应用数学和力学, 第 22 卷 第 2 期(2001 年 2 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2001) 02_0191_08

三维方形单元 PATTERN 的周期流线*

李继彬， 段晚锁

(昆明理工大学 非线性科学研究中心, 昆明 650093)

(我刊编委李继彬来稿)

摘要: 应用扰动广义 Hamilton 系统理论研究 Rayleigh_Benard 对流三维方形单元 Pattern 周期流线的存在性• 所得结果说明本文的方法给出了三维对流模型的流线周期行为的清晰描述, 从而提供了某些实验结果的精确解释•

关 键 词: Rayleigh_Benard 对流; 周期解; Hamilton 系统; 三维方形单元 Pattern
中图分类号: O175. 14 文献标识码: A

引 言

关于两平面之间热对流的不稳定性理论, 针对 Rayleigh_Benard 对流的平面形式研究, 过去 30 年已发表过许多论文• 正如 D. R. Jerkins[1] 所说的,“ 在理论方面, 存在着对流的平面形式是圆柱形单元, 方形单元, 还是六角形单元的争议; 在实验方面, 应用跟踪图方法, 对流的平面形式容易被观察到, 它们是三维流场产生的平面形式的二维象• ” 文献[1] 指出, 跟踪图技术毫不含糊地显示存在着方形单元 Pattern, 当然也存在圆柱形单元和六角形单元的 Pattern• 每个单元的边界实际上是运动流体下沉的边界面• 这些结论说明 Stuart[2] 认为方形单元 Pattern“ 不是可观察到的有效数学模型” 的说法是不正确的• 因此, 在理论上仍然有必要继续深入研究方形单元 Pattern 的机制• 由于三维动力系统具有与二维系统不同的新的动力学行为, 即在空间中存在具有混沌结构的流线, 产生所谓的 Lagrange 湍流• 因此流体运动的周期行为和混沌行为的研究, 对于理解湍流形成的机制起着重要作用• 三维流线有什么样的结构? 如何检查周期流线的产生? 本文的目的在于回答方形单元系统中周期流线的存在性问题• 关于这方面的理论研究仍未见文献发表•

为研究上述模型, 我们简介一下文献[3] 中发展的扰动广义 Hamilton 系统的周期解存在理论•

考虑三维扰动广义 Hamilton 系统:

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \{x_i, H\}(\boldsymbol{x}) + \varepsilon g_i(\boldsymbol{x}, t) \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$, $\{\cdot, \cdot\}$ 是 Poisson 括号, $H \in C^r(\mathbf{R}^3)$, $r \geqslant 3$ 是 Hamilton 函数• 以

* 收稿日期: 1999_11_05; 修订日期: 2000_10_03
基金项目: 国家自然科学基金重点项目“ 动力系统与哈密顿系统” (19731003) ; 云南省自然科学基金资助项目
作者简介: 李继彬(1943—) , 男, 云南腾冲人, 教授, 博导, 云南省数学学会会长.

下我们假定 g_i 是充分光滑的向量函数, 并设

$$f_i(x)=\{x_i, H\}(\boldsymbol{x})=\sum_{j=1}^{3} J_{ij}(\boldsymbol{x})\frac{\partial H}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})\qquad(i=1,2,3),$$

$J_{ij}(\boldsymbol{x})=\{x_i, x_j\}$, $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})=(J_{ij}(\boldsymbol{x}))$ 是反对称矩阵, 叫做广义 Hamilton 系统的结构矩阵• 利用 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$ 系统$(1)_\varepsilon$ 可以改写为:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})\nabla H(\boldsymbol{x})+\varepsilon\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, t),$$

$\boldsymbol{g}=(g_1, g_2, g_3)$, 并假定 $g_i(x, t)$, $i=1, 2, 3$, 关于 t 是 T 周期的, $0\leqslant\varepsilon\leqslant 1$•

现在, 我们对系统 $(1)_{\varepsilon=0}$ 作如下基本假设:

(A_1) 存在 $(\mathbf{R}^3, \{\cdot, \cdot\})$ 的非空正则点集 $M=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^3: \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$ 的秩等于 $2\}$ (或 M 的某个连通开子集 U) 上定义的 Casimir 函数 $C(\boldsymbol{x})$, 使对每个 $\boldsymbol{x}\in M_c=\{\boldsymbol{x}\in M: C(\boldsymbol{x})=c\}$, 其梯度向量 $\nabla C(\boldsymbol{x})\neq 0$, 其中常数 c 满足 $|c|\leqslant\delta$, $\delta>0$•

