

文章编号: 1000_0887(2001) 02_0135_05

层内混杂复合材料应力集中问题的研究^{*}

曾庆敦, 黄小清, 林雪慧

(华南理工大学 交通学院, 广州 510640)

(本刊编委黄小清来稿)

摘要: 提出了一种合理、简便、精确的修正的剪滞模型。基于此模型, 分析了受拉伸的层内混杂复合材料中某些纤维断裂后的应力重分布。结果表明, 求得的应力集中因子与 Fukuda 和 Chou 的结果相当接近, 从而证实了本文模型和方法的合理性和正确性。

关键词: 层内混杂复合材料; 剪滞分析; 应力集中

中图分类号: O346.1 文献标识码: A

引 言

混杂复合材料是指两种或两种以上的纤维为增强相的复合材料。此类材料与单一纤维复合材料相比具有许多优点, 现已广泛应用于航空航天、交通运输、建筑、体育器械等许多领域。为了能够充分开发和利用混杂复合材料的潜在性能, 正确地进行材料设计, 首先应该了解混杂复合材料的破坏机理及其影响因素。混杂复合材料由于增强相的增多及具有协同效应, 其破坏机理比单一纤维复合材料复杂得多, 与组分、界面、随机缺陷及混杂形式等密切相关, 尚无确切的力学模型和相应的协同律。单向混杂复合材料的纵向拉伸, 其破坏多始于“最弱”的低延伸率的纤维。当一条或数条纤维断裂而形成裂纹后, 在其周围将产生局部应力扰动(应力集中), 这些应力集中将导致纤维的进一步断裂而使复合材料发生破坏, 是揭示混杂复合材料破坏机理的重要参数。Zweben^[1]首次采用剪滞理论研究了高、低模量纤维交替排列的层内混杂复合材料的应力重分布问题, 由于他采用的剪滞模型近似程度较差, 未能给出好的结果。Fukuda 和 Chou^[2]采用精确的剪滞理论研究了同一问题, 但其方法不能用来研究具有纤维/基体界面破坏时的应力重分布。对此, 本文基于剪滞理论, 提出了一种修正的剪滞分析模型, 简便精确地计算了层内混杂复合材料在不同的断裂模式下的应力重分布问题。本文模型不仅可以获得与文献[2]相当接近的结果, 而且便于推广到计及基体及界面破坏的应力重分布问题的研究中。

1 剪滞分析模型

考虑如图 1(a)所示的高模量(HM)和低模量(LM)纤维交替相间均匀排列的二维层内混杂

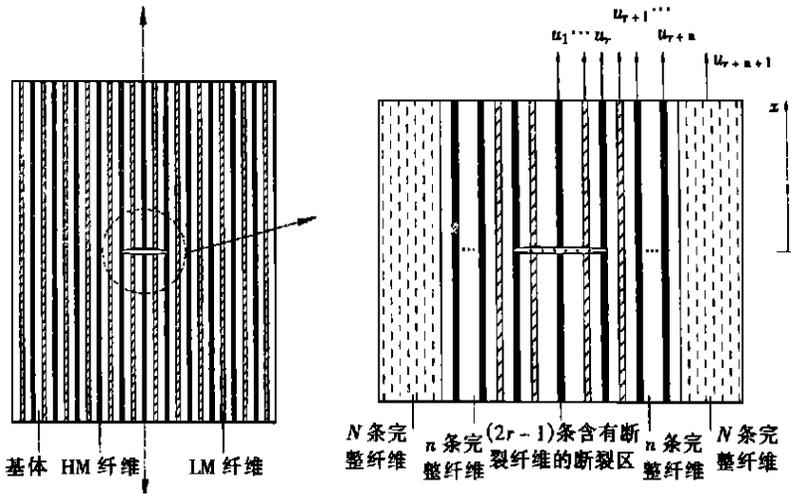
* 收稿日期: 2000_03_21

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19902004); 广东省自然科学基金资助项目

作者简介: 曾庆敦(1956—), 男, 广东兴宁人, 教授;

