应用数学和力学, 第 22 卷 第 2 期(2001 年 2 月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2001) 02_0199_07

含两参数的三阶拟线性常微分方程边值问题的奇摄动*

林苏榕[1], 田根宝[2], 林宗池[3]

(1. 福建广播电视大学 数学科, 福州 350003; 2. 上海铁道大学 数学系, 上海 200333;
3. 福建师范大学 数学系, 福州 350007)

(我刊编委林宗池来稿)

摘要: 研究含两参数的三阶拟线性常微分方程奇摄动边值问题• 采用两阶段展开的方法, 对 $\varepsilon/\mu^2\to 0(\mu\to 0)$; $\mu^2/\varepsilon\to 0(\varepsilon\to 0)$ 和 $\varepsilon=\mu^2$ 三种情形构造出形式渐近解, 同时利用微分不等式方法, 证明了解的存在性, 并给出余项的一致有效的估计•

关 键 词: 双参数; 奇摄动; 边值问题; 渐近展开
中图分类号: O175.3 文献标识码: A

引 言

关于二阶常微分方程的奇摄动边值问题, 大量的工作是只研究含一个小参数的情形[1~4], 仅有少量的工作含两参数的情形[5~8], 至于含两参数的三阶常微分方程奇摄动边值问题[9], 则更少见• 本文研究含两参数的三阶拟线性常微分方程奇摄动边值问题:

$$\varepsilon y''' + \mu f(x,y)y'' = g(x,y,y',\varepsilon,\mu), \tag{1}$$

$$y(0) = a(\varepsilon,\mu),\quad y'(0) = b(\varepsilon,\mu),\quad y'(1) = c(\varepsilon,\mu), \tag{2}$$

其中 $\varepsilon>0$, $\mu>0$ 为小参数• 虽然小参数 ε 和 μ 都对边界层有影响, 但在 $\varepsilon/\mu^2\to 0(\mu\to 0)$, $\mu^2/\varepsilon\to 0(\varepsilon\to 0)$ 和 $\varepsilon=\mu^2$ 三种不同的情形, 其影响的程度并不相同, 这就引起了构造问题 (1)、(2) 的解的渐近式的困难• 本文将采用两阶段展开的方法, 对上述的三种情形构造出解的形式展开式, 并利用微分不等式方法, 证明了解的存在性, 同时给出余项的一致有效的估计•

文中恒假设以下条件成立:

(Ⅰ) $f(x,y)$ 于 $[0,1]\times R$ 上, $g(x,y,y',\varepsilon,\mu)$ 于 $[0,1]\times R^2\times[0,\varepsilon_0]\times[0,\mu_0]$ 上, $a(\varepsilon,\mu)$, $b(\varepsilon,\mu)$ 和 $c(\varepsilon,\mu)$ 于 $[0,\varepsilon_0]\times[0,\mu_0]$ 上适当光滑, 例如, $N+2$ 次连续可微, 其中 N 为任意给定的正整数, ε_0、μ_0 是两个小正数;

(Ⅱ) 存在正数 $m_i(i=1,2)$, 使得 $f(x,y)\leqslant -m_1$,
$g_y(x,y,y',\varepsilon,\mu)$, $g_{y'}(x,y,y',\varepsilon,\mu)\geqslant m_2$;

* 收稿日期: 1999_09_10; 修订日期: 2000_09_10
作者简介: 林苏榕(1958—) , 女, 福建福州人, 副教授, 已发表论文 20 多篇;
林宗池(1930—) , 男, 福建永泰县人, 教授, 副博士, 已发表论文 120 多篇, 专著 3 本.

(Ⅲ) 退化问题:

$$g(x, y, y', 0, 0) = 0,\quad y(0) = A(0, 0)$$

于 $[0, 1]$ 上有唯一解 $y(x)$.

1　构造形式渐近解

1. $\varepsilon/\mu^2 \to 0\ (\mu \to 0)$ 的情形

为了构造(1)、(2)的形式渐近解, 令 $\varepsilon = \varepsilon_1\mu^2$, 则问题(1)、(2)化为

$$\varepsilon_1\mu^2 y''' + f(x, y)y'' = G(x, y, y', \varepsilon_1, \mu), \tag{3}$$

$$y(0) = A(\varepsilon_1, \mu),\quad y'(0) = B(\varepsilon_1, \mu),\quad y'(1) = C(\varepsilon_1, \mu), \tag{4}$$

其中 $G(x, y, y', \varepsilon_1, \mu) = g(x, y, y', \varepsilon_1\mu^2, \mu)$, $A(\varepsilon_1, \mu) = a(\varepsilon_1\mu^2, \mu)$, $B(\varepsilon_1, \mu) = b(\varepsilon_1\mu^2, \mu)$, $C(\varepsilon_1, \mu) = c(\varepsilon_1\mu^2, \mu)$.