(A_2) 存在一维开区间 $I\subset\{c\in\mathbf{R}: |c|\leqslant\delta\}$, 使得对每个 $c\in I$, 满足条件(A_1) 的未扰系统$(1)_{\varepsilon=0}$ 在 M_c 上存在单参数周期轨道族 $q_0^{\alpha}(t-\theta, c)$, $\alpha\in L(c)$, $L(c)\subset\mathbf{R}$ 为一个开区间, 记它们的周期为 $T(\alpha, c)$•

以下研究在基本假设(A_1) 和(A_2) 下, 扰动系统 $(1)_\varepsilon$ 周期轨的存在性• 我们想知道未扰系统的具有两个参数的周期轨道经受扰动后是否仍然保持周期解的存在性• 为了搞清这个问题, 我们先将非自治系统$(1)_\varepsilon$ 改写为下列形式的扭扩自治系统:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+\varepsilon\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \Phi),\tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=1,\qquad(\boldsymbol{x}, \Phi)\in\mathbf{R}^3\times S_T,$$

其中 $\boldsymbol{f}=(f_1, f_2, f_3)$, $\boldsymbol{g}=(g_1, g_2, g_3)$, $\Phi(t)=t(\mathrm{mod}\ T)$, $S_T=R(\mathrm{mod}\ T)$, 进而我们将系统化为研究一个三维 Poincar 映射•

定义 $(2)_\varepsilon$ 的全局截面为:

$$\Sigma^0=\{(\boldsymbol{x}, \Phi)\in\mathbf{R}^3\times S_T: \Phi=0(\mathrm{mod}\ T)\}•$$

以应于 Σ^0 定义 Poincar 映射的 m 次迭代为:

$$P_\varepsilon^m: x_\varepsilon(0)\rightarrow x_\varepsilon(mT)•$$

这样 $(2)_\varepsilon$ 的次谐周期轨的存在性研究就化为对映射 P_ε^m 的不动点的研究•

在未扰系统 $(1)_{\varepsilon=0}$ 的周期轨道邻域存在坐标变换:

$$\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3)\rightarrow(a(\boldsymbol{x}), \phi(\boldsymbol{x})(\mathrm{mod}\ 2\pi), C(\boldsymbol{x})),$$

在新坐标下, $(2)_\varepsilon$ 可以改变为:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}&=\varepsilon\langle\nabla a, g\rangle(a, \phi, c, \Phi)\equiv\varepsilon F(a, \phi, c, \Phi),\\
\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}&=\left.\frac{\partial H}{\partial a}\right|_c+\varepsilon\langle\nabla\phi, g\rangle(a, \phi, c, \Phi)\equiv\Omega(a, c)+\varepsilon G(a, \phi, c, \Phi),\\
\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}&=\varepsilon\langle\nabla C, g\rangle(a, \phi, c, \Phi)\equiv\varepsilon R(a, \phi, c, \Phi),\\
\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}&=1•
\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

其中 $(a, \phi, c, \Phi)\in A\times S_{2\pi}\times I\times S_T$•

显然未扰系统 $(3)_{\varepsilon=0}$ 的具有初值 $\Phi(0)=0$ 的解具有以下形式:

$$a = 0,\quad \phi = \Omega(a_0, c_0)t + \phi_0 \pmod{2\pi},$$
$$c = c_0,\quad \Phi = t \pmod{2\pi}\cdot$$

这里,坐标 a 就充当了假设(A_2) 中的参数 α 的角色•

扰动系统 $(3)_\varepsilon$ 的全局截面变为:

$$\Sigma^0 = \left\{ (a, \phi, c, \Phi) \in A \times S_{2\pi} \times I \times S_T:\ \Phi = 0 \pmod{T} \right\},$$

对应的Poincar 映射 P_ε^m 的 m 次迭代为:

$$P_\varepsilon^m: (a_\varepsilon(0), \phi_\varepsilon(0), c_\varepsilon(0)) \to (a_\varepsilon(mT), \phi_\varepsilon(mT), c_\varepsilon(T)),$$

