应用数学和力学, 第 22 卷 第 2 期(2001 年 2 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2001) 02_0157_10

非自治的 Schrödinger 方程的吸引子*

刘玉荣[1,3], 刘曾荣[2], 郑永爱[2,3]

(1. 苏州大学 数学系, 苏州 215006; 2. 上海大学 数学系, 上海 200436;
3. 扬州大学 数学系, 扬州 225002)

(我刊编委刘曾荣来稿)

摘要: 研究 2 维的非自治非线性 Schrödinger 方程长时间的动力学行为• 证明了一致吸引子的存在性, 并给出了该一致吸引子 Hausdorff 维数的上界•

关 键 词: 非自治 NLS 方程; 一致吸引子; Hausdorff 维数
中图分类号: O175.24 文献标识码: A

引 言

非自治演化方程的吸引子已被广泛研究(见[1], [2], [3], [4]等及相应的参考文献), 但非自治的无穷维动力系统却了解得很少• 1994 年, Chepyzhov 和 Vishik[5] 提出了研究非自治的无穷维动力系统的一个较简单的方法, 该方法非常适合于研究出现在数学物理中的演化方程• 作者讨论了非自治的 Navier_Stoks 方程, 非自治的反应扩散方程以及非自治耗散的双曲方程的一致吸引子• 在[6]中, 作者进一步研究了非齐次非自治的 Navier_Stoks 方程的吸引子•

本文研究下列 2 维的 Schrödinger 方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t}-(\lambda+\mathrm{i}\alpha)\Delta u+(k+\mathrm{i}\beta)|u|^2u-\gamma u=f, \tag{1}$$

$$u=0, \qquad \Gamma\times\mathbf{R}_+ \text{ 上}, \tag{2}$$

$$u(x,\tau)=u_\tau(x), \qquad x\in\Omega• \tag{3}$$

这里 $\lambda, \alpha, \beta, \gamma, k\in\mathbf{R}$, $\lambda>0$, $k>0$, $x=(x_1,x_2)\in\Omega\subset\mathbf{R}^2$, Γ 是 Ω 的边界, $u, f(t)=f(x,t)$ 是满足一定条件的复值函数• 我们将证明该方程一致吸引子的存在性, 并给出它的维数估计•

1 预备知识

我们首先引进复的 Sobolev 空间• 我们用 $X, Y, \dots$, 表示函数空间 $X, Y, \dots$ 的复化空间, 用 $(\cdot,\cdot)$ 和 $|\cdot|_{L^2(\Omega)}$ 分别表示 $L^2(\Omega)$ 或 $L^2(\Omega)$ 的内积和范数, 用 $|\cdot|$, $\|\cdot\|$ 分别表示 $H_0^1(\Omega)$ 或 $H_0^1(\Omega)$ 的内积和范数• 因此对 $u=u_1+\mathrm{i}u_2$, $v=v_1+\mathrm{i}v_2$, 如果 $u, v\in L^2(\Omega)$, 则

* 收稿日期: 2000_01_28; 修订日期: 2000_09_19
作者简介: 刘玉荣(1964—), 男, 江苏扬州人, 讲师, 硕士(在读博士);
刘曾荣(1943—), 男, 上海人, 教授, 硕士, 博士导师.

$$(u,v)=\{(u_1,v_1)+(u_2,v_2)\}+i\{(u_2,v_2)-(u_1,v_2)\},$$
$$|u|_{L^2}=\{(u,u)\}^{1/2}=\{|u_1|_{L^2}^2+|u_2|_{L^2}^2\};$$

如果 $u,v\in H_0^1(\Omega)$, 则

$$((u,v))=\sum_{i=1}^{n}(D_iu,D_iv),\quad \|u\|=\{((u,u))\}^{1/2}.$$

对(1)~(3)的数学背景,我们选

$$H=L^2(\Omega),\quad V=H_0^1(\Omega),$$
$$D(A)=H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega),\qquad \text{这里 } Au=-\Delta u.$$

现在回顾一下下面要用到的一些定义和结果[5]. 考虑一个 Banach 空间 E 和 E 上的双参数算子族:

$$U(t,\tau):E\to E,\qquad t\geqslant\tau,\ \tau\in\mathbf{R}.$$

定义 1.1 E 上的一个双参数算子族 $U(t,\tau)$ 称为一个发展系统(参见[7]), 如果下列两个条件成立:

1) $U(\tau,\tau)=I$ (单位算子);

2) $U(t,s)\circ U(s,\tau)=U(t,\tau),\quad \forall t\geqslant s\geqslant\tau,\ \tau\in\mathbf{R}.$

我们考虑一族依赖于某个泛函参数 $\sigma\in\Sigma$ 的发展系统 $U_\sigma(t,\tau)$. 其中集合 Σ 称为符号空间, 假定它为完备的度量空间. 我们用 $\mathscr{B}(E)$ 表示 E 中所有有界集合的全体.

定义 1.2 一族发展系统 $\{U_\sigma(t,\tau)\}$, $\sigma\in\Sigma$ 称为一致有界(关于 $\sigma\in\Sigma$), 如果对任意的 $B\in\mathscr{B}(E)$, 有 $\bigcup_{\sigma\in\Sigma}\bigcup_{\tau\in\mathbf{R}}\bigcup_{t\geqslant\tau}U_\sigma(t,\tau)B\in\mathscr{B}$.

定义 1.3 称一个集合 $B_0\subset E$ 对一族发展系统 $\{U_\sigma(t,\tau)\}$, $\sigma\in\Sigma$ 是一致吸收的(关于 $\sigma\in\Sigma$), 如果对任何 $\tau\in\mathbf{R}$ 和任何 $B\in\mathscr{B}$ 都存在一个 $T=T(\tau,B)$, 使得 $\bigcup_{\sigma\in\Sigma}U_\sigma(t,\tau)\subset B_0$, $\forall t\geqslant T$.