先把(3)、(4)看成只含小参数 ε_1 的奇摄动边值问题, 从而设想其解 $y(x, \varepsilon_1, \mu)$ 具有如下形式:

$$y(x, \varepsilon_1, \mu) = \bar{y}(x, \varepsilon_1, \mu) + \varepsilon_1 u(t, \varepsilon_1, \mu), \tag{5}$$

其中 $\bar{y}(x, \varepsilon_1, \mu)$ 是外解, $u(t, \varepsilon_1, \mu)$ 为边界层函数, $t = (1 - x)/\varepsilon_1$, 且

$$\bar{y}(x, \varepsilon_1, \mu) \sim \sum_{i=0}^{N+2}\varepsilon_1^i y_i(x, \mu),\quad u(t, \varepsilon_1, \mu) \sim \sum_{i=0}^{N+2}\varepsilon_1^i u_i(t, \mu). \tag{6a, b}$$

把(5)代入(3)、(4), 并把 x 和 t 分别视为独立变量, 再考虑到 $u(t, \varepsilon_1, \mu)$ 是边界层函数, 认为当 $t \to +\infty$ 时, $u(t, \varepsilon_1, \mu)$ 关于 t 指数式地趋于零, 从而当 $\varepsilon_1 > 0$ 充分小时, $u(1/\varepsilon_1, \varepsilon_1, \mu)$ 可以忽略, 于是便可得到 $\bar{y}(x, \varepsilon_1, \mu)$ 和 $u(t, \varepsilon_1, \mu)$ 所满足的方程和定解条件:

$$\varepsilon_1\mu^2\bar{y}''' + f(x, \bar{y} + \varepsilon_1 u)\bar{y}'' = G(x, \bar{y}, \bar{y}', \varepsilon_1, \mu), \tag{7}$$

$$\bar{y}(0, \varepsilon_1, \mu) = A(\varepsilon_1, \mu),\quad \bar{y}'(0, \varepsilon_1, \mu) = B(\varepsilon_1, \mu), \tag{8}$$

$$\begin{aligned} -\mu^2\dddot{u} + f(1 - \varepsilon_1 t, \bar{y}(1 - \varepsilon_1 t) + \varepsilon_1 u(t))\ddot{u} = {} & \\ \varepsilon_1[G(1 - \varepsilon_1 t, \bar{y} + \varepsilon_1 u, \bar{y}' + \dot{u}, \varepsilon_1, \mu) - {} & \\ G(1 - \varepsilon_1 t, \bar{y}, \bar{y}', \varepsilon_1, \mu)], & \end{aligned} \tag{9}$$

且

$$\left.\begin{aligned} &\dot{u}(0, \varepsilon_1, \mu) = C(\varepsilon_1, \mu) - \bar{y}'(1, \varepsilon_1, \mu), \\ &u(+\infty, \varepsilon_1, \mu) = 0,\quad \dot{u}(+\infty, \varepsilon_1, \mu) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

其中　$\dot{u} = \mathrm{d}u/\mathrm{d}t, \cdots$.

把(6a)代入(7)、(8), 并把右端函数按 ε_1 幂作形式展开, 比较 ε_1 的同次幂, 得到

$$f(x, y_0)y_0'' = G(x, y_0, y_0', 0, \mu), \tag{11}$$

$$f(x, y_0)y_i'' = G_{y'}(x, y_0, y_0', 0, \mu)y_i' + G_y(x, y_0, y_0', 0, \mu)y_i + p_i, \tag{12$_i$}$$

$$y_i(0, \mu) = A_i(\mu),\ y_i'(0, \mu) = B_i(\mu)\qquad (i = 0, 1, \cdots, N), \tag{13$_i$}$$

其中 p_i 是 $x, y_0, y_1, \cdots, y_{i-1}$ 及其 1～3 阶导数的逐步确定的函数;

$$A_i(\mu) = \frac{1}{i!}\frac{\partial^i}{\partial\varepsilon_1^i}A(\varepsilon_1, \mu)\Big|_{\varepsilon_1=0}.$$

类似地, 把(6a, b)代入(9)、(10), 可以得到:

$$-\mu^2\dddot{u}_0 + f(1, y_0(1, \mu))\ddot{u}_0 = 0, \tag{14$_0$}$$

$$-\mu^2\dddot{u}_i + f(1, y_0(1, \mu))\ddot{u}_i = G_{y'}(\cdot)\dot{u}_{i-1} + G_y(\cdot)u_{i-2} + q_{i-1}, \tag{14$_i$}$$

且

$$\left.\begin{aligned} &\dot{u}_i(0, \mu) = C_i(\mu) - y_i'(1 - \mu), \\ &u_i(+\infty, \mu) = 0,\quad \dot{u}_i(+\infty, \mu) = 0\qquad (i = 0, 1, \cdots, N + 1), \end{aligned}\right\} \tag{15$_i$}$$

