应用数学和力学, 第 22 卷 第 2 期(2001 年 2 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2001) 02_0119_08

带有微结构的连续统中新的能量守恒定律和 C_D 不等式*

戴天民

(辽宁大学 数学应用中心和数学系, 沈阳 110036)

(我刊编委戴天民来稿)

摘要: 对带有微结构的连续统中现有的基本定律、均衡方程和 Clausius_Duhem 不等式进行了系统的再研究, 发现所有的能量均衡方程和相关的 C_D 不等式都是不完整的• 本文对现有的结果进行了评注, 并提出新的能量均衡方程和相关的 C_D 不等式•

关 键 词: 带有微结构的连续统; 新的能量均衡方程; 新的 C_D 不等式
中图分类号: O313.2 文献标识码: A

引 言

前文[1]中曾对不带微结构的连续统中基本定律、均衡方程和 Clausius_Duhem 不等式进行了系统的再研究, 并提出了新的能量守恒方程和相关的 C_D 不等式• 本文则对带有微结构的连续统中若干现有结果加以评注, 指出了它们当中有的是不完整的, 并提出新的能量守恒方程和相关的 C_D 不等式• 我们曾在另文中提出更为一般的能量能率原理, 并已给出与现有的结果完全不同的新的能量均衡方程• 本文又从相反的角度论证了这些新成果的完整性•

不管是不带有微结构的, 还是带有微结构的连续统理论都是以基本定律和本构理论作为基础的• 而在基本定律中又以能量守恒定律更为重要• 这是因为它既包涵着动量和动量矩均衡方程, 又与熵不等式一起构成 C_D 不等式的缘故• 从 1958 年 Ericksen 和 Truesdell 以及 Guenther 发表论文后广义连续统理论迅速发展• 由于所采用的物理模型不同, 所得到的理论也就不完全相同• 与近乎相同的物理模型相对应的连续统名称就有 Cosserat 连续统, 微极连续统, 微态连续统, 多极连续统, 带有方向子的连续统, 非对称的连续统, 带有微结构的连续统等等• 这些连续统模型的共同点是都不再研究传统的点连续统和应力张量不再是对称的• 据此, 作者认为把这些相近的连续统通称为带有微结构的连续统也应该是无可非议的•

为了简单和便于与现有理论进行比较起见, 本文以更具有代表性和典型性的微极和微态理论作为研究对象, 并且除另作说明外均采用 Eringen 的专著[2, 3]的结果和记法• 但为清楚起见, 本文采用直角坐标系进行推导, 并用公式编号( ) 和( )** 来分别表示传统的和我们新提出的结果, 以示区别•

* 收稿日期: 2000_01_03; 修订日期: 2000_09_20
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19672023); 辽宁省教育委员会 A 类基础性研究项目
作者简介: 戴天民(1931—), 男, 满族, 博士, 教授, 博导, 已发表论文 50 余篇, 出版专著译著 10 部.

1 现有的基本定律, 均衡方程和 C_D 不等式

为节省篇幅, 下面直接引录专著[2, 3]中微极场论的结果, 不另作文字说明, 但要针对不完整处加以若干评注, 以便为后面建立新的相应结果作好准备.

1.1 质量守恒定律

A. 全局质量守恒定律

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho \mathrm{d}v = 0. \tag{1a}$$

B. 局部质量守恒方程

$$\dot{\rho} + \rho v_{k,k} = 0. \tag{1b}$$

C. 非局部质量守恒方程

$$\dot{\rho} + \rho v_{k,k} = \hat{\rho}. \tag{1c}$$

为简单起见, 并不失一般性, 本文取非局部质量剩余 $\hat{\rho} = 0$.

1.2 微惯性守恒定律

A. 全局微惯性守恒定律

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho\, i_{kl}\, \chi_{kK}\, \chi_{lL}\, \mathrm{d}v = 0. \tag{2a}$$

B. 局部微惯性守恒方程

$$\rho(\dot{j}_{kl} + \varepsilon_{krm} v_m j_{rl} + \varepsilon_{lrm} v_m j_{rk}) = 0. \tag{2b}$$

C. 非局部微惯性守恒方程

$$\rho(\dot{j}_{kl} + \varepsilon_{krm} v_m j_{rl} + \varepsilon_{lrm} v_m j_{rk}) = \hat{j}_{kl}. \tag{2c}$$

为简单起见, 本文假定 $\hat{j}_{kl} = 0$.