定义 1.4 称一个集合 $P\subset E$ 对一族发展系统 $\{U_\sigma(t,\tau)\}$, $\sigma\in\Sigma$ 是一致吸引的(关于 $\sigma\in\Sigma$), 如果

$$\lim_{t\to+\infty}\sup_{\sigma\in\Sigma}\mathrm{dist}_E(U_\sigma(t,\tau)B,P)=0,\qquad \forall\tau\in\mathbf{R},\ B\in\mathscr{B}(E).$$

一族具有一个一致紧吸收集的发展系统被称为是一致紧的; 一族具有一个一致紧吸引集的发展系统被称为是一致渐近紧的. 显然, 一族一致紧的发展系统一定是一致渐近紧的.

定义 1.5 一个闭集 $\mathscr{A}_\Sigma\in E$ 被称为是一族发展系统的一致吸引子(关于 $\sigma\in\Sigma$), 如果它是一致吸引的, 且被包含在该发展系统的任一闭的一致吸引集合 $\mathscr{A}'$ 中(最小性).

命题 1.6(见[5]) 设空间 E 上的一族发展系统 $\{U_\sigma(t,\tau)\}$, $\sigma\in\Sigma$ 是一致(关于 $\sigma\in\Sigma$) 渐近紧的, 且 $(E\times\Sigma,E)$_连续. 又设 Σ 是紧的度量空间, $\{T(t)\}$ 是 Σ 上的一个连续不变半群 $(T(t)\Sigma=\Sigma)$, 满足

$$U_\sigma(t+s,\tau+s)=U_{T(s)\sigma}(t,\tau),\qquad \forall\sigma\in\Sigma,\ t\geqslant\tau,\ \tau\in\mathbf{R},\ s\geqslant 0.$$

则, 对应于这族发展系统 $\{U_\Sigma(t,\tau)\}$, $\sigma\in\Sigma$ 且作用在 $E\times\Sigma$ 上的半群 $\{S(t)\}$ 存在一个紧吸引子 $\mathscr{A}$, $\mathscr{A}$ 关于 $\{S(t)\}$ 是严格不变的: $S(t)\mathscr{A}=\mathscr{A}$, $\forall t\geqslant 0$. 进一步有:

(a) $\mathscr{A}_\Sigma=\Pi_1\mathscr{A}$ 是这族发展系统的一致吸引子;

(b) $\Pi_2\mathscr{A}=\Sigma$;

(c) $\mathscr{A}=\bigcup_{\sigma\in\Sigma}\mathscr{K}_\sigma(0)\times\{\sigma\}$;

(d) $\mathscr{A}_\Sigma=\bigcup_{\sigma\in\Sigma}\mathscr{K}_\sigma(0)$;

这里 Π_1 和 Π_2 分别表示从 $E\times\Sigma$ 到 E 和 Σ 的投影•

2 定理与证明

定理 2.1 设 $f(t)=f(\cdot,t)\in C_b(\mathbf{R},H)$• 则方程(1)~(3)存在唯一的解 u, 使

$$u\in C_b([\tau,+\infty),H)\cap L_2((\tau,T),V)\qquad\forall T\geqslant\tau$$

$$u'=\frac{\partial}{\partial t}u(\cdot,t)\in L_2((\tau,T),V')•$$

该定理可以用类似于[3]中的方法加以证明, 我们在此略去证明•

2.1 能量估计

在方程(1)的两边和 u 取 H 的内积并考虑方程的实部, 我们获得

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega|u|^2\mathrm{d}x+\lambda\int_\Omega|\Delta u|^2\mathrm{d}x+k\int_\Omega|u|^4\mathrm{d}x-\gamma\int_\Omega|u|^2\mathrm{d}x=\mathrm{Re}\int_\Omega f\,u\mathrm{d}x,$$

即有

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}|u|_{L^2}^2+\lambda\|u\|^2+k|u|_{L^4}^4-\gamma|u|_{L^2}^2\leqslant|u|_{L^2}|f(t)|_{L^2},$$

或

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}|u|_{L^2}^2+\lambda\|u\|^2+k|u|_{L^4}^4-\gamma|u|_{L^2}^2\leqslant|u|_{L^2}|f(\cdot)|_{C_b(\mathbf{R},H)}•$$

这样, 我们有

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}|u|_{L^2}^2+\lambda\|u\|^2+k|u|_{L^4}^4-(\gamma+1)|u|_{L^2}^2\leqslant|f|_{C_b(\mathbf{R},H)}^2• \tag{4}$$

不失一般性, 我们能假定 $\gamma>0$• 则有

$$\frac{k}{2}s^4-2(\gamma+1)s^2\geqslant-\frac{2}{k}\gamma^2\qquad\forall s\in\mathbf{R}, \tag{5}$$

$$\frac{k}{2}\int_\Omega|u|^4\mathrm{d}x-2\gamma\int_\Omega|u|^2\mathrm{d}x\geqslant-\frac{2}{k}(\gamma+1)^2|\Omega|\qquad\forall u\in L^4(\Omega), \tag{6}$$

利用上面不等式, 从(4)得到

$$\frac{\partial}{\partial t}|u|_{L^2}^2+2\lambda\|u\|^2+k|u|_{L^4}^4+2(\gamma+1)|u|_{L^2}^2\leqslant$$
$$\frac{2(\gamma+1)^2}{k}|\Omega|+|f|_{C_b(\mathbf{R},H)}^2• \tag{7}$$