其中 $(\cdot)=(1,y_0(1,\mu),y_0'(1,\mu),0,\mu)$; q_{i-1} 是 $u_0,u_1,\cdots,u_{i-1}$ 的逐步确定的函数,

$$C_i(\mu)=\frac{1}{i!}\frac{\partial^i}{\partial\varepsilon_1^i}C(\varepsilon_1,\mu)\mid_{\varepsilon_1=0}\cdot$$

对每一个 $i(0\leqslant i\leqslant N)$, $(11)\sim(13)_i$ 都是以 μ 为参数的奇摄动边值问题, 因此, 设想其解为如下形式:

$$y_i(x,\mu)=\hat{y}_i(x,\mu)+\mu v_i(s,\mu), \tag{16$_i$}$$

其中 $s=x/\mu$, $v_i(s,\mu)$ 是边界层函数, 并且

$$\hat{y}_i(x,\mu)\sim\sum_{j=0}^{N+2}\mu^j\hat{y}_{i,j}(x),\ v_i(s,\mu)\sim\sum_{j=0}^{N+2}\mu^j v_{i,j}(s), \tag{17a, b}$$

按照上面类似的做法, 我们得到 $\hat{y}_{i,j}(x)$ 和 $v_{i,j}(s)$ 所满足的方程和初值条件:

$$G(x,\hat{y}_{00},\hat{y}_{00}',0,0)=0,\ \hat{y}_{00}(0)=A_{00}, \tag{18}$$

$$G_{y'}(\cdot\cdot)\hat{y}_{0j}'+G_y(\cdot\cdot)\hat{y}_{0j}=p_{0j},\ \hat{y}_{0j}(0)=A_{0j}, \tag{19$_i$}$$

$$G_{y'}(\cdot\cdot)\hat{y}_{ij}'+G_y(\cdot\cdot)\hat{y}_{ij}=p_{ij},\ \hat{y}_{ij}(0)=A_{ij}, \tag{20$_i$}$$

其中 p_{0j} 是 $x,\hat{y}_{00}(x),\cdots,\hat{y}_{0,j-1}(x)$ 的函数; p_{ij} 是 $x,\hat{y}_{00}(x),\cdots,\hat{y}_{0j}(x),\hat{y}_{10}(x),\cdots,\hat{y}_{i-1,0}(x)$, $\cdots,\hat{y}_{i-1,j}(x),\hat{y}_{i0}(x),\cdots,\hat{y}_{i,j-1}(x)$ 的函数, $(\cdot\cdot)=(x,\hat{y}_{00},\hat{y}_{00}',0,0)\cdot$

$$f(0,\hat{y}_{00}(0))\ddot{v}_{00}(s)-G_{y'}(0,\hat{y}_{00}(0),\hat{y}_{00}'(0),0,0)\dot{v}_{00}(s)=0, \tag{21$_0$}$$

$$f(0,\hat{y}_{00}(0))\ddot{v}_{ij}(s)-G_{y'}(0,\hat{y}_{00}(0),\hat{y}_{00}'(0),0,0)\dot{v}_{ij}(s)=Q_{ij}, \tag{21$_i$}$$

$$\dot{v}_{ij}(0)=B_{ij}-\hat{y}_{ij}'(0)\ 且\ v_{ij}(+\infty)=0,\ \dot{v}_{ij}(+\infty)=0, \tag{22$_i$}$$

$$(i=0,1,\cdots,N;\ j=0,1,\cdots,N-i),$$

其中 Q_{ij} 是 $s,v_{00},\cdots,v_{0j},\cdots,v_{i-1,0},\cdots,v_{i-1,j},v_{i0},\cdots,v_{i,j-1}$ 的逐次已知的函数,

$$B_{ij}=\frac{1}{j!}\frac{\partial^j}{\partial\mu^j}B_i(\mu)\mid_{\mu=0}\cdot$$

对每个 $i(0\leqslant i\leqslant N+1)$, $(14)_0\sim(15)_i$ 是以 μ 为小参数的奇摄动边值问题· 但是经过变换 $t=\mu\tau$, $U_i(\tau,\mu)=u(\mu\tau,\mu)$, 则 $(14)_0\sim(15)_i$ 化为以 μ 为小参数的正则摄动边值问题:

$$-\dddot{U}_0(\tau)+f(1,y_0(1,\mu))\ddot{U}_0(t)=0, \tag{23$_0$}$$

$$-\dddot{U}_i(\tau)+f(1,y_0(1,\mu))\ddot{U}_i(\tau)=G_{y'}(\cdot)\dot{U}_{i-2}(\tau)+G_y(\cdot)U_{i-3}(\tau)+Q_{i-2}, \tag{23$_i$}$$