其中 $(a_\varepsilon(t), \phi_\varepsilon(t), c_\varepsilon(t), \Phi(t))$ 是依赖初始条件$(a_0, \phi_0, c_0, 0) \in \Sigma^0$ 系统$(3)_\varepsilon$ 的解• 利用未扰系统的解, 我们通过正则摄动展开来逼近 Poincar 映射:

$$a_\varepsilon(t) = a_0 + \varepsilon a_1(t) + O(\varepsilon^2),$$
$$\phi_\varepsilon(t) = \Omega(a_0, c_0)t + \phi_0 + \varepsilon\phi_1(t) + O(\varepsilon^2),$$
$$c_\varepsilon(t) = c_0 + \varepsilon c_1(t) + O(\varepsilon^2),$$

$t \in [0, mT(a_0, c_0)]$, $T(a_0, c_0) = (2\pi)/\Omega(a_0, c_0)$, a_1, ϕ_1, c_1 满足下列变分方程:

$$\frac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}t} = F(a_0, \Omega(a_0, c_0)t + \phi_0, c_0, t),$$
$$\frac{\mathrm{d}\phi_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\Omega}{\partial a}(a_0, c_0)a_1(t) + \frac{\partial\Omega}{\partial c}(a_0, c_0)c_1(t) + G(a_0, \Omega(a_0, c_0)t + \phi_0, c_0, t),$$
$$\frac{\mathrm{d}c_1}{\mathrm{d}t} = R(a_0, \Omega(a_0, c_0)t + \phi_0, c_0, t)\cdot$$

因此满足初始条件 $a_1(0) = \phi_1(0) = c_1(0) = 0$ 上述变分方程的解为:

$$a_1(mT) = \int_0^{mT} F(a_0, \Omega(a_0, c_0)t + \phi_0, c_0, t)\,\mathrm{d}t \equiv M_1^{m/n}(a_0, \phi_0, c_0),$$

$$\begin{aligned}\phi_1(mT) = {} & \frac{\partial\Omega}{\partial a}(a_0, c_0)\int_0^{mT}\int_0^t F(a_0, \Omega(a_0, c_0)\eta + \phi_0, c_0, \eta)\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}t + \\ & \frac{\partial\Omega}{\partial c}(a_0, c_0)\int_0^{mT}\int_0^t R(a_0, \Omega(a_0, c_0) + \phi_0, c_0, \eta)\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}t + \\ & \int_0^{mT} G(a_0, \Omega(a_0, c_0)t + \phi_0, c_0, t)\,\mathrm{d}t \equiv M_2^{m/n}(a_0, \phi_0, c_0),\end{aligned}$$

$$c_1(mT) = \int_0^{mT} R(a_0, \Omega(a_0, c_0)t + \phi_0, c_0, t)\,\mathrm{d}t \equiv M_3^{m/n}(a_0, \phi_0, c_0)\cdot$$

我们定义向量

$$\boldsymbol{M}^{m/n}(a_0, \phi_0, c_0) = (M_1^{m/n}(a_0, \phi_0, c_0), M_2^{m/n}(a_0, \phi_0, c_0), M_3^{m/n}(a_0, \phi_0, c_0))$$

为次谐 Melnikov 向量• 从而得到下面的定理(见文[3]和[4]):

定理 A 若 (a_0, c_0) 满足 $M_1(a_0, c_0) = 0$, $M_3(a_0, c_0) = 0$ 和 $\partial(M_1, M_3)/\partial(a, c)|_{(a_0, c_0)} \neq 0$, 那么二维 Poincar 映射存在一个不动点$(a_0, c_0) + O(\varepsilon^2)$, 该不动点对应于三维流的一条周期轨•

实际上, 我们在计算次谐波向量函数的 M_1、M_3 时, 可以通过下列公式在原坐标下计算:

$$\begin{aligned}M_1^{m/n}(\alpha, \theta, c) = {} & \frac{T(\alpha, c)}{2\pi}\Big[\int_0^{mT}\langle\nabla H, \boldsymbol{g}\rangle(q_0^\alpha(t, c), t + \theta)\,\mathrm{d}t - \\ & \frac{\partial H}{\partial c}(q_0^\alpha(0, c))\int_0^{mT}\langle\nabla C, \boldsymbol{g}\rangle(q_0^\alpha(t, c), t + \theta)\,\mathrm{d}t\Big],\end{aligned} \tag{4}$$

$$M_3^{m/n}(\alpha, \theta, c) = \int_0^{mT}\langle\nabla C, \boldsymbol{g}\rangle(q_0^\alpha(t, c), t + \theta)\,\mathrm{d}t\cdot \tag{5}$$