利用 Gronwall 引理得

$$|u(t)|_{L^2}^2\leqslant|u(\tau)|_{L^2}^2\exp(-2(\gamma+1)(t-\tau))+$$
$$\frac{1}{2(\gamma+1)}\left(\frac{2(\gamma+1)^2}{k}|\Omega|+|f|_{C_b(\mathbf{R},H)}^2\right)(1-\exp(-2\gamma(t-\tau)))\qquad\forall t\geqslant0, \tag{8}$$

$$\limsup_{t\to\infty}|u(t)|_{L^2}^2\leqslant\rho_0^2,\quad\rho_0^2=\frac{1}{2(\gamma+1)}\left(\frac{2(\gamma+1)^2}{k}|\Omega|+|f|_{C_b(\mathbf{R},H)}^2\right)• \tag{9}$$

令 $\rho_0'^2=2\rho_0^2$• 假如 B 是 H 中的一个有界集, B 被包含在 H 中以 0 为中心半径为 R 的某一个球 $B_H(0,R)$ 中, 那末当

$$t\geqslant\tau+\frac{1}{2(\gamma+1)}\lg\frac{R^2}{\rho_0^2}=\tau+\frac{1}{\gamma+1}\lg\frac{R}{\rho_0}=t_\tau(B,\rho_0'),$$

我们有

$$|u(t)|_{L^2}\leqslant\rho_0'=\sqrt{2}\rho_0• \tag{10}$$

在(7)中关于 t 从 t 到 $t+1$ 积分,并假定 $u_0\in B$, $t\geqslant t_\tau$, 其中 B、t_τ 如上所述,则我们有

$$2\lambda\int_t^{t+1}\|u(s)\|^2\mathrm{d}s+k\int_t^{t+1}|u(s)|_{L^4}^4\mathrm{d}s+2(\gamma+1)\int_t^{t+1}|u(s)|_{L^2}^2\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\rho_0'^2+\frac{2(\gamma+1)^2}{k}\Omega+|f|_{C_b(\mathbf{R},H)}^2\cdot \tag{11}$$

现在我们在(1)的两边同乘 $-\Delta u$, 在 Ω 上积分并取实部得

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|u\|^2+\lambda|\Delta u|_{L^2}^2-\gamma\|u\|^2=$$
$$\mathrm{Re}\left((k+\mathrm{i}\beta)\int_\Omega|u|^2u\Delta u\mathrm{d}x\right)-\int_\Omega f\Delta u\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\mathrm{Re}(k+\mathrm{i}\beta)\int_\Omega\nabla(|u|^2u)\nabla u\mathrm{d}x+|f|_{L^2}|\Delta u|_{L^2}\leqslant$$
$$3(k^2+\beta^2)^{1/2}\int_\Omega|u|^2|\nabla u|^2\mathrm{d}x+|f|_{C_b(\mathbf{R},H)}|\Delta u|_{L^2}=$$
$$I_1+I_2\cdot \tag{12}$$

用 Sobolev 嵌入和插值不等式,我们能得到

$$|\nabla u|_{L^4}\leqslant C_1\|u\|^{1/2}(|u|_{L^2}^2+|\Delta u|_{L^2}^2)^{1/4}, \tag{13}$$

这里 C_1 是一个仅依赖于 Ω 的常数. 这蕴涵(12)式中的 I_1 不超过

$$3C_1^2(k^2+\beta^2)^{1/2}|u|_{L^4}^2\|u\|(|u|_{L^2}^2+|\Delta u|_{L^2}^2)^{1/2}\leqslant$$
$$\frac{\lambda}{2}|\Delta u|_{L^2}^2+\frac{\lambda}{2}|\Delta u|_{L^2}^2+C_2|u|_{L^4}^4\|u\|^2,\quad C_2=\frac{9}{2\lambda}C_1^4(k^2+\beta^2)\cdot \tag{14}$$

又显然

$$I_2=|f|_{C_b(\mathbf{R},H)}|\Delta u|_{L^2}\leqslant\frac{\lambda}{4}|\Delta u|_{L^2}^2+\frac{1}{\lambda}|f|_{C_b(\mathbf{R},H)}^2\cdot \tag{15}$$

结合不等式(14)、(15)和(12),我们得到

$$\frac{\partial}{\partial t}\|u\|^2+\frac{\lambda}{2}|\Delta u|_{L^2}^2\leqslant 2(\gamma+C_2|u|_{L^4}^4)\|u\|^2+$$
$$\left(\lambda|u|_{L^2}^2+\frac{2}{\lambda}|f|_{C_b(\mathbf{R},H)}^2\right)\cdot \tag{16}$$

通过利用一致的 Gronwall 引理(见[3]),其中

$$y=\|u\|^2,\quad g=2(\gamma+C_2|u|_{L^4}^4),\quad h=\lambda|u|_{L^2}^2+\frac{2}{\lambda}|f|_{C_b(\mathbf{R},H)}^2,\quad r=1,$$
$$a_1=2\gamma+\frac{2C_2}{k}\left(\rho_0'^2+\frac{2(\gamma+1)^2}{k}|\Omega|+|f|_{C_b(\mathbf{R},H)}^2\right)\quad(\text{由}(11)),$$
$$a_2=\lambda\rho_0'^2,$$
$$a_3=\frac{1}{2\lambda}\left(\rho_0'^2+\frac{2(\gamma+1)^2}{k}|\Omega|+|f|_{C_b(\mathbf{R},H)}^2\right)\quad(\text{由}(11))\cdot$$

我们得到

$$\|u\|^2\leqslant(a_3+a_2)\exp(a_1),\qquad \text{当 } t\geqslant t_\tau+1, \tag{17}$$

这里 $u_0\in B$、$t_\tau=t_\tau(B,\rho_0')$ 如上所述.