黄小清(1945—), 女, 广东梅县人, 教授。

复合材料, 沿纤维方向受拉伸荷载作用。随着荷载的增加, 某些纤维将发生逐步断裂(HM 纤维通常先发生断裂), 由此引起断口附近的局部应力重分布。为求解这一问题, 现从层内混杂复合材料中对称地取出一个如图 1(b) 所示的剪滞分析模型, 根据剪滞理论, 考虑纤维承受拉力, 基体仅传递剪力^[1, 2]。此模型共含有 $(2r - 1 + 2n + 2N)$ 条纤维。将这些纤维由里向外进行分组。第一组为 r 条 HM 纤维(含有 $r_1 = r$ 条已断裂的 HM 纤维)和 $(r - 1)$ 条 LM 纤维(含有 $r_2 \leq r - 1$ 条已断裂的 LM 纤维), 构成了断裂区。考虑对称性, 断裂区中的纤维的轴向位移设为 u_1, u_2, \dots, u_r 。第二组为紧邻断裂区的以一条 LM 纤维开始的 $2n$ 条完整纤维, 其位移用 $u_{r+1}, u_{r+2}, \dots, u_{r+n}$ 表示。余下的 $2N$ 条纤维则为第三组(其中分别有 $2s_1, 2s_2$ 条 HM 和 LM 纤维, 且 $N = s_1 + s_2$)。参照文献[1, 3] 的假定, 这组纤维和基体中的剪应变忽略不计, 各纤维位移均相同, 构成了均匀应变区, 其位移用 u_{r+n+1} 表示。 n 和 N 值视断裂区中的断裂纤维数而定, 而确定了 n 和 N 值后自然可得 s_1 和 s_2 值。



(a) 含断裂纤维的受拉伸的混杂复合材料 (b) 剪滞模型

图 1

设 E, A 和 E^*, A^* 分别表示 HM 和 LM 纤维的弹性模量与横截面积, d 为纤维间距, G 为基体剪切模量, 单层的厚度为 h 。位移 $u_i (i = 1, 2, \dots, r + n + 1)$ 仅是纵向坐标 x 的函数。为了简化计算, N 条完整纤维的外边界面上的剪应力假定为零, 因为此处已远离断裂区, 几乎不受应力扰动了^[3]。

据前述分析, 由对称性列出第一、二组中各纤维微段及第三组微段的剪滞平衡方程为

$$\left. \begin{aligned} E_1 A_1 \frac{d^2 u_1}{dx^2} + 2Gh(u_2 - u_1)/d &= 0, \\ E_i A_i \frac{d^2 u_i}{dx^2} + Gh(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})/d &= 0 \quad (i = 2, 3, \dots, r + n), \\ (s_1 EA + s_2 E^* A^*) \frac{d^2 u_{r+n+1}}{dx^2} + Gh(u_{r+n} - u_{r+n+1})/d &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

注意到由于 HM 纤维和 LM 纤维交替排列, 当 r 为奇数时, $E_1 A_1 = EA$, 当 r 为偶数时, $E_1 A_1 = E^* A^*$ 。在线弹性条件下, 力与位移的关系为 $p_i(x) = EA_i (du_i/dx)$ 。

设 HM 纤维的远场拉力为 p , 则剪滞模型的边界条件为

$$\left. \begin{aligned} p_i(\infty) &= p, & \text{对所有 HM 纤维;} & p_i(\infty) = (E^* A^* / EA)p, & \text{对所有 LM 纤维;} \\ p_i(0) &= 0, & \text{对所有已断纤维;} & u_i(0) = 0, & \text{对所有完整纤维.} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

为了便于求解方程, 需引入下述无量纲量

$$\left. \begin{aligned} p_i &= p \cdot P_i, & EA_i/EA &= R_i, & E^* A^* / EA &= R, \\ u_i &= p \sqrt{d/EA} U_i, & x &= \sqrt{EA} d / Gh \xi, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中, P_i 、 U_i 和 ξ 分别为 p_i 、 u_i 和 x 的无量纲量。