1 微分方程模型的推导

Rayleigh_Benard对流的发生通过在垂直方向上流体的瞬时温度和未开始流动时基本状态的偏差来描述. 在适当的笛卡尔坐标系统下, 流层任一点的温度 T 可以表示为

$$T - T_0 = -z + T'(x, y, z, t),$$

其中 T_0 是一个参照温度, z 是竖直坐标, T' 表示与基本状态的偏差, t 是时间. 对于刚开始发生的对流, T' 和流速可展开为关于小参数 ε 的渐近级数, 即:

$$T' = \varepsilon T_1 + \varepsilon^2 T_2 + \varepsilon^3 T_3 + \cdots.$$

将上述展开式代入到关于热、质量和矩保守的非线性方程组中, 精确到 ε 的一阶项, 方程组是线性的, 在水平坐标下是可分离的, 所以我们得到(见 Palm 的[5] 和 Stuart 的[2]):

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ W_1 \end{bmatrix} = \Phi(x, y)\begin{bmatrix} g(z) \\ h(z) \end{bmatrix},$$

这里 W_1 是速度在一阶项的垂直分量, 函数 $\Phi(x, y)$ 是平面函数并满足Helmholtz 方程:

$$\nabla^2 \Phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Phi = -k^2\Phi, \tag{6}$$

k^2 表示水平波数平方的和. 方程(6) 有无穷多个解, 但在确定情况下, 实际可观察到的解不能从线性理论获得. 在文献中(6) 的以下三个特解

$$\Phi(x, y) = \cos kx, \tag{7}$$

$$\Phi(x, y) = \cos kx + \cos ky, \tag{8}$$

$$\Phi(x, y) = \frac{\cos(\sqrt{3}kx + ky)}{2} + \frac{\cos(\sqrt{3}kx - ky)}{2} + \cos ky \tag{9}$$

分别称圆柱形、方形和六角形平面形式, 是(6) 的定常解. 以上哪一种平面形式能够在现实中实现, 取决于方程的边界条件和对流性质.

当对流层的边界具有很弱的热传导能力时, 其水平尺度比例非常大, 以致于使展开式中的垂直坐标和水平坐标分离变量. 从文献[1]我们知道, 对温度和速度场可定出渐近展开式的二阶和更高阶近似. 例如, 关于小参数 ε_1 展开 $\Phi(x, y)$ 得到

$$\Phi(x, y) = \varepsilon_1\Phi_1 + \varepsilon_1^2\Phi_2 + \varepsilon_1^3\Phi_3 + \cdots. \tag{10}$$

对于方形平面形式, 我们得到(见[1] p.454):

$$\Phi_2 = \frac{-\xi(\cos 2kx + \cos 2ky)}{9} - 2\xi\cos kx\cos ky, \tag{11}$$

$$\Phi_3 = \frac{(15/7 + \xi^2)(\cos 3kx + \cos 3ky)}{128} + \frac{(5/7 + 14\xi^2/9)(\cos 2ky + \cos 2kx)}{16}, \tag{12}$$

其中 ξ 是一个 $O(1)$ 有界参数, 它表示温度关于粘性的依赖性. Φ_1 的表达式由(7)、(8)、(9) 给定的平面形式描述.

为讨论与对流方程所给定解相关的几何 Pattern, 我们需要考虑下面的方程组:

$$\frac{dx}{U} = \frac{dy}{V} = \frac{dz}{W} = dt, \tag{13}$$

其中, U、V 是速度的水平分量, W 是竖直分量. 所谓流线就是方程组(13) 当 $dt \equiv 0$ 时的解, 即将 t 看作参数时的解. 对静态的速度场, 流线正好和流体微粒的轨道相重合. 根据Stuant 的[2] 和 Zaslavsky 等的[6],

$$U = \frac{1}{k^2}h'(z)\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \tag{14}$$

$$V = \frac{1}{k^2}h'(z)\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \tag{15}$$

这样我们就得到流线方程组:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\partial \Phi/\partial x} = \frac{\mathrm{d}y}{\partial \Phi/\partial y} = \frac{h'(z)\mathrm{d}z}{k^2\Phi(x,y)h(z)} = \frac{h'(z)}{k^2}\mathrm{d}t, \tag{16}$$