2.2　一致吸引子的存在性

定义 2.2　设 $f(t)\in C_b(\mathbf{R},H)$, 函数 $f(t)$ 的壳 $\mathscr{H}(f)$ 被定义为

$$\mathscr{H}(f)=\overline{\{f(t+h)=T(h)f(t),h\in\mathbf{R}\}}^{C_b(\mathbf{R},H)}\cdot$$

(i) 概周期的情形

假定在(1)中的$f(t)$是值在H中的概周期函数。又设$\mathscr{H}(f)$是$f(t)$在$C_b(\mathbf{R},H)$中的壳,那末$\mathscr{H}(f)$在$C_b(\mathbf{R},H)$中形成了一个紧集(见[5])。考虑这族 Cauchy 问题:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}=(\lambda+\mathrm{i}\alpha)\Delta u-(k+\mathrm{i}\beta)|u|^2u+\gamma u+g(t)=A_{g(t)}(u),\\&g\in\mathscr{H}(f),\ u|_{t=\tau}=u_\tau.\end{aligned}\right\}\tag{18}$$

显然,对所有的$g\in\mathscr{H}(f)$,问题(18)存在唯一的解$u(t)$,并且估计(9)、(11)和(17)对同一常数成立(因为此时$|g|_{C_b(\mathbf{R},H)}=|f|_{C_b(\mathbf{R},H)}$)。这样,问题(18)对应着一族作用在$H$上的发展系统$\{U_g(t,\tau)\}$,$g\in\mathscr{H}(f)$。方程(18)的函数符号$\sigma$是函数$g(x,t)$,$g(\cdot,t)=\sigma(t)$。符号空间$\Sigma_1$是$\mathscr{H}(f)$。

定理 2.3 设$f(x,t)$是时间t的概周期函数,$\{U_g(t,\tau),g\in\mathscr{H}(f)=\Sigma_1\}$是对应于问题(18)的发展系统。那末,这族发展系统存在一致吸引子$\mathscr{A}_0$。

证明 为应用命题1.6,我们必须验证$\{U_g(t,\tau)\}$,$g\in\mathscr{H}(f)=\Sigma_1$是一致渐近紧及$(H\times\Sigma,H)$_连续的。

事实上,由(17)、Sobolev 嵌入定理及上面的讨论,我们得到$\{U_g(t,\tau)\}$,$g\in\Sigma_1$是一致紧从而是一致渐近紧的。

下面我们来验证$\{U_g(t,\tau)\}$,$g\in\Sigma_1$的$(H\times\Sigma,H)$_连续性。考虑两个符号$g^{(1)}$和$g^{(2)}$以及问题(18)初值分别为$u_\tau^{(1)}$和$u_\tau^{(2)}$的解$u^{(1)}$,$u^{(2)}$。记

$$w(t)=u^{(1)}(t)-u^{(2)}(t)=U_{g^{(1)}}(t,\tau)u_\tau^{(1)}-U_{g^{(2)}}(t,\tau)u_\tau^{(2)},\quad q=g^{(1)}-g^{(2)}.$$

函数$w(t)$满足方程:

$$\frac{\partial w}{\partial t}-(\lambda+\mathrm{i}\alpha)\Delta w+(k+\mathrm{i}\beta)(|u^{(1)}|^2u^{(1)}-|u^{(2)}|^2u^{(2)})-\gamma w=q.$$

对方程取内积并考虑实部得

$$\begin{aligned}&\frac12\frac{\partial}{\partial t}|w|_{L^2}^2+\lambda\|w\|^2-\gamma|w|_{L^2}^2+\\&\qquad\mathrm{Re}((k+\mathrm{i}\beta)(|u^{(1)}|^2u^{(1)}-|u^{(2)}|^2u^{(2)},w))=\mathrm{Re}(q,w).\end{aligned}\tag{19}$$

注意到

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}((k+\mathrm{i}\beta)(|u^{(1)}|^2u^{(1)}-|u^{(2)}|^2u^{(2)},w))=\\&\qquad\mathrm{Re}((k+\mathrm{i}\beta)(|u^{(1)}|^2w+(|u^{(1)}|^2-|u^{(2)}|^2)u^{(2)},w))\geqslant\\&\qquad k\int_\Omega|u^{(1)}|^2|w|^2\mathrm{d}x-(k^2+\beta^2)^{1/2}\int_\Omega|u^{(2)}|(|u^{(1)}|+|u^{(2)}|)|w|^2\mathrm{d}x\geqslant\\&\qquad-(k^2+\beta^2)^{1/2}\left(\frac{(k^2+\beta^2)^{1/2}}{4k}+1\right)\int_\Omega|u^{(2)}|^2|w|^2\mathrm{d}x=\\&\qquad-C_3\int_\Omega|u^{(2)}|^2|w|^2\mathrm{d}x\geqslant-C_4|u^{(2)}|_{L^4}^2|w|_{L^4}^2\geqslant\\&\qquad(\text{注意不等式}\ |u|_{L^4}^2\leqslant|u|_{L^2}\|u\|)\geqslant\\&\qquad-C_4|u^{(2)}|_{L^4}^2|w|_{L^2}\|w\|\geqslant\\&\qquad-\left(\frac{\lambda}{2}\|w\|^2+\frac{C_4}{2\lambda}|u^{(2)}|_{L^4}^4|w|_{L^2}^2\right).\end{aligned}\tag{20}$$