1.3 动量均衡定律

A. 全局动量均衡定律

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho \boldsymbol{v} \mathrm{d}v = \oint_A \boldsymbol{t}_{(\boldsymbol{n})} \mathrm{d}a + \int_V \rho \boldsymbol{f} \mathrm{d}v. \tag{3a}$$

B. 局部动量均衡方程

$$t_{kl,k} + \rho(f_l - \dot{v}_l) = 0. \tag{3b}$$

C. 非局部动量均衡方程

$$t_{kl,k} + \rho(f_l - \dot{v}_l) = -\rho \hat{f}_l. \tag{3c}$$

1.4 动量矩均衡定律

A. 全局动量矩均衡定律

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V (\boldsymbol{p} \times \rho \boldsymbol{v} + \rho \boldsymbol{\sigma}) \mathrm{d}v = \oint_A (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{t}_{(\boldsymbol{n})} + \boldsymbol{m}_{(\boldsymbol{n})}) \mathrm{d}a + \int_V (\boldsymbol{p} \times \rho \boldsymbol{f} + \rho \boldsymbol{l}) \mathrm{d}v. \tag{4a}$$

B. 局部动量矩均衡方程

$$m_{kl,k} + \varepsilon_{lmn} t_{mn} + \rho(l_l - \dot{\sigma}_l) = 0. \tag{4b}$$

C. 非局部动量矩均衡方程

$$m_{kl,k} + \varepsilon_{lmn} t_{mn} + \rho(l_l - \dot{\sigma}_l) = -\rho(\hat{l}_l - \varepsilon_{lmn} x_m \hat{f}_n). \tag{4c}$$

评注 1 由(4a)可以推导出

$$\int_V \left\{ \rho[(l_l - \dot{\sigma}_l) + m_{kl,k} + \varepsilon_{lmn} t_{mn}] + \varepsilon_{lmn} x_m [\rho(f_n - \dot{v}_n) + t_{kl,k}] \right\} \mathrm{d}v = 0. \tag{a}$$

利用(3b),则由(a)可得(4b),另外,利用(3c),则由(a)可得(4c),可见,动量均衡方程寓于动量矩均衡定律之中,而且推导非局部动量均衡方程也很自然,故可认为动量矩均衡定律是完整的•

1.5 能量守恒定律

A. 全局能量守恒定律

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V\left[\rho\left(\varepsilon+\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\right)+\frac{1}{2}\sigma\cdot\boldsymbol{r}\right]\mathrm{d}v=\oint_A(\boldsymbol{t}_{(n)}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{m}_{(n)}\cdot\boldsymbol{r})\mathrm{d}a+$$
$$\int_V\rho(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{r})\mathrm{d}v+\oint_A\boldsymbol{q}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a}+\int_V\rho h\,\mathrm{d}v, \tag{5a}$$

这里 $\boldsymbol{r}$ 是角速度矢量•

B. 局部能量均衡方程

$$\rho\dot{\varepsilon}-t_{kl}(v_{l,k}-\varepsilon_{klm}r_m)-m_{kl}r_{l,k}-q_{k,k}-\rho h=0\text{•} \tag{5b}$$

C. 非局部能量守恒方程

$$-\rho\dot{\varepsilon}+t_{kl}(v_{k,k}-\varepsilon_{klm}r_m)-m_{kl}r_{l,k}+q_{k,k}+\rho h-$$
$$\rho[\hat{f}_kv_k+(\hat{l}_k-\varepsilon_{klm}x_l\hat{f}_m)r_k]+\rho\hat{h}=0\text{•} \tag{5c}$$

评注 2 我们由(5a)容易推导出下式:

$$\int_V\Big\{-\rho\dot{\varepsilon}+t_{kl}v_{l,k}+m_{kl}r_{l,k}+q_{k,k}+\rho h+[\rho(f_l-\dot{v}_l)+t_{kl,k}]v_l+$$
$$[\rho(l_l-\sigma\dot{r}_l)+m_{kl,k}]r_l\Big\}\mathrm{d}v=0\text{•} \tag{b$_1$}$$

由此显而易见,若按 Piola 定理,则由上式可得

$$\rho(f_l-\dot{v}_l)+t_{kl,k}=0; \tag{c$_1$}$$
$$\rho(l_l-\sigma\dot{r}_l)+m_{kl,k}=0; \tag{c$_2$}$$
$$\rho\dot{\varepsilon}=t_{kl}v_{l,k}+m_{kl}r_{l,k}+q_{k,k}+\rho h\text{•} \tag{c$_3$}$$