从而定义了流线的空间模式• 选择合适的坐标并用(8)、(11)和(16), 我们得到下列微分系统:

$$(\therefore_{\varepsilon})\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\sin x\cos y(\cos z + 2\varepsilon a\cos 2z) - 4\varepsilon b\cos 2x\sin 2y\cos 2z,\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\cos x\sin y(\cos z + 2\varepsilon a\cos 2z) - 4\varepsilon b\sin 2x\cos 2y\cos 2z,\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \cos x\cos y(\sin z + a\varepsilon\sin 2z) + \varepsilon b\cos 2x\cos 2y\sin 2z\cdot\end{cases}$$

速度场为:

$$\Phi(x,y,z) = \cos x\cos y(\sin z + a\varepsilon\sin 2z) + \varepsilon b\cos 2x\cos 2y\sin 2z\cdot \tag{17}$$

我们将于下一节中讨论精确到小参数 ε二阶项的方形单元的流线图形•

2 三维方形单元 Pattern 流

我们首先考虑系统 $(\therefore_{\varepsilon})$, 易知, 如果把 $x=-\pi$ 和 $x=\pi$, $y=-\pi$ 和 $y=\pi$ 以及 $z=-\pi$ 和 $z=\pi$ 相粘合, 系统 $(\therefore_{\varepsilon=0})$ 可以看作是定义在三维环 T^3 上的方程组• 平面 $x=0, \pm\pi$, $y=0, \pm\pi$, $z=0, \pm\pi$, $y=x$ 和 $y=-x$ 是系统 $(\therefore_{\varepsilon=0})$ 的不变平面, 所以我们仅需要在一个三棱柱中研究系统 $(\therefore_{\varepsilon})$ 的动力学行为•

我们注意到系统 $(\therefore_{\varepsilon=0})$ 是一个广义 Hamilton 系统且可写为:

$$\begin{pmatrix}\dot x\\ \dot y\\ \dot z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \sin x\sin y\cos z & -\sin x\cos y\sin z\\ -\sin x\sin y\cos z & 0 & 0\\ \sin x\cos y\sin z & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\cos x}{\sin x}\\[2mm] -\dfrac{\cos y}{\sin y}\\[2mm] 0\end{pmatrix},$$

Hamilton 函数和 Casmir 函数分别为

$$H(x,y,z) = \ln\frac{\sin x}{\sin y} = h^* \tag{18}$$

和

$$C(x,y,z) = \sin y\sin z = c^*\cdot \tag{19}$$

通过坐标变换 $(\cos x, \cos y, \cos z) \to (u, v, w)$, 系统 $(\therefore_{\varepsilon})$ 化为下列形式(记为 $\tilde{\therefore}_{\varepsilon}$):

$$\begin{aligned}\dot u &= (1-u^2)vw + 2\varepsilon av(1-u^2)(2w^2-1) +\\ &\quad 8\varepsilon bv(2u^2-1)(2w^2-1)\sqrt{(1-u^2)(1-v^2)},\\ \dot v &= uw(1-v^2) + 2\varepsilon au(1-v^2)(2w^2-1) +\\ &\quad 8\varepsilon bu(2v^2-1)(2w^2-1)\sqrt{(1-u^2)(1-v^2)},\\ \dot w &= -uv(1-w^2) - 2\varepsilon auvw(1-\omega^2) -\\ &\quad 2\varepsilon bw(2u^2-1)(2v^2-1)(1-w^2)\cdot\end{aligned}$$

相应的 Hamilton 函数和 Casmir 函数分别为

$$H(u,v,w) = \ln\left(\frac{1-v^2}{1-u^2}\right) = 2h^* \tag{20}$$

和

$$C(u,v,w)=(1-v^2)(1-w^2)=c, \tag{21}$$

其中 $c=(c^*)^2$, $h=\exp(-2h^*)$• 限制在辛叶 $C(u,v,w)=c_0$ 上可将 $(\because_\varepsilon)$ 约化为下列慢变系统(记作 Θ_ε):