又,

$$\mathrm{Re}(q,w)\leqslant|q|_{L^2}|w|_{L^2}\leqslant\frac12|q|_{L^2}^2+\frac12|w|_{L^2}^2.\tag{21}$$

结合(20)和(21),我们从(19)得

$$\frac{\partial}{\partial t}|w|_{L^2}^2 \leqslant \left(\frac{C_4}{\lambda}|u^{(2)}|_{L^4}^4+2\gamma+1\right)|w|_{L^2}^2+|q|_{L^2}^2, \tag{22}$$

从而,我们有

$$|w(t)|_{L^2}^2 \leqslant \left(|w(\tau)|_{L^2}^2+\int_\tau^t|q(s)|_{L^2}^2\mathrm{d}s\right)\exp\int_\tau^t\left(\frac{C_4}{\lambda}|u^{(2)}(s)|_{L^4}^4+2\gamma+1\right)\mathrm{d}s\cdot \tag{23}$$

又在(7)中让 $u=u^{(2)}$,并关于 t 从 τ 到 t 积分得

$$2\lambda\int_\tau^t\|u^{(2)}(s)\|^2\mathrm{d}s+k\int_\tau^t|u^{(2)}(s)|_{L^4}^4\mathrm{d}s+2(\gamma+1)\int_\tau^t|u^{(2)}(s)|_{L^2}^2\mathrm{d}s \leqslant$$

$$|u^{(2)}(\tau)|_{L^2}^2+(t-\tau)\left[\frac{2(\gamma+1)^2}{k}|\Omega|+|f|_{C_b(\mathbf{R},H)}^2\right]\cdot$$

这蕴涵着

$$\int_\tau^t(|u^{(2)}(s)|_{L^4}^4+2\gamma+1)\mathrm{d}s \leqslant K, \tag{24}$$

这里 K 是一个仅依赖于 t,τ 和 $u_\tau^{(2)}$ 的常数. 我们同时有

$$\int_\tau^t|q(s)|_{L^2}^2\mathrm{d}s \leqslant (t-\tau)|q|_{C_b(\mathbf{R},H)}^2\cdot \tag{25}$$

由于(24)和(25),我们从(23)得

$$|u^{(1)}(t)-u^{(2)}(t)|_{L^2}^2 \leqslant (|u_\tau^{(1)}-u_\tau^{(2)}|_{L^2}^2+(t-\tau)|g^{(1)}-g^{(2)}|_{C_b(\mathbf{R},H)}^2)\mathrm{e}^K\cdot$$

这样,这族发展系统 $\left\{U_g(t,\tau)\right\}$, $g\in\mathscr{H}(f)$, 是 $(H\times\Sigma_1,H)$_连续的. 这样我们完成了定理的证明.

(ii) 拟周期的情形

当(1)中的 $f(t)$ 是时间 t 的取值于 H 的拟周期函数时,它有形式:

$$f(t)=\varphi(\alpha_1t,\alpha_2t,\cdots,\alpha_mt)=\varphi(\omega_1(t),\omega_2(t),\cdots,\omega_m(t)),$$

这里 φ 关于每个变量 ω_i 是周期为 2π 的周期函数,即

$$\varphi(\omega_1,\cdots,\omega_i+2\pi,\cdots,\omega_m)=\varphi(\omega_1,\cdots,\omega_i,\cdots,\omega_m),$$

$i=1,\cdots,m$, $\omega_i(t)=\alpha_it$, $\alpha_i\in\mathbf{R}$, $\left\{\alpha_i\right\}$ 为有理无关的数. 假定 $\varphi(\omega)$, $\omega=(\omega_1,\cdots,\omega_m)$ 是定义在 m_维环 $\mathcal{T}^m$ 上取值在 H 中的连续函数, $\varphi\in C(\mathcal{T}^m,H)$. 因此,函数 $f(t)$ 的壳 $\mathscr{H}(f)$ 为:

$$\left\{\varphi(\alpha t+\omega_0),\ \omega_0\in\mathcal{T}^m\right\}=\mathscr{H}(f)\cdot \tag{26}$$

由于存在从 $\mathcal{T}^m$ 到 $\mathscr{H}(f)$: $\omega_0\to\varphi(\alpha t+\omega_0)$ 的连续映射,我们现在可以用符号空间 $\Sigma_2=\mathcal{T}^m$ 来代替 $\mathscr{H}(f)$. $\mathcal{T}^m$ 上的平移群 $T(h)\omega_0=[\omega_0+\alpha h]=(\omega_0+\alpha h)(\mathrm{mod}\ 2\pi)^m$ 对应 $\mathscr{H}(f)$ 上的平移群.

我们考虑下列 Cauchy 问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=(\lambda+\mathrm{i}\alpha)\Delta u-(k+\mathrm{i}\beta)|u|^2u+\gamma u+\varphi(x,\omega(t))= \\ \qquad A(u,\omega(t)), \\ u|_{t=\tau}=u_\tau, \qquad u_\tau\in H,\ t\geqslant\tau,\ \tau\in\mathbf{R}\cdot\end{cases} \tag{27}$$

这里 $\omega(t)=[\alpha t+\omega_0]$, $\omega_0\in\mathcal{T}^m$, $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$. 由定理2.1,对任意的 $\omega\in\mathcal{T}^m$, 问题(27)有唯一的解 $u(t)=U_{\omega_0}(t,\tau)u_\tau$. 因此,对应于(27)的这族发展系统 $\left\{U_{\omega_0}(t,\tau)\right\}$, $\omega_0\in\mathcal{T}^m$, 产生了 $H\times\mathcal{T}^m$ 上的半群 $\left\{S(t)\right\}$, $S(t):H\times\mathcal{T}^m\to H\times\mathcal{T}^m$:

$$S(t)(u_0,\omega_0)=(U_{\omega_0}(t,0)u_0,[\alpha t+\omega_0]),\quad u_0\in H,\quad \omega_0\in \mathcal{T}^m,\quad t\geqslant 0. \tag{28}$$