且
$$\left.\begin{aligned}&\dot{U}_i(0,\mu)=\mu[C_i(\mu)-y_i'(1,\mu)],\\&U_i(+\infty,\mu)=0,\ \dot{U}_i(+\infty,\mu)=0\qquad(i=0,1,\cdots,N+1)\cdot\end{aligned}\right\} \tag{24$_i$}$$

于是设其解为

$$U_i(\tau,\mu)=U_{i0}(\tau)+\mu U_{i1}(\tau)+\mu^2U_{i2}(\tau)+\cdots\cdot \tag{25$_i$}$$

将 $(25)_i$ 代入 $(23)_0\sim(24)_i$, 并把右端函数按 μ 的幂作形式展开, 比较 μ 的同次幂, 得到:

$$\dddot{U}_{0j}(\tau)-f(1,\hat{y}_{00}(1))\ddot{U}_{0j}(\tau)=0\qquad(j=0,1,\cdots,N+1), \tag{26$_0$}$$

$$\dddot{U}_{ij}(\tau)-f(1,\hat{y}_{00}(1))\ddot{U}_{ij}(\tau)=G_{y'}(\sim)\dot{U}_{i-2,j}(\tau)-G_y(\sim)U_{i-3,j}(\tau)+Q_{i-2,j}, \tag{26$_i$}$$

$$\dot{U}_{ij}(0)=C_{i,j-1}-\hat{y}_{i,j-1}'(1)\ 且\ U_{ij}(+\infty)=0,\ \dot{U}_{ij}(+\infty)=0, \tag{27$_i$}$$

$(i=0,1,\cdots,N+1;\ j=0,1,\cdots,N-i+1;\ (\sim)=(1,\hat{y}_{00}(1),\hat{y}_{00}'(1),0,0))\cdot$

有了上面的递推方程和初值条件, 我们可逐次地求得外解 $\hat{y}_{ij}(x)$ 和边界层函数 $v_{ij}(s)$ 和 $U_{ij}(\tau)$, 例如, 根据假设条件(Ⅲ) 知, (18) 式有解 $\hat{y}_{00}(x)$, 而 $(19)_i\sim(20)_i$ 是一阶线性非齐次方程初值问题, 由假设条件(Ⅰ)、(Ⅱ) 可逐次求得其解 $\hat{y}_{ij}(x)\in C^3[0,1]\cdot$ 又根据条件(Ⅱ) 知,

$(21)_0$ 有一个负的特征根 $\lambda = G_{y'}(0, \hat{y}_{00}(0), \hat{y}'_{00}(0), 0, 0)/f(1, \hat{y}_{00}(0)) \equiv -\delta_0 < 0$, 故 $(21)_0 \sim (22)_0$ 有一个指数式衰减的解 $v_{00}(s)$, 且 $|v_{00}(s)| \leqslant M_0 e^{-\delta_0 s}$, $M_0 > 0$. 根据 Q_{ij} 的结构知, 存在 $M_1 > 0$, $\delta_1 > 0$, 使得 $|Q_{ij}| \leqslant M_1 e^{-\delta_1 s}$, 再由常系数二阶线性非齐次方程解的结构表达式又可逐次地求得 $v_{ij}(s)$, 且 $|v_{ij}(s)| \leqslant M_i e^{-\delta_i s}$, $M_i > 0$, $\delta_i > 0$. 类似地, $(26)_0$ 有一个负的特征根 $\lambda = f(1, \hat{y}_{00}(1)) \leqslant -m_1 < 0$, 而 $(26)_i$ 右端是指数式衰减的函数. 因此, 又可逐次地求出指数式衰减的函数 $U_{ij}(\tau)$, 且 $|U_{ij}(\tau)| \leqslant k_i e^{-\sigma_i \tau}$, $k_i > 0$, $\sigma_i > 0$, $i = 0, 1, \cdots, N+1$, $j = 0, 1, \cdots, N-i+1$.

下面利用微分不等式方法对余项进行估计. 令

$$Y_N(x, \varepsilon_1, \mu) = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{i}\left[\hat{y}_{i-j,j}(x) + \mu v_{i-j,j}\left(\frac{x}{\mu}\right) + \varepsilon_1 U_{i-j,j}\left(\frac{1-x}{\varepsilon_1 \mu}\right)\right]\varepsilon_1^{i-j}\mu^j,$$

其中 $\hat{y}_{ij}(x)$ 为外解, $v_{ij}(s)$、$U_{ij}(\tau)$ 为边界层函数, 已由上述确定. 根据 $Y_N(x, \varepsilon_1, \mu)$ 的定义知, 存在 $R_0 > |A_{N+1-j,j}| + |B_{N+1-j,j}| + |C_{N+1-j,j}|$, 使得当 $\varepsilon_1 > 0$, $\mu > 0$ 充分小时, 有

$$|\varepsilon_1 \mu^2 Y_N''' + \mu f(x, Y_N) Y_N'' - G(x, Y_N, Y_N', \varepsilon_1, \mu)| \leqslant R_0\left(\sum_{j=0}^{N+1}\varepsilon_1^{N+1-j}\mu^j\right).$$