$$\dot u = w(1-u^2)\left(1-\frac{c_0}{1-w^2}\right)^{1/2}+\varepsilon\left[2a(1-u^2)(2w^2-1)\left(1-\frac{c_0}{1-w^2}\right)+\right.$$
$$\left.8b(2u^2-1)(2w^2-1)(1-u^2)^{1/2}\left(1-\frac{c_0}{1-w^2}\right)^{1/2}\left(\frac{c_0}{1-w^2}\right)^{1/2}\right],$$
$$\dot w = -u(1-w^2)\left(1-\frac{c_0}{1-w^2}\right)^{1/2}-\varepsilon\left[2auw(1-w^2)\left(1-\frac{c_0}{1-w^2}\right)^{1/2}+\right.$$
$$\left.2bw(2u^2-1)(1-w^2)\left(1-\frac{2c_0}{1-w^2}\right)\right],$$
$$\dot c = \varepsilon\left\{4auc_0\left(1-\frac{c_0}{1-w^2}\right)^{1/2}(1-w^2)+4b\left(1-\frac{2c_0}{1-w^2}\right)\left[c_0(2u^2-1)w^2-\right.\right.$$
$$\left.\left.4u(1-w^2)\times(2w^2-1)\left(1-\frac{c_0}{1-w^2}\right)^{1/2}(1-u^2)^{1/2}\left(\frac{c_0}{1-w^2}\right)^{1/2}\right]\right\},$$

其中 $\varepsilon>0$ 充分小, 并且 $ab\neq 0$• 从系统 $(\because_{\varepsilon=0})$ 我们知道 $u=\pm 1$, $v=\pm 1$ 和 $w=\pm 1$ 是未扰向量场的不变平面, 所以我们仅考虑系统在 $0\leqslant |u|<1$, $0\leqslant |v|<1$ 和 $0\leqslant |w|<1$ 的情况• 以下在 (u,w) 平面上的单位正方形 $\left\{(u,w)\in\mathbf{R}^2: 0\leqslant |u|<1,\ 0\leqslant |w|<1\right\}$ 内考虑系统 $(\Theta_{\varepsilon=0})$, 原点 $(0,0)$ 是一个中心型奇点• 对每个固定的 $c=c_0$, 代数方程 $w=\pm\sqrt{1-c_0}$ $(0<c_0<1)$ 是两条奇直线, 因此, 我们只讨论 $|w|<\sqrt{1-c_0}$ 的情况•

对系统 $(\because_\varepsilon)$ 水平曲线

$$(1-w^2)(1-u^2)=c_0h, \qquad 1<h<\frac{1}{c_0}, \tag{22}$$

定义了一族周期轨, 其参数表示为:

$$u(t,k)=\pm\left[1-\frac{c_0h}{1-(1-c_0h)\,\mathrm{sn}^2(\Omega t,k)}\right]^{1/2},$$
$$w(t,k)=\pm\left[1-\frac{c_0h}{1-u^2(t,k)}\right]^{1/2},$$

其中 $\Omega^2=h^2(1-c_0)$, $k^2=(1-c_0h)/(1-c_0)$• $\mathrm{sn}(u,k)$ 是模为 k 的 Jacobi 椭圆函数• 这族周期轨的周期为

$$T=\frac{2K(k)}{\Omega},$$

$K(k)$ 是第一类完全椭圆积分•

根据第一节定理 A, 利用关系

$$w^2=1-\frac{c_0h}{1-u^2},\quad v^2=1-(1/h)+u^2/h,$$

从(4)和(5)我们得到

$$M_1(a,b,c_0,h)=\frac{8bT(1-h)}{\pi h}\left(\int_0^T\sqrt{(h-1+u^2)u^2}\,\mathrm{d}t-\right.$$
$$\left.2hc_0\int_0^T\frac{\sqrt{(h-1+u^2)u^2}}{(1-u^2)}\mathrm{d}t\right)=$$

$$\frac{8bT(1-h)}{\pi h}(I_0-2hc_0I_{-1}),$$

$$M_3(a,b,c_0,h)=(4ac_0^2\sqrt{h}-32bc_0h)\int_0^T\frac{\sqrt{(h-1+u^2)u^2}}{(1-u^2)}\mathrm{d}t+$$
$$(8bc_0+16bc_0^2)\int_0^T u^2\mathrm{d}t+16bc_0(1+4c_0)\int_0^T\sqrt{(h-1+u^2)u^2}\mathrm{d}t-$$
$$\frac{16bc_0}{h}\int_0^T(1-u^2)u^2\mathrm{d}t-\frac{32bc_0}{h}\int_0^T\sqrt{(h-1+u^2)u^2}(1-u^2)\mathrm{d}t-$$
$$4bhc_0\int_0^T\frac{u^2}{1-u^2}\mathrm{d}t+(4bhc_0^2-8bc_0^2)T=$$
$$n_1I_{-1}+n_2I_0-2n_3I_1+n_4J_0-n_5J_{-1}-n_3J_1+n_6,$$