显然, $S(t)$ 可由下列自治的动力系统

$$\begin{cases}\partial_t u=A(u,\omega),\ \partial_t\omega=\alpha,\\ u|_{t=0}=u_0,\quad \omega|_{t=0}=\omega_0,\quad u_0\in H,\quad \omega_0\in\mathcal{T}^m.\end{cases} \tag{29}$$

或简单地由

$$\begin{cases}\partial_t y=M(y),\ y|_{t=0}=y_0,\\ y=(u,\omega)\in H\times\mathcal{T}^m,\ M(y)=(A(u,\omega),\alpha)\end{cases} \tag{30}$$

产生. 用和定理 2.3 类似的方法, 我们能证明:

定理 2.4 设 $\varphi(x,\omega(t))$ 是时间 t 的拟周期函数: $\varphi(x,\omega)\in C(\mathcal{T}^m,H)$, $\varphi_{\omega_j}(x,\omega)\in C(\mathcal{T}^m,H)$; $\left\{U_\omega(t,\tau)\right\}$, $\omega\in\mathcal{T}^m=\Sigma$ 是与(27) 对应的一族发展系统. 那末, 这族发展系统 $\left\{U_\omega(t,\tau)\right\}$, $\omega\in\mathcal{T}^m$ 存在一致吸引子 $\mathscr{A}_q$.

下面, 我们给出 $\mathscr{A}_q$ 的维数估计.

首先, 我们把(29) 写为:

$$\begin{cases}\partial_t u=(\lambda+\mathrm{i}\alpha)\Delta u-(k+\mathrm{i}\beta)|u|^2u+\gamma u+\varphi(x,\omega),\ \partial_t\omega=\alpha,\\ u|_{t=0}=u_0,\quad \omega|_{t=0}=\omega_0,\qquad u_0\in H,\ \omega_0\in\mathcal{T}^m.\end{cases} \tag{31}$$

或简写成(30) 的形式, 其中

$$\begin{cases}M(y)=((\lambda+\mathrm{i}\alpha)\Delta u-(k+\mathrm{i}\beta)|u|^2u+\gamma u+\varphi(x,\omega),\alpha),\\ y=(u,\omega).\end{cases} \tag{32}$$

设 $S'(t,y_0)(v_0,\mu)=(v(t),\mu)$ 满足下列变分方程:

$$\begin{cases}\partial_t v=(\lambda+\mathrm{i}\alpha)\Delta v-(k+\mathrm{i}\beta)\left\{|u|^2v+2u\mathrm{Re}(uv)\right\}+\\ \qquad \gamma v+\varphi'_\omega(x,\omega(t))\mu,\\ \partial_t\mu=0,\\ \mu=(\mu_1,\dots,\mu_m)\in R^m,\quad v=v(x,t)=v(t).\end{cases} \tag{33}$$

或简写为:

$$\partial_t z=M'(y(t))z,\qquad z|_{t=0}=z_0,\ z=(v,\mu).$$

这里 $y(t)=(u(t),\omega(t))$, $u(t)=U_{\omega_0}(t,0)u_0$, $\omega(t)=[\alpha t+\omega_0]$ 是(31) 的一个解,

$$M'(y(t))z=((\lambda+\mathrm{i}\alpha)\Delta v-(k+\mathrm{i}\beta)\left\{|u|^2v+2u\mathrm{Re}(uv)\right\}+\gamma v+\varphi'_\omega(x,\omega(t))\mu,0).$$

首先, 让我们估计 $\mathrm{Re}(M'(y(t))z,z)$ 如下:

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(M'(y(t))z,z)=&-\mathrm{Re}(\lambda+\mathrm{i}\alpha)\|v\|^2-\\ &\mathrm{Re}(k+\mathrm{i}\beta)\int_\Omega\left\{|u|^2v+2u\mathrm{Re}(uv)\right\}u\,\mathrm{d}x+\gamma|v|^2_{L^2}+\int_\Omega(\varphi'_\omega\mu)v\,\mathrm{d}x\leqslant\\ &-\lambda\|v\|^2-k\int_\Omega|u|^2|v|^2\mathrm{d}x+2\int_\Omega\mathrm{Re}(uv)\left\{\beta\mathrm{Im}(uv)-k\mathrm{Re}(uv)\right\}\mathrm{d}x+\\ &\gamma|v|^2_{L^2}+\frac{b}{2}\phi|v|^2_{L^2}+\frac{1}{2b}\phi\mu^2\leqslant\\ &\left(\text{由于}\int_\Omega\beta\mathrm{Re}(uv)\mathrm{Im}(uv)\mathrm{d}x\leqslant|\beta|\int_\Omega|u|^2|v|^2\mathrm{d}x\right)\leqslant\\ &-\lambda\|v\|^2-(k-2|\beta|)\int_\Omega|u|^2|v|^2\mathrm{d}x+\gamma|v|^2_{L^2}+\frac{b}{2}\phi|v|^2_{L^2}+\frac{1}{2b}\phi\mu^2,\end{aligned} \tag{34}$$