现构造上下解函数: 令

$$\alpha(x, \varepsilon_1, \mu) = Y_N(x, \varepsilon_1, \mu) - \frac{R_0}{m_2}\left(\sum_{j=0}^{N+1}\varepsilon_1^{N+1-j}\mu^j\right),$$

$$\beta(x, \varepsilon_1, \mu) = Y_N(x, \varepsilon_1, \mu) + \frac{R_0}{m_2}\left(\sum_{j=0}^{N+1}\varepsilon_1^{N+1-j}\mu^j\right),$$

则有 $\alpha(x, \varepsilon_1, \mu) \leqslant \beta(x, \varepsilon_1, \mu)$, $\alpha'(x, \varepsilon_1, \mu) = \beta'(x, \varepsilon_1, \mu)$, 并且当 $\varepsilon_1 > 0$, $\mu > 0$ 充分小时有

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_1 \mu^2 \beta''' + \mu f(x, \beta)\beta'' - G(x, \beta, \beta', \varepsilon_1, \mu) = \\
&\quad \varepsilon_1 \mu^2(\beta - Y_N)''' + \mu f(x, Y_N)(\beta - Y_N)'' + \varepsilon_1 \mu^2 Y_N''' + \\
&\quad \mu f(x, Y_N) Y_N'' - G(x, \beta, \beta', \varepsilon_1, \mu) + G(x, \beta, Y_N', \varepsilon_1, \mu) - \\
&\quad G(x, \beta, Y_N', \varepsilon_1, \mu) + G(x, Y_N, Y_N', \varepsilon_1, \mu) - G(x, Y_N, Y_N', \varepsilon_1, \mu) = \\
&\quad \varepsilon_1 \mu^2(\beta - Y_N)''' + \mu f(x, Y_N)(\beta - Y_N)'' - \\
&\quad \int_0^1 G_{y'}(x, \beta, Y_N' + \theta(\beta' - Y_N'), \varepsilon_1, \mu)\,d\theta(\beta' - Y_N') - \\
&\quad \int_0^1 G_y(x, Y_N + \theta(\beta - Y_N), Y_N', \varepsilon_1, \mu)\,d\theta(\beta - Y_N) + \\
&\quad [\varepsilon_1 \mu^2 Y_N''' + \mu f(x, Y_N) Y_N'' - G(x, Y_N, Y_N', \varepsilon_1, \mu)] \leqslant \\
&\quad -\varepsilon_1 \mu^2(\beta - Y_N)''' - \mu m_1(\beta - Y_N)'' - m_2(\beta - Y_N)' - \\
&\quad m_2(\beta - Y_N) + R_0\left(\sum_{j=0}^{N+1}\varepsilon_1^{n+1-j}\mu^j\right) = 0,
\end{aligned}$$

同理有

$$\varepsilon_1 \mu^2 \alpha''' + \mu f(x, \alpha)\alpha'' - G(x, \alpha, \alpha', \varepsilon_1, \mu) \geqslant 0,$$

此外, 易证当 $\varepsilon_1 > 0$, $\mu > 0$ 充分小时, 还有

$$\alpha(0, \varepsilon_1, \mu) \leqslant A(\varepsilon_1, \mu) \leqslant \beta(0, \varepsilon_1, \mu),$$

$$\alpha'(0, \varepsilon_1, \mu) \leqslant B(\varepsilon_1, \mu) \leqslant \beta'(0, \varepsilon_1, \mu),$$

$$\alpha'(1, \varepsilon_1, \mu) \leqslant C(\varepsilon_1, \mu) \leqslant \beta'(1, \varepsilon_1, \mu).$$

于是根据微分不等式定理[10]知, 当 $\varepsilon_1 > 0$, $\mu > 0$ 充分小时边值问题(3)、(4) 有解 $y(x, \varepsilon_1, \mu)$

满足不等式 $\alpha(x,\varepsilon_1,\mu) \leqslant y(x,\varepsilon_1,\mu) \leqslant \beta(x,\varepsilon_1,\mu)$. 由此得估计式:

$$|y(x,\varepsilon_1,\mu) - Y_N(x,\varepsilon_1,\mu)| \leqslant \frac{R_0}{m_2}\left(\sum_{j=0}^{N+1}\varepsilon_1^{N+1-j}\mu^j\right). \tag{28}$$

综上所述,我们有如下定理.

定理 1 假设条件(Ⅰ)~(Ⅲ)成立,则对于充分小的 $\varepsilon_1>0$, $\mu>0$, 边值问题(3)、(4)有唯一解 $y(x,\varepsilon_1,\mu)$, 满足估计式(28).