这些式子并不耦合,而且它们应当分别为动量均衡方程、动量矩均衡方程和能量均衡方程,但是第二个式子并非动量矩均衡方程,并且能量均衡方程也不完整• 这些便是从始至今汗藏在带有微结构的连续统理论中的隐患•

面对这样不完整性的现实,国内外一些连续统力学专家采取了下列不同的方法,力图说明现有基本定律的完整性和正确性•

(Ⅰ) 利用运动方程的方法

Eringen 等大多数学者都是利用动量均衡方程和动量矩均衡方程,于是(b)$_1$ 变成为

$$\int_V[(-\rho\dot{\varepsilon}+t_{kl}v_{l,k}+m_{kl,k}r_{l,k}+q_{k,k}+\rho h)-\varepsilon_{mkl}r_mt_{kl}]\mathrm{d}v=0, \tag{b$_2$}$$

由此得局部能量均衡方程(5b)•

(Ⅱ) 利用运动方程和线性本构关系反证的方法

例如 J. Wang 和 R. S. Dhaliwa[4] 对均匀的和各向同性非局部微极弹性体预先采用线性的本构方程和几何关系的条件下,对动量均衡方程点乘以 v_l 和动量矩均衡方程点乘以 r_l 相加并积分后反证出能量守恒定律的形式为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V\rho\left(\varepsilon+\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}+\frac{1}{2}\sigma\cdot\boldsymbol{r}\right)\mathrm{d}v=\oint_A(\boldsymbol{t}_{(n)}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{m}_{(n)}\cdot\boldsymbol{r})\mathrm{d}a+$$
$$\int_V\rho(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{r})\mathrm{d}v\text{•} \tag{d}$$

(Ⅲ) 利用常值速度平移和角速度转动的不变性

Eringen[5] 于 1992 年对他以前建立的微态连续统力学中均衡定律进行了再研究, 并提出了使全局能量守恒定律在常值速度平移和常值角速度转动的不变性要求下, 推导出动量均衡方程、动量矩均衡方程和能量均衡方程• □

评注 3 这里将对评注 2 中提到的三种方程再分别加以扼要的评注•

对于(Ⅰ), 利用运动方程的方法, 实际上相当于在(b)$_1$ 中人为地加上一项 $\varepsilon_{lmn}t_{mn}r_l$, 再减去一项 $\varepsilon_{lmn}t_{mn}r_l = \varepsilon_{mkl}t_{kl}r_m$ 即得

$$\int_V \Big\{ [-\rho\dot{\varepsilon} + t_{kl}(v_{l,k} - \varepsilon_{mkl}r_m) + m_{kl}r_{l,k} + q_{k,k} + \rho h] + [\rho(f_l - \dot{v}_l) + t_{kl,k}]v_l + [\rho(l_l - \dot{\sigma}_l) + m_{kl,k} + \varepsilon_{lmn}t_{mn}]r_l \Big\} \mathrm{d}v = 0• \qquad (\mathrm{b})_3$$

从此即可得到(3b), (4b) 和(5b)• 该方法的目的就是要人为地凑成动量矩均衡方程, 但这样一来, $v_{l,k} - \varepsilon_{mkl}r_m$ 恰好成为线性应变, 于是能量均衡方程也就局限于线性范畴, 失去了很大的普遍性•

对于(Ⅱ), 由于要维护传统的能量守恒定律的形式, 才利用运动方程和线性本构关系进行反证• 但这种反证却必须先假定线性本构方程和几何关系, 这是由于原来的能量守恒定律形式不完整所使然•

对于(Ⅲ), 可能是 Eringen 已经发现, 按(Ⅰ) 的方法不能从传统的能量守恒定律直接给出完整的动量矩均衡方程的形式, 于是利用常值速度平移和常值角速度转动的不变性, 经过相当麻烦的推导, 才给出完整的运动方程, 但是能量均衡方程仍未脱离原来的框框• □

1.6 熵不等式

A. 全局熵不等式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho\eta\,\mathrm{d}v = \oint_A \boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a} + \int_V \frac{\rho\eta}{\theta}\mathrm{d}v \geqslant 0• \qquad (6\mathrm{a})$$