这里 $u = u(t, y_0)$, $y_0 \in \mathscr{A}$ ($\mathscr{A}$为 $S(t)$ 对应于 $U_\omega(t, \tau)$, $\omega \in \Omega^m$ 的吸引子), $\nu \in V$, $\mu \in \mathbf{R}^m$, $b > 0$, b 是一个任意正数,

$$\phi = \sup_{\omega \in \Omega^m} |\phi'_\omega(\cdot, \omega)|_{L^2} = \sup_{\omega \in \Omega^m} \left(\sum_{j=1}^m |\phi'_{\omega_j}(\cdot, \omega)|_{L^2} \right)^{1/2}. \tag{35}$$

令

$$(M_1 z, z) = (L_1 \nu, \nu) + (L_2 \mu, \mu), \tag{36}$$

$$L_1 \nu = \lambda \Delta \nu - (k - 2|\beta|)|u|^2 \nu + \left(\gamma + \frac{b}{2}\phi \right) \nu,\ L_2 \mu = \eta I_m \mu,\ \eta = \frac{1}{2b}\phi,$$

I_m 是 $\mathbf{R}^m$ 上的单位算子. 那末, 算子 M_1 是分块算子: $M_1 = \begin{pmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{pmatrix}$. 它的特征函数是: $\zeta^{(1)} = (W_i, 0)$ 及 $\zeta^{(2)} = (0, \xi_j)$, 这里 $\{W_i\}$ 是 H 中算子 $L_1 (L_1 = \lambda_i W_i$, $W_i \in V$, $\lambda_i \to -\infty (i \to \infty))$ 的垂直的特征向量; $\{\xi_j\}$ 是 $\mathbf{R}^m$, $j = 1, \dots, m$ 中的任一组垂直基, 同时为 $L_2 (L_2 \xi_j = \eta \xi_j)$ 的一组特征向量. 设分块算子 M_1 的 d 个最大特征值排列为:

$$\lambda_{d-m} \leqslant \dots \leqslant \lambda_{i_0} \leqslant \eta \leqslant \dots \leqslant \eta \leqslant \lambda_{i_0 - 1} \leqslant \dots \leqslant \lambda_1. \tag{37}$$

假定 d 较大. 这样, 我们对 $(M_1 \nu, \nu)$ 用 (36) 得:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{d} (M_1 \zeta_j, \zeta_j) = & -\lambda \sum_{j=1}^{d-m} \| W_j \|^2 - (k - 2|\beta|) \int_\Omega |u|^2 \sum_{j=1}^{d-m} |W_j|^2 \mathrm{d}x + \\
& \left(\gamma + \frac{b}{2}\phi \right) \sum_{j=1}^{d-m} |W_j|_{L^2}^2 + \frac{1}{2b}\phi \sum_{j=1}^{m} \xi_j^2 = \\
& -\lambda \sum_{j=1}^{d-m} \| W_j \|^2 - (k - 2|\beta|) \int_\Omega |u|^2 \sum_{j=1}^{d-m} |W_j|^2 \mathrm{d}x + \\
& \left(\gamma + \frac{b}{2}\phi \right)(d - m) + \frac{1}{2b}\phi m \leqslant \\
& -\lambda \sum_{j=1}^{d-m} \| W_j \|^2 + 2|\beta| \int_\Omega |u|^2 \sum_{j=1}^{d-m} |W_j|^2 \mathrm{d}x + \\
& \left(\gamma + \frac{b}{2}\phi \right)(d - m) + \frac{1}{2b}\phi m.
\end{aligned} \tag{38}$$

这里 ζ_j 是算子 M_1 与特征值 (37) 对应的特征向量. 把 Lieb_Thirring 不等式 ([3]) 用于特征函数 $\{W_j\}_{j=1}^{d-m}$, 我们得到:

$$\sum_{j=1}^{d-m} \| W_j \|^2 \geqslant C_5 \int_\Omega (\rho(x))^2 \mathrm{d}x = C_5 |\rho|_{L^2}^2,\quad \rho(x) = \sum_{j=1}^{d-m} |W_j(x)|^2. \tag{39}$$

现在, 我们有

$$d - m = \int_\Omega \rho(x) \mathrm{d}x \leqslant |\Omega|^{1/2} |\rho|_{L^2},\quad |\rho|_{L^2}^2 \geqslant \frac{(d-m)^2}{|\Omega|}. \tag{40}$$

又由 Hölder 不等式

$$2|\beta| \int_\Omega |u|^2 |\rho| \mathrm{d}x \leqslant 2|\beta| |u|_{L^4}^2 |\rho|_{L^2}, \tag{41}$$

(38) 式右边不超过

$$\begin{aligned}
& -\lambda C_5 |\rho|_{L^2}^2 + 2|\beta| |u|_{L^4}^2 |\rho|_{L^2} + \left(\gamma + \frac{b}{2}\phi \right)(d - m) + \frac{1}{2b}\phi m \leqslant \\
& -\frac{\lambda C_5}{2} |\rho|_{L^2}^2 + 2|\beta|^2 \lambda^{-1} C_5^{-1} |u|_{L^4}^4 + \left(\gamma + \frac{b}{2}\phi \right)(d - m) + \frac{1}{2b}\phi m \leqslant \\
& (\text{用}(40)) \leqslant
\end{aligned}$$

$$-\frac{\lambda C_5}{2|\Omega|}(d-m)^2+|\beta|^2\lambda^{-1}C_5^{-1}|u|_{L^4}^4|+\left(\gamma+\frac{b}{2}\phi\right)(d-m)+\frac{1}{2b}\phi m.$$