2. $\mu^2/\varepsilon \to 0(\varepsilon \to 0)$ 的情形

令 $\mu^2=\varepsilon\varepsilon_1$, $\varepsilon_2=\sqrt{\varepsilon}$, $\varepsilon_3=\sqrt{\varepsilon_1}$, 则问题(1)、(2)化为:

$$\varepsilon_2^2 y''' + \varepsilon_2\varepsilon_3 f(x,y)y'' = G(x,y,y',\varepsilon_2,\varepsilon_3), \tag{29}$$

$$y(0)=A(\varepsilon_2,\varepsilon_3),\quad y'(0)=B(\varepsilon_2,\varepsilon_3),\quad y'(1)=C(\varepsilon_2,\varepsilon_3), \tag{30}$$

其中 $G(x,y,y',\varepsilon_2,\varepsilon_3)=g(x,y,y',\varepsilon_2^2,\varepsilon_2\varepsilon_3)$, $A(\varepsilon_2,\varepsilon_3)=a(\varepsilon_2^2,\varepsilon_2\varepsilon_3)$, $B(\varepsilon_2,\varepsilon_3)=b(\varepsilon_2^2,\varepsilon_2\varepsilon_3)$, $C(\varepsilon_2,\varepsilon_3)=c(\varepsilon_2^2,\varepsilon_2\varepsilon_3)$.

先把(29)、(30)视为 ε_3 引起的正则摄动问题,并设想其解为

$$y(x,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=y_0(x,\varepsilon_2)+\varepsilon_3 y_1(x,\varepsilon_2)+\varepsilon_3^2 y_2(x,\varepsilon_2)+\cdots. \tag{31}$$

把(31)代入(29)~(30),并把右端函数按 ε_3 的幂作形式展开,然后令两端 ε_3 的同次幂的系数相等,则得 $y_i(x,\varepsilon_2)$ 所满足的方程和边界条件:

$$\varepsilon_2^2 y_0''' = G(x,y_0,y_0',\varepsilon_2,0), \tag{32}$$

$$\varepsilon_2^2 y_i''' + \varepsilon_2 f(x,y)y_{i-1}'' = G_{y'}(\cdot)y_i' + G_y(\cdot)y_i + p_i \qquad (i=1,2,\cdots,N), \tag{33}$$

$$y_i(0,\varepsilon_2)=A_i(\varepsilon_2),\quad y_i'(0)=B_i(\varepsilon_2),\quad y_i'(1)=C_i(\varepsilon_2) \qquad (i=0,1,\cdots,N), \tag{34$_i$}$$

其中 p_i 是 x, y_0, $\cdots$, y_{i-1} 和 ε_2 的函数;

$$A_i(\varepsilon_2)=\frac{1}{i!}\frac{\partial^i}{\partial\varepsilon_3^i}A(\varepsilon_2,\varepsilon_3)\Big|_{\varepsilon_3=0};$$

$B_i(\varepsilon_2)$, $C_i(\varepsilon_2)$ 的表达式类同, $(\cdot)=(x,y_0,y_0',\varepsilon_2,0)$.

对于每一个 $i(0\leqslant i\leqslant N)$, (32)~(34)$_i$ 是以 ε_2 为小参数的奇摄动边值问题, 故设其解 $y_i(x,\varepsilon_2)$ 具有如下形式:

$$y_i(x,\varepsilon_2)=\hat{y}_i(x,\varepsilon_2)+\varepsilon_2 u_i(t,\varepsilon_2)+\varepsilon_2 v_i(s,\varepsilon_2)+\cdots, \tag{35}$$

其中 $t=x/\varepsilon_2$, $s=(1-x)/\varepsilon_2$; $u_i(t,\varepsilon_2)$ 和 $v_i(s,\varepsilon_2)$ 分别为 $x=0$ 和 $x=1$ 处的边界层函数,并且

$$\left.\begin{aligned}&\hat{y}_i(x,\varepsilon_2)\sim\sum_{j=0}^{N+2}\varepsilon_2^j\hat{y}_{ij}(x),\quad u_i(t,\varepsilon_2)\sim\sum_{j=0}^{N+2}\varepsilon_2^j u_{ij}(t),\\&v_i(s,\varepsilon_2)\sim\sum_{j=0}^{N+2}\varepsilon_2^j v_{ij}(s).\end{aligned}\right\} \tag{35$_i$}$$