B. 局部熵不等式

$$\rho\dot{\eta} - S_{k,k} - \rho h/\theta \geqslant 0• \qquad (6\mathrm{b})$$

C. 非局部熵不等式

$$\rho\dot{\eta} - S_{k,k} - \rho b - \rho\hat{b} \geqslant 0• \qquad (6\mathrm{c})$$

1.7 Clausius_Dubem 不等式

A. 局部 C_D 不等式

$$-\frac{\rho}{\theta}(\dot{\Psi} + \dot{\theta}\eta) + \frac{1}{\theta}t_{kl}(v_{l,k} - \varepsilon_{mkl}r_m) + \frac{1}{\theta}m_{ml}r_{l,k} + \frac{1}{\theta^2}q_k\theta_{,k} + p_{k,k} \geqslant 0• \qquad (7\mathrm{a})$$

B. 非局部 C_D 不等式

$$-\frac{\rho}{\theta}(\dot{\Psi} + \dot{\theta}\eta) + \frac{1}{\theta}t_{kl}(v_{l,k} - \varepsilon_{mkl}r_m) + \frac{1}{\theta}m_{ml}r_{l,k} + \frac{1}{\theta^2}q_k\theta_{,k} + p_{k,k} - \frac{\rho}{\theta}\hat{f}_k v_k - \frac{\rho}{\theta}(\hat{l}_k - \varepsilon_{klm}x_l\hat{f}_m)r_k + \frac{\rho}{\theta}\hat{h} - \rho\hat{b} \geqslant 0• \qquad (7\mathrm{b})$$

评注 4 由于能量均衡方程不完整, 所以相关的 C_D 不等式也不可能是完整的• □

2 更为普遍的基本定律, 均衡方程和 C_D 不等式

为节省篇幅, 对于相同的质量守恒定律、微惯性守恒定律、动量均衡定律和动量矩均衡定律只列出标题, 不重列表达式• 本文重点是建立更为普遍的能量守恒定律和 C_D 不等式•

2.1 质量守恒定律

2.2 微惯性守性定律

2.3 动量均衡定律

2.4 动量矩均衡定律

2.5 能量守恒定律

A. 全局能量守恒定律

下面我们公设带有交叉项的更为普遍的全局能量守恒定律如下:

$$\int_V \rho[\dot{\varepsilon} + \dot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{v} + (\dot{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{p}\times\dot{\boldsymbol{v}})\cdot\boldsymbol{r}]\,\mathrm{d}v = \oint_A [\boldsymbol{t}_{(n)}\cdot\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{m}_{(n)} + \boldsymbol{p}\times\boldsymbol{t}_{(n)})\cdot\boldsymbol{r}]\,\mathrm{d}a + \int_V \rho[\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{l} + \boldsymbol{p}\times\boldsymbol{f})\cdot\boldsymbol{r}]\,\mathrm{d}v + \oint_A \boldsymbol{q}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a} + \int_V \rho h\,\mathrm{d}v. \tag{5a**}$$

这里第一个和第二个以及第三个交叉项的物理意义分别表示由于动量引起的动量矩所产生的附加能率和由于面力引起的面矩在面上以及由于体力引起的体矩在体内所产生的附加功率。所列出的这三项是针对传统的全局能量守恒定律的不完整性而提出来的。从(5a)**我们即可直接推导出下式:

$$\int_V [t_{kl}v_{l,k} + (m_{kl} + \varepsilon_{lmn}x_m t_{kn})r_{l,k} + q_{k,k} + \rho h - \rho\dot{\varepsilon}]\,\mathrm{d}v + \int_V [\rho(f_l - \dot{v}_l) + t_{kl,k}]v_l\,\mathrm{d}v + \int_V \Big\{[\rho(l_l - \dot{\sigma}_l) + m_{kl,k} + \varepsilon_{lmn}t_{mn}] + \varepsilon_{lmn}x_m[\rho(f_n - \dot{v}_n) + t_{kn,k}]\Big\} r_l\,\mathrm{d}v = 0. \tag{b$_4^{**}$}$$