其中

$$n_1=4ac_0^2\sqrt{h}-32bc_0h,\quad n_2=16bc_0(1+4c_0),\quad n_3=\frac{16bc_0}{h},$$
$$n_4=8bc_0+16bc_0^2,\quad n_5=4bhc_0,\quad n_6=T(4bhc_0^2-8bc_0^2);$$
$$I_i=\int_0^T\sqrt{(h-1+u^2)u^2}(1-u^2)^i\mathrm{d}t,$$
$$J_i=\int_0^T(1-u^2)^iu^2\mathrm{d}t,\qquad(i=-1,0,1)\cdot$$

令 $M_1=0$, 得到

$$I_0=2hc_0I_{-1}\cdot\tag{23}$$

当 $I_0=2hc_0I_{-1}$ 时, 令 $M_3=0$, 从而

$$m_1I_{-1}-2m_2I_1+m_3J_0-m_4J_{-1}-m_2J_1+m_5=0,\tag{24}$$

其中

$$m_1=4ac_0^2\sqrt{h}+128bhc_0^3,\quad m_2=\frac{16bc_0}{h},$$
$$m_3=8bc_0+16bc_0,\quad m_4=4bhc_0^2,\quad m_5=(4bhc_0^2-8bc_0^2)T\cdot$$

因此, 对于 $c_0\in(0,1)$ 和 $h\in(1,1/c_0)$, 如果存在 (a_0,b_0,c_0,h) 满足(23) 和(24), 并且 $\partial(M_1,M_3)/\partial(c_0,h)\neq0$, 对于充分小的 ε 系统(∴ε) 就存在一个周期解• 根据定理A, 我们有下面的结论:

定理 B 如果存在 (a_0,b_0,c_0,h), $c_0\in(0,1)$, $h\in(1,1/c_0)$ 使得(23) 和(24) 成立, 并且 $\partial(M_1,M_3)/\partial(c_0,h)|_{(a_0,b_0,c_0,h)}\neq0$, 那么, 对于充分小的 ε, 系统(∴ε) 在辛叶 $C(u,v,w)=c_0$ 上存在周期解•

定理 B 严格地给出了系统(17) 周期流线的存在性条件, 这与文[1] 中的实验结果相吻合•

[参 考 文 献]

[1] Jenkins D R. Interpretation of shadowgraph patterns in Rayleigh_Benard convection[J]. J Fluid Mech, 1988, **190**: 451—469.

[2] Stuart J T. On the cellular patterns in thermal convection[J]. J Fluid Mech, 1964, **18**: 481—498.

[3] 李继彬, 赵晓华, 刘正荣. 广义哈密顿系统理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 1994.

[4] LI Ji_bin, Christie J R, Gopalsamy K. Perturbed generalized Hamiltonian systems and some advection models[J]. Bull Austral Math Soc, 1998, **57**: 1—24.

[5] Palm E. On the tendency towards hexagonal cells in steady convection[J]. J Fluid Mech, 1960, **8**: 183—192.

[6] Zaslavsky G M, Sageer R Z, Vsikov D A, et al. Weak Chaos and Quasi_Regular Patterns[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.

[7] Stuart J T. The Lagrangian picture of fluid motion and its implication for flow structures[J]. IMA J Appl Math, 1991, **46**: 147—163.

Periodic Stream Lines in the Three_Dimensional Square Cell Pattern

LI Ji_bin, DUAN Wan_suo

(Center for Nonlinear Science Studies, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650093, P R China)

Abstract: By using the theory of the generalized perturbed Hamiltonian systems, it is shown that there exist periodic stream lines in the three_dimensional square cell pattern of Rayleigh_Benard convection. The result means that our method enables this three_dimensional flow pattern to be described in an unambiguous manner, and some experimental results of other authors can be explained.

Key words: Rayleigh_Benard convection; periodic solutions; Hamiltonian systems; square cell pattern