将式(3)代入式(1)中得无量纲量的剪滞平衡方程

$$\left. \begin{aligned} R_1 \frac{d^2 U_1}{d\xi^2} + 2(U_2 - U_1) &= 0, \\ R_i \frac{d^2 U_i}{d\xi^2} + (U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}) &= 0 \quad (i = 2, 3, \dots, r+n), \\ (s_1 + s_2 R) \frac{d^2 U_{r+n+1}}{d\xi^2} + (U_{r+n} - U_{r+n+1}) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中, 当 $EA_i = E^* A^*$ 时, $R_i = R$; 当 $EA_i = EA$ 时, $R_i = 1$ 。将式(3)代入式(2)得无量纲的边界条件

$$\left. \begin{aligned} P_i(\infty) &= 1, & \text{对所有 HM 纤维;} & P_i(\infty) = R, & \text{对所有 LM 纤维;} \\ P_i(0) &= 0, & \text{对所有已断纤维;} & U_i(0) = 0, & \text{对所有完整纤维.} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

2 剪滞平衡方程的求解

代入边界条件式(5)的第一式, 方程式(4)中的 U_i 的一般解为

$$U_i = \xi + \sum_{j=1}^{r+n+1} A_j B_{i,j} \exp(-\mu_j \xi), \quad (6)$$

式中, A_j 为待定常数; μ_j^2 为矩阵 T 的特征值, 而矩阵 T 由式(4)得到

$$T = \begin{bmatrix} 2/R_1 & -2/R_1 & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & & \\ & & -1/R_i & 2/R_i & -1/R_i \\ & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & -1/R_{r+n+1} & 1/R_{r+n+1} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

式中, $R_{r+n+1} = s_1 + s_2 R$, $B_{i,j}$ 为已知常数, 由下式给出

$$\left. \begin{aligned} B_{1,j} &= 1 \quad (j = 1, 2, \dots, r+n+1), \\ B_{2,j} &= B_{1,j}(1 - R_{1,j} \mu_j^2 / 2) \quad (j = 1, 2, \dots, r+n+1), \\ B_{i,j} &= B_{i-1,j}(2 - R_{i-1,j} \mu_j^2) - B_{i-2,j} \\ &\quad (j = 1, 2, \dots, r+n+1; i = 3, 4, \dots, r+n+1). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

将式(6)代入边界条件式(5)的第二式, 得

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^{r+n+1} A_j B_{i,j} \mu_j &= 1, & \text{对于所有已断纤维,} \\ \sum_{j=1}^{r+n+1} A_j B_{i,j} &= 0, & \text{对于所有完整纤维.} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

由式(9)可求出待定常数 A_j , 将 A_j 代回式(6)即得位移。在 $\xi = 0$ 处的拉伸应力集中因子

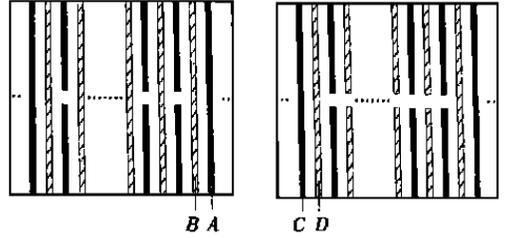
则由下式求得

$$K(i) = \left. \frac{dU_i}{d\xi} \right|_{\xi=0} = 1 - \sum_{j=1}^{r+m-1} A_j B_{i,j} \xi^j, \quad \text{对于所有完整纤维} \quad (10)$$