由上式可见,动量均衡方程和动量矩均衡方程均寓于能量定恒定律之中。

B. 局部能量均衡方程

由(b)$_4^{**}$,利用广义的 Piola 定理可以推导出动量均衡方程、动量矩均衡方程和更为普遍的能量均衡方程如下:

$$\rho(f_l - \dot{v}_l) + t_{kl,k} = 0, \tag{3b}$$

$$\rho(l_l - \dot{\sigma}_l) + m_{kl,k} + \varepsilon_{lmn}t_{mn} = 0. \tag{4b}$$

$$\rho\dot{\varepsilon} = t_{kl}v_{l,k} + (m_{kl} + \varepsilon_{lmn}x_m t_{kn})r_{l,k} + q_{k,k} + \rho h. \tag{5b**}$$

注意(5b)**与传统的能量守恒方程(5b)

$$\rho\dot{\varepsilon} = t_{kl}(v_{l,k} - \varepsilon_{klm}r_m) + m_{kl}r_{l,k} + q_{k,k} + \rho h \tag{5b}$$

存在着本质的差异。

C. 非局部能量守恒方程

由(b)$_4^{**}$进行局部化即可很自然地写出非局部能量守恒方程

$$\rho\dot{\varepsilon} = t_{kl}v_{k,k} + (m_{kl} + \varepsilon_{lmn}x_m t_{kn})r_{l,k} + q_{k,k} + \rho h - \rho[\hat{f}_l + (\hat{l}_l - \varepsilon_{lmn}x_m\hat{f}_n)]. \tag{5c**}$$

这也与传统的结果(5c)存在着与局部情形同样的本质差异。

下面我们将扩充文献[4]中提出的反证方法的思路来反求全局能量守恒定律(5a)**和局部能量均衡方程(5b)**,但这里并不像[4]那样需要事先假定线性本构方程和均匀物质等限制条件。

把(3b)和(4b)分别写成下列形式

$$\rho\dot{v}_l = t_{kl,k} + \rho f_l, \tag{3b}$$

$$\rho\dot{\sigma}_l = m_{kl,k} + \varepsilon_{lmn}t_{mn} + \rho l_l. \tag{4b}$$

在文献[4]中,将(3b)等号两侧均乘以 v_l 与将(4b)等号两侧均乘以 r_l 相加后进行积分,再

利用线性本构方程，则可得到(5b)•

为了考虑前述附加的能率和功率的影响，我们取

$$\int_V \rho \dot{v}_l v_l \,\mathrm{d}v = \int_V (t_{kl,k} + \rho f_l) v_l \,\mathrm{d}v, \tag{c$_1$}$$

$$\int_V \rho\, \varepsilon_{lmn} x_m \dot{v}_n r_l \,\mathrm{d}v = \int_V \varepsilon_{lmn} x_m (t_{kn,k} + \rho f_n) r_l \,\mathrm{d}v, \tag{c$_2$}$$

$$\int_V \rho\, \dot{\sigma}_l r_l \,\mathrm{d}v = \int_V (m_{kl,k} + \varepsilon_{lmn} t_{mn} + \rho l_l) r_l \,\mathrm{d}v \bullet \tag{c$_3$}$$

将上列三式相加，并加以整理后可得

$$\int_V \rho[\dot{v}_l v_l + (\dot{\sigma}_l + \varepsilon_{lmn} x_m \dot{v}_n) r_l] \,\mathrm{d}v = \int_V [t_{kl,k} v_l + (m_{kl,k} + \varepsilon_{lmn} t_{mn} + \varepsilon_{lmn} x_m t_{kn,k}) r_l] \,\mathrm{d}v + \int \rho[f_l v_l + (l_l + \varepsilon_{lmn} x_m f_n) r_l] \,\mathrm{d}v \bullet \tag{c$_4$}$$

考虑到

$$\begin{aligned}
&\int_V [t_{kl,k} v_l + (m_{kl,k} + \varepsilon_{lmn} t_{mn} + \varepsilon_{lmn} x_m t_{kn,k}) r_l] \,\mathrm{d}v = \\
&\int_V \Big\{ [t_{kl} v_l + (m_{kl} + \varepsilon_{lmn} x_m t_{kn}) r_l]_{,k} - [t_{kl} v_{l,k} + (m_{kl} + \varepsilon_{lmn} x_m t_{kn}) r_{l,k}] \Big\} dv = \\
&\oint_A [t_{kl} v_l + (m_{kl} + \varepsilon_{lmn} x_m t_{kn}) r_{l,k}] \,\mathrm{d}a_k - \\
&\int_V [t_{kl} v_{l,k} + (m_{kl} + \varepsilon_{lmn} x_m t_{kn}) r_{l,k}] \,\mathrm{d}v \bullet
\end{aligned} \tag{c$_5$}$$