因此

$$\frac{1}{T}\int_0^T\sum_{j=1}^d(\boldsymbol{M}_1\zeta_j,\zeta_j)\,\mathrm{d}s\leqslant$$

$$-\frac{\lambda C_5}{2|\Omega|}(d-m)^2+2|\beta|^2\lambda^{-1}C_5^{-1}\cdot\frac{1}{T}\int_0^T|u(t)|_{L^4}^4\mathrm{d}s+$$

$$\left(\gamma+\frac{b}{2}\phi\right)(d-m)+\frac{1}{2b}\phi m. \tag{42}$$

考虑对(7)式关于 t 从 0 到 T 积分得

$$q\equiv\lim_{T\to\infty}\sup\sup_{y_0\in\mathscr{A}}\left(\frac{1}{T}\int_0^T\sum_{j=1}^d(\boldsymbol{M}_1\zeta_j,\zeta_j)\,\mathrm{d}s\right)\leqslant$$

$$-\frac{\lambda C_5}{2|\Omega|}(d-m)^2+2|\beta|^2\lambda^{-1}C_5^{-1}k^{-1}\left(\frac{2(\gamma+1)^2}{k}|\Omega|+\phi_1^2\right)+$$

$$\left(\gamma+\frac{b}{2}\phi\right)(d-m)+\frac{1}{2b}\phi m=$$

$$-\frac{\lambda C_5}{2|\Omega|}(d-m)^2+C_6\lambda^{-1}C_5^{-1}+\left(\gamma+\frac{b}{2}\phi\right)(d-m)+\frac{1}{2b}\phi m, \tag{43}$$

这里 $\phi_1^2=\sup_{\omega\in\mathscr{T}^m}|\varphi(\cdot,\omega)|_{L^2}^2,\quad C_6=2|\beta|^2k^{-1}\left(\frac{2(\gamma+1)^2}{k}|\Omega|+\phi_1^2\right).$

这是一个关于 $(d-m)$ 的二次三项式, 它是负的, 只要 $d-m$ 大于它的正根:

$$\frac{(\gamma+(b\phi/2))+\sqrt{(\gamma+(b\phi/2))^2+(4(\lambda C_5/2|\Omega|))(C_6\lambda^{-1}C_5^{-1}+\phi m/2b)}}{\lambda C_5/|\Omega|}. \tag{44}$$

显然, 这只须

$$d-m>\frac{|\Omega|\phi}{\lambda C_5}b+\sqrt{\frac{|\Omega|\phi m}{\lambda C_5}}b^{-1/2}+\frac{2\gamma|\Omega|}{\lambda C_5}+\frac{1}{\lambda C_5}\sqrt{2C_6|\Omega|}. \tag{45}$$

回顾一下 b 是一个任意正参数, 故取 $b=\sqrt[3]{\lambda C_5 m/4|\Omega|\phi}$. 则当

$$d>m+\left(\frac{|\Omega|\phi}{\lambda C_5}\right)^{2/3}m^{1/3}+\left(\frac{|\Omega|\phi}{\lambda C_5}\right)^{2/3}(2m)^{1/3}+\frac{2\gamma|\Omega|}{\lambda C_5}+\frac{1}{\lambda C_5}\sqrt{2C_6|\Omega|}$$

时, 我们有 $q<0$. 因此, 我们有

$$\dim\mathscr{A}_q\leqslant\dim\mathscr{A}\leqslant\left[m+\left(\frac{|\Omega|\phi}{\lambda C_5}\right)^{2/3}m^{1/3}+\left(\frac{|\Omega|\phi}{\lambda C_5}\right)^{2/3}(2m)^{1/3}+\right.$$

$$\left.\frac{2\gamma|\Omega|}{\lambda C_5}+\frac{1}{\lambda C_5}\sqrt{2C_6|\Omega|}\right]=C$$

这里 $[x]$ 表示严格小于 x 的最大整数.

综上所述, 我们有

定理 2.5 在定理 2.4 的假定下, 对应于(27)的发展系统的一致吸引子有有限的 Hausdorff 维数 $\dim\mathscr{A}_q$,

$$\dim\mathscr{A}_q\leqslant C,$$

这里 C 是前述常数.

[参 考 文 献]

[1] Babin A V, Vishik V B. Attractors of Evolution Equations[M]. Amsterdam, London, New York, Tokyo: North_Holland, 1992.

[2] Hale J K. Asymptotic Behavior of Dissipative Systems[M]. Mathematical surveys and monographs **25**, Providence: Amer Math Soc, 1987.

[3] Temam R. Infinite_Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics[M]. Appl Math Sciences **68**, Now York, Berlin, Heidelberg, London, Paris, Tokyo: Springer_Verlag, 1988.

[4] 郭柏灵. 非线性演化方程[M]. 上海: 上海科教出版社, 1995.

[5] Chepyzhov V V, Vishik M I. Attractors of non_autonomous dynamical systems and their dimension [J]. J Math Pures Appl, 1994, **73**(3): 279—333.

[6] Miranville A, Wang X. Attractors for nonautonomous nonhomogeneous Navier_Stoke equations[J]. Nonlinearity, 1997, **10**(5): 1047—1061.

[7] Pazy A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations[M]. Appl Math Sciences **40**, New York, Berlin, Heidelberg, London, Paris, Tokyo: Springer_Verlag, 1983.

Attractors of Nonautonomous Schrödinger Equations

LIU Yu_rong[1,3], LIU Zeng_rong[2], ZHENG Yong_ai[2,3]

1. Department of Mathematics, Suzhou University, Suzhou 215006, P R China;
2 Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200436, P R China;
3. Department of Mathematics, Yangzhou University, Yangzhou 225002, P R China)

Abstract: The long_time behaviour of a two_dimensional nonautonomous nonlinear Schrödinger equation is considered. The existence of uniform attractor is proved and the upper bound of the uniform attractor's Hausdorff dimension is given.

Key words: nonautonomous Schrödinger equations; uniform attractor; Hausdorff dimension