类似于前面的做法,把(35)、(35)$_i$ 代入(32)~(34)$_i$,并顾及 $u_i(t,\varepsilon_2)$、$v_i(s,\varepsilon_2)$ 是边界层函数,当 $t\to+\infty$, $s\to+\infty$ 时, u_i 关于 t, v_i 关于 s 是指数式地趋于零;从而当 $\varepsilon_2>0$ 充分小时, $u_i(1/\varepsilon_2,\varepsilon_2)$, $v_i(1/\varepsilon_2,\varepsilon_2)$ 可以忽略,于是可得 $\hat{y}_{ij}(x)$, $u_{ij}(t)$ 和 $v_{ij}(s)$ 所满足的方程和边界条件:

$$G(x,\hat{y}_{00}(x),\hat{y}_{00}'(x),0,0)=0, \tag{36$_0$}$$

$$\left.\begin{aligned}&G_{y'}(\cdot\cdot)\hat{y}_{0j}'(x)+G_y(\cdot\cdot)\hat{y}_{0j}(x)=\hat{y}_{0,j-2}'''+p_{0j},\\&G_{y'}(\cdot\cdot)\hat{y}_{ij}'(x)+G_y(\cdot\cdot)\hat{y}_{ij}(x)=\hat{y}_{i,j-2}'''(x)+f(x,\hat{y}_{(00)}(x))\hat{y}_{i-1,j-1}(x)+p_{ij},\end{aligned}\right\} \tag{36$_i$}$$

$$\hat{y}_{ij}(0) = A_{ij} \qquad (i = 0, 1, \cdots, N, j = 0, 1, \cdots, N - i), \tag{37$_i$}$$

其中 p_{0j}, p_{ij} 分别是 $x, \hat{y}_{00}(x), \cdots, \hat{y}_{0,j-1}(x)$ 和 $x, \hat{y}_{00}(x), \cdots, \hat{y}_{0j}(x), \cdots, \hat{y}_{i-1,0}(x), \cdots, \hat{y}_{i-1,j}(x), \hat{y}_{i0}(x), \cdots, \hat{y}_{i,j-1}(x)$ 的函数•

$$A_{ij} = \frac{1}{j!}\frac{\partial^j}{\partial \varepsilon_2^j} A_i(\varepsilon_2) \mid_{\varepsilon_2 = 0}, \quad (\bullet\bullet) = (x, \hat{y}_{00}(x), \hat{y}'_{00}(x), 0, 0) \bullet$$

$$u'''_{00}(t) = G'_{y'}(\cdots)\, u'_{00}(t), \tag{38$_0$}$$

$$u'''_{ij}(t) = G'_{y'}(\cdots)\, u'_{ij}(t) + q_{ij}, \tag{38$_i$}$$

$$u'_{ij}(0) = B_{ij} - \hat{y}_{ij}(0),\ 且\ u_{ij}(+\infty) = 0,\ u'_{ij}(+\infty) = 0,$$
$$(i = 0, 1, \cdots, N;\ j = 0, 1, \cdots, N - i), \tag{39$_i$}$$

其中 q_{ij}, B_{ij} 与 p_{ij}, A_{ij} 类同• $(\cdots) = (0, \hat{y}_{00}(0), \hat{y}'_{00}(0) + \theta u'_{00}(0), 0, 0)$•

$$v'''_{00}(s) = G'_{y'}(\sim)\, v'_{00}(s), \tag{40$_0$}$$

$$\left.\begin{aligned} &v'''_{ij}(s) = G'_{y'}(\sim)\, v'_{ij}(s) + r_{ij},\ v'_{ij}(0) = C_{ij} - \hat{y}'_{ij}(1), \\ 且\quad &v_{ij}(+\infty) = 0, v'_{ij}(+\infty) = 0 \qquad (i = 0, 1, \cdots, N; j = 0, 1, \cdots, N - i), \end{aligned}\right\} \tag{40$_i$}$$

其中 r_{ij} 与 q_{ij} 类似; $(\sim) = (1, \hat{y}_{00}(1), \hat{y}'_{00}(1) + \theta v'_{00}(0), 0, 0)$•

类似于前面的做法, 根据假设条件(Ⅰ)~(Ⅲ) 可逐次地由一阶线性方程初值问题$(36)_0$ ~ $(37)_i$ 解出 $\hat{y}_{ij}(x) \in C^3[0, 1]$• 又因$(38)_0$有一个负的特征根 $\lambda = -\sqrt{G'_{y'}(\cdots)}$, 因此, $(38)_0$~$(39)_0$ 有一个指数式衰减的解 $u_{00}(t)$• 由 q_{ij} 的结构知它也是指数式衰减的函数, 因此, 由$(38)_i$、$(39)_i$ 可逐次地求得指数式衰减的函数 $u_{ij}(t)$• 类似地, 可从$(40)_0$ ~ $(40)_i$ 逐次地求得指数式衰减的函数 $v_{ij}(s)$• 类似于定理 1 的证明, 我们有下列定理•