把(c)$_5$ 代回(c)$_4$，则得

$$\begin{aligned}
&\int_V \Big\{ [t_{kl} v_{l,k} + (m_{kl} + \varepsilon_{lmn} x_m t_{kn}) r_{l,k}] + \rho[\dot{v}_l v_l + (\dot{\sigma}_l + \varepsilon_{lmn} x_m \dot{v}_n) r_l] \Big\} \,\mathrm{d}v = \\
&\oint_A [t_{kl} v_l + (m_{kl} + \varepsilon_{lmn} x_m t_{kn}) r_l] \,\mathrm{d}a_k + \\
&\int_V \rho[f_l v_l + (l_l + \varepsilon_{lmn} x_m f_n) r_l] \,\mathrm{d}v \bullet
\end{aligned} \tag{c$_6$}$$

根据能量守恒定律的原意可知，应变能的时间变化率 $\rho \dot{e}$ 应为

$$\rho \dot{e} = t_{kl} v_{l,k} + (m_{kl} + \varepsilon_{lmn} x_m t_{kn}) r_{l,k} \bullet \tag{d}$$

这与(5a)** 完全一致•

2.6 熵不等式

A. 全局熵不等式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_V \rho\eta \,\mathrm{d}v = \oint_A \boldsymbol{S} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} + \int_V \frac{\rho\eta}{\theta} \mathrm{d}v \geqslant 0 \bullet \tag{6a}$$

B. 局部熵不等式

$$\rho\dot{\eta} - S_{k,k} - \rho h/\theta \geqslant 0 \bullet \tag{6b}$$

C. 非局部熵不等式

$$\rho\dot{\eta} - S_{k,k} - \rho b - \rho \hat{b} \geqslant 0 \bullet \tag{6c}$$

2.7 Clausius_Duhem 不等式

A. 局部 C_D 不等式

引进绝对温度 θ, 自由能量 Ψ 和自由熵通量 $\boldsymbol{p}$ 如下:

$$b = h/\theta,\quad \Psi = \varepsilon - \theta\eta,\quad \boldsymbol{p} = (\boldsymbol{q}/\theta) - \boldsymbol{S}.$$

于是在(5b)** 和(6b) 之间消去 h, 则得更为普遍的局部 C_D 不等式

$$-\frac{\rho}{\theta}(\dot{\Psi} + \eta\dot{\theta}) + \frac{1}{\theta}[t_{kl}v_{l,k} + (m_{kl} + \varepsilon_{lmn}x_m t_{kn})r_{l,k}] + p_{l,l} + \frac{1}{\theta^2}q_l\theta_{,l} \geqslant 0. \tag{7a**}$$

B. 非局部 C_D 不等式

在(5c)** 和(6c) 之间消去 h, 则得更为普遍的非局部 C_D 不等式

$$-\frac{\rho}{\theta}(\dot{\Psi} + \eta\dot{\theta}) + \frac{1}{\theta}[t_{kl}v_{l,k} + (m_{kl} + \varepsilon_{lmn}x_m t_{kn})r_{l,k}] + p_{l,l} + \frac{1}{\theta^2}q_l\theta_{,l} -$$
$$\frac{\rho}{\theta}[\hat{f}_l v_l + (\hat{l}_l - \varepsilon_{lmn}x_m\hat{f}_n)r_l] + \frac{\rho}{\theta}\hat{h} + \rho\hat{b} \geqslant 0. \tag{7b**}$$

我们已经系统地给出微极连续统力学的更为普遍的基本定律, 均衡方程和 C_D 不等式.

下面我们直接给出微态连续统力学的更为普遍的全局能量守恒定律以及运动方程和能量均衡方程的结果, 不另详作说明.

3 微态连续统

3.1 全局能量守恒定律

我们公设微态连续统的带有交叉项的更为普遍的全局能量守恒定律如下:

$$\int_V \rho[\dot{\varepsilon} + \dot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{v} + \dot{\boldsymbol{R}}:\Omega + (\boldsymbol{p}\times\dot{\boldsymbol{v}})\cdot\boldsymbol{r} - h]\mathrm{d}v =$$
$$\oint_A[\boldsymbol{t}_{(\boldsymbol{n})}\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{C}_{(\boldsymbol{n})}:\Omega + (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{t}_{(\boldsymbol{n})})\cdot\boldsymbol{r} + \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}]\mathrm{d}a +$$
$$\int_V \rho[\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{L}:\Omega + (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{f})\cdot\boldsymbol{r}]\mathrm{d}v. \tag{8a**}$$

式中 $\boldsymbol{C}_{(\boldsymbol{n})} = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{T}$, 而 $\boldsymbol{L} = L_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$, $\boldsymbol{R} = R_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$, $\Omega = \Omega_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$ 和 $\boldsymbol{T} = T_{ijk}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k$ 分别为体力矩密度, 自旋张量, 回转张量和应力矩张量.