3 算例与结果分析

对于任一给定的HM纤维断裂数 r_1 和LM纤维断裂数 r_2 ，通过试算，可选取 n 及 N 值。本文考虑如图2所示的两种纤维断裂情况。图中，

(a) $r_1 = r, r_2 = 0$; (b) $r_1 = r, r_2 = r - 1$ 。取 $R = 1/3$ ，这接近于碳/玻璃纤维的刚度比。表1和表2给出了所选取的最佳 n, N 值及由此算得的应力集中因子。作为比较，表中亦列出了文[2]的结果。从表中可见，对于(a)情况，取 $n = r + 3$ 至 4, $N = r + 5$ 至 6; 对于(b)情况(当 $r = 1$ 时，是特例，归于(a)情况)，取 $n = r + 5$ 至 6, $N = r + 8$ 至 10，可以获得与Fukuda和Chou理论^[2]相当接近的结果，对于更一般的情况也同理可选得最佳的 n 和 N 。从表中可以看出 n 值都较小，因而解方程的计算量不大，而且这种模型也适用于层内混杂复合材料的一般断裂形式，可推广于计及纤维/基体界面破坏模式的应力重分布问题的研究。通过比较可知，本文提出的剪滞模型是合理和正确的，建立模型时所作的假设和简化也是合理的。



(a) $r_1 = r, r_2 = 0$ (b) $r_1 = r, r_2 = r - 1$

图2 纤维断裂的两种形式

表1 本文估计的纤维应力集中因子与文献[2]结果的比较(情况(a))

断裂纤维数	碳	r_1	1	2	3	4	5	6	7
	玻璃	r_2	0	0	0	0	0	0	0
完整纤维数	n		4	5	6	8	9	10	11
	N		6	7	8	10	10	11	12
应力集中系数 K	K_A	本文	1.121 9	1.171 4	1.199 0	1.216 0	1.228 2	1.236 0	1.239 7
		文[2]	1.121	1.172	1.199	1.216	1.228	1.236	1.240
	K_B	本文	1.779 8	1.954 4	2.032 2	2.072 3	2.100 2	2.118 0	2.127 5
		文[2]	1.777	1.952	2.029	2.070	2.096	2.114	2.126

表2 本文估计的纤维应力集中因子与文献[2]结果的比较(情况(b))

断裂纤维数	碳	r_1	1	2	3	4	5	6	7
	玻璃	r_2	0	1	2	3	4	5	6
完整纤维数	n		4	7	8	10	11	12	13
	N		6	10	12	14	14	15	16
应力集中系数 K	K_C	本文	1.121 9	1.291 9	1.447 7	1.592 7	1.729 9	1.857 3	1.971 1
		文[2]	1.121	1.291	1.448	1.593	1.728	1.852	1.968
	K_D	本文	1.779 8	2.515 4	3.078 3	3.554 7	3.984 4	4.373 1	4.718 3
		文[2]	1.777	2.511	3.075	3.550	3.970	4.348	4.696

4 结 语

本文基于剪滞理论,建立了一种修正的剪滞分析模型,并分析了层内混杂复合材料的应力重分布,通过试算选取合适的断裂区中的完整纤维数 n 及均匀应变区中的纤维数 N ,可以获得相当精确的结果。由于此模型简便、精确,故可进一步用来研究层内混杂复合材料中具有纤维/基体界面破坏时的应力重分布及其破坏机理,有关进一步的研究将另文发表。

[参 考 文 献]

- [1] Zweben C. Tensile strength of hybrid composites[J]. J Mater Sci, 1977, 12(8): 1325—1337.
- [2] Fukuda H, Chou T W. Stress concentrations in a hybrid composite Sheef[J]. Trans ASME, J Appl Mech, 1983, 50(4a): 845—848.
- [3] Ling L, Zeng Q D. Analysis of stress concentrations in unidirectional composites taking into account the tensile load in the matrix[J]. Acta Mech Solida Sinica, 1998, 11(4): 318—328.

Study on Stress Concentrations in an Intraply Hybrid Composite Sheet

ZENG Qing_dun, HUANG Xiao_qing, LIN Xue_hui

(College of Traffic and Communications, South China University of Technology, Guangzhou 510640, P R China)

Abstract: A reasonably, simply and accurately modified shear_lag model was proposed. Based on the model, the stress redistributions due to the failure of some fibers in an intraply hybrid composite under tension were analyzed. The results show that the present calculating stress concentration factors very coincide with Fukuda and Chou's results, thus verifying the reasonableness and correctness of the present model and methods.

Key words: intraply hybrid composite; shear_lag analysis; stress concentration factor