum Field[J]. Int J Solids Structures, 1999, **36**: 2959—2971.

[14] 戴天民. 非局部非对称弹性理论混合边值问题的提法[J]. 应用数学和力学, 2000, **21**(1): 25—29.

[15] Eringen A C. 连续统力学[M]. 程昌钧, 俞焕然 译, 戴天民 校. 北京: 科学出版社, 1991.

New Conservation Laws of Energy and C_D Inequalities in Continua Without Microstructure

DAI Tian_min

(Center for the Application of Mathematics & Department of Mathematics,
Liaoning University, Shenyang 110036, P R China

Abstract: Fundamental laws and balance equations as well as C_D inequalities in continuum mechanics are carefully restudied, incompleteness of existing balance laws of angular momentum and conservation laws of energy as well as C_D inequalities are pointed out, and finally new and more general conservation laws of energy and corresponding balance equations of energy as well as C_D inequalities in local and nonlocal asymmetric continua are presented.

Key words: local asymmetric; nonlocal asymmetric; continuum mechanics; conservation laws of energy; balance equations of energy; C_D inequalities