定理 2 假设条件(Ⅰ)~(Ⅲ) 成立, 则对充分小的 $\varepsilon_2 > 0$、$\varepsilon_3 > 0$, 边值问题(29)、(30) 有解 $y(x, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ 满足估计式:

$$| y(x, \varepsilon_2, \varepsilon_3) - Y_N(x, \varepsilon_2, \varepsilon_3) | \leqslant M\left(\sum_{j=0}^{N+1} \varepsilon_2^{N+1-j}\varepsilon_3^j\right),$$

其中
$$Y_N(x, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{i}\left[\hat{y}_{ij}(x) + \varepsilon_2 u_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon_2}\right) + \varepsilon_2 v_{ij}\left(\frac{1-x}{\varepsilon_2}\right)\right]\varepsilon_2^{i-j}\varepsilon_3^j,$$

$\hat{y}_{ij}(x)$ 为外解, $u_{ij}(t)$、$v_{ij}(s)$ 为边界层函数, $M > 0$ 为常数•

3. $\varepsilon = \mu^2$ 的情形

当 $\varepsilon = \mu^2$ 时, 问题(1)、(2) 化为

$$\mu^2 y''' + \mu f(x, y) y'' = G(x, y, y', \mu), \tag{41}$$

$$y(0) = A(\mu),\ y'(0) = B(\mu),\ y'(1) = C(\mu), \tag{42}$$

其中 $G(x, y, y', \mu) = g(x, y, y', \mu^2, \mu), A(\mu) = a(\mu^2, \mu), B(\mu) = b(\mu^2, \mu), C(\mu) = c(\mu^2, \mu)$•

(41)、(42) 是单参数奇摄动问题, 因此按通常边界层函数展开法就可得下面的定理•

定理 3 假设条件(Ⅰ)~(Ⅲ) 成立, 则当 $\mu > 0$ 充分小时, 边值问题(41)、(42) 有一个解 $y(x, \mu)$ 满足估计式

$$| y(x, \mu) - Y_N(x, \mu) | \leqslant M\mu^{N+1},$$

其中 M 是与 μ 无关的正数,

$$Y_N(x, \mu) = \sum_{i=0}^{N}[y_i(x) + \mu u_i(x/\mu) + \mu v_i((1-x)/\mu)]\mu^i,$$

而 $y_i(x)$ 为外解, $u_i(x/\mu)$ 和 $v_i((1-x)/\mu)$ 分别为在 $x=0$ 和 $x=1$ 处的边界层函数·

[参 考 文 献]

[1] Nayfeh A H. Perturbation Methods [M]. New York: Wiley, 1973.

[2] O'Malley R E. Introduction to Singular Perturbations [M]. New York: Academic, 1974.

[3] Chang K W, Howes F A. Nonlinear Singular Perturbation Phenomena: Theory and Application [M]. New York: Springer_Verlag, 1984.

[4] 林宗池, 周明儒. 应用数学中的摄动方法[M]. 南京: 江苏教育出版社, 1995.

[5] O'Malley R E. Two parameters singular perturbation problems for second order equations [J]. J Math Mech, 1967, **16**(10): 1143—1163.

[6] O'Malley R E. Singular perturbations of boundary value problems for linear ordinary differential equations involving two parameters [J]. J Math Anal Appl, 1967, **19**: 291—309.

[7] 张汉林. 关于含双参数的非线性常微分方程的奇摄动[J]. 应用数学和力学, 1989, **10**(5): 453—466.

[8] 苗树梅. 具有两个小参数的常微分方程的奇摄动边值问题[J]. 吉林大学自然科学学报, 1991, (4): 37—41.

[9] 周雅丽, 林宗池. 带两参数的三阶非线性微分方程边值问题的奇摄动[J]. 福建师范大学学报(自然科学版), 1997, **13**(3): 13—18.

[10] Gene A Kleasen. Differential inequalities and existence theorems for second and third order boundary value problems [J]. J Differential Equations, 1971, **10**: 529—533.

Singular Perturbation of Boundary Value Problem for Quasilinear Third Order Ordinary Differential Equations Involving Two Small Parameters

LIN Su_rong[1], TIAN Gen_bao[2], LIN Zong_chi[3]

(1. Mathematical Section, Fujian Broadcasting TV University, Fuzhou 350003, P R China;
2. Department of Mathematics, Shanghai Railroad University, Shanghai 200333, P R China;
3. Department of Mathematics, Fujian Normal University, Fuzhou 350007, P R China)

Abstract: The singularly perturbed boundary value problem for quasilinear third order ordinary differential equation involving two small parameters has been considered. For the three cases $\varepsilon/\mu^2\to 0\ (\mu\to 0)$, $\mu_2/\varepsilon\to 0\ (\varepsilon\to 0)$ and $\varepsilon=\mu^2$, the formal asymptotic solutions are constructed by the method of two steps expansions and the existences of solution are proved by using the differential inequality method. In addition, the uniformly valid estimations of the remainder term are given as well.

Key words: two_parameters; singular perturbation; boundary value problem; asymptotic expansion