进行与微极连续统情形类似的运算, 即可分别得到局部和非局部情形的结果.

3.2 局部情形

A. 动量均衡方程

$$\rho(f_k - \dot{v}_k) + t_{ij,j} = 0. \tag{9a}$$

B. 动量矩均衡方程

$$\rho(L_{jk} - \dot{R}_{jk}) + T_{ijk,i} + t_{kj} = s_{kj}. \tag{9b}$$

C. 能量均衡方恒

$$\rho\dot{\varepsilon} = t_{ij}v_{j,i} + (T_{ijk} - t_{ij}x_k)\Omega_{jk,i} + q_{k,k} + \rho h. \tag{9c**}$$

这里的动量和动量矩均衡方程与 Eringen[5] 的结果相同, 但能量均衡方程(9c)** 则与其相应的结果之间存在本质的差异.

3.3 非局部情形

A. 动量均衡方程

$$\rho(f_k - \dot{v}_k) + t_{jk,j} = -\rho\hat{f}_k. \tag{10a}$$

B. 动量矩均衡方程

$$\rho(L_{jk} - \dot{R}_{jk}) + T_{ijk,i} + t_{kj} - s_{kj} = -\rho(\hat{L}_{jk} - x_j\hat{f}_k). \tag{10b}$$

C. 能量均衡方程

$$\rho\dot{\varepsilon} = t_{ij}v_{j,i} + (T_{ijk} - t_{ij}x_k)\Omega_{jk,i} + q_{k,k} + \rho h - \rho\hat{f}_k v_k - \rho(\hat{L}_{jk} - x\hat{f}_k)\Omega_{jk}. \qquad (10c)^{**}$$

这里要求

$$\int_V \rho\hat{f}_k \mathrm{d}v = 0, \quad \int_V \rho\hat{L}_{jk}\mathrm{d}v = 0.$$

4 结 束 语

(1) 本文公设的更为普遍的能量守恒定律应与从虚功原理推导出的能量能率定理等价. 这里又利用反证法进一步证实我们提出的新的能量守恒定律较之传统的更为普遍.

(2) 本文以微极和微态连续统做为带有微结构的连续统典型进行了论述.

(3) 本文与前文[1]一起, 对不带和带有微结构的连续统的基本定律、均衡方程和 C_D 不等式进行了较为全面而又系统的再研究, 指出了它们的不完整性, 并提出了更为普遍的新的能量守恒定律和 C_D 不等式.

[参 考 文 献]

[1] 戴天民. 不带微结构的连续统中新的能量守恒定律和 C_D 不等式[J]. 应用数学和力学, 2001, **22**(2): 111—118

[2] A C 爱林根, C B 卡法达. 微极场论[M]. 戴天民 译. 南京: 江苏科学技术出版社, 1982.

[3] A C 爱林根. 非局部微极场论[M]. 戴天民 译. 南京: 江苏科学技术出版社, 1982.

[4] Wang J, Dhaliwa R S. On some theorems in the nonlocal theory of micropolar elasticity[J]. Int J Solids Structures, 1993, **30**(10): 1331—1338.

[5] Eringen A C. Balance laws of micromorphic continua revisited[J]. Int J Engng Sci, 1992, **30**(6): 805—810.

New Conservation Laws of Energy and C_D Inequalities in Continua With Microstructure

DAI Tian_min

(Center for the Application of Mathematics & Department of Mathematics, Liaoning University, Shenyang 110036, P R China)

Abstract: Existing fundamental laws, balance equations and Clausius_Duhem inequalities in continua with microstructure are systematically restudied, and the incomplete formulations of conservation laws of energy and related C_D inequalities are pointed out. Some remarks on existing results are made, and new conservation laws of energy and related C_D inequalities are presented.

Key words: continua with microstructure; new conservation laws of energy; new C_D inequalities