应用数学和力学, 第 22 卷 第 1 期(2001 年 1 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2001) 01_0023_09

Banach 空间中渐近非扩张型映象不动点的迭代逼近问题*

张石生[1,2]

(1. 四川大学 数学系, 成都 610064; 2. 宜宾师专 数学系, 四川 宜宾 644007)

(我刊编委张石生来稿)

摘要: 研究了 Banach 空间中渐近非扩张型映象不动点的迭代逼近问题. 所得结果改进和发展了一些人的最新成果.

关 键 词: 渐近非扩张型映象; 不动点; 修改的具误差的 Ishikawa 迭代序列; 修改的具误差的 Mann 迭代序列

中图分类号: O177.91 文献标识码: A

1 引论及预备知识

本文中处处假定 E 是一实 Banach 空间, E^* 是 E 的共轭空间, $J: E \to 2^{E^*}$ 是由下式定义的正规对偶映象:

$$J(x) = \left\{ f \in E^* : \langle x, f \rangle = \|x\| \cdot \|f\|, \|f\| = \|x\| \right\} \quad (x \in E).$$

定义 1.1 设 $D \subset E$ 是一非空子集, $T: D \to D$ 是一映象.

1. T 称为渐近非扩张的[1], 如果存在序列 $\{k_n\} \subset [1, \infty)$, $\lim_{n\to\infty} k_n = 1$, 使得

$$\|T^n x - T^n y\| \leqslant k_n \|x - y\| \quad (\forall x, y \in D, n \in N), \tag{1}$$

2. T 称为渐近非扩张型的[2], 如果

$$\lim_{n\to\infty} \sup \sup_{x \in D} \left\{ \|T^n x - T^n y\| - \|x - y\| \right\} \leqslant 0 \quad (\text{对每一 } y \in D), \tag{2}$$

3. T 称为一致 L_Lipschitzian, 其中 L 是一正常数, 如果

$$\|T^n x - T^n y\| \leqslant L \|x - y\| \quad (\forall x, y \in D, n \in N). \tag{3}$$

注 1.1 由定义 1.1 易知: 如果 $T: D \to D$ 是一非扩张映象, 则 T 是具常数序列 $\{1\}$ 的渐近非扩张映象; 如果 $T: D \to D$ 是具序列 $\{k_n\} \subset [1, \infty)$ 的渐近非扩张映象, 其中 $\lim_{n\to\infty} k_n = 1$, 则 T 是渐近非扩张型的一致 L_Lipschitzian 映象, 其中 $L = \sup_{n \geqslant 1} k_n$.

---

* 收稿日期: 1999_09_03; 修订日期: 2000_10_02
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19771058)
作者简介: 张石生(1934—), 男, 教授, 已发表论文 300 余篇, 获省部级奖 6 项.

定义 1.2[3] Banach 空间 E 是一致凸的, 如果 E 的凸性模 δ_E

$$\delta_E(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \frac{1}{2}\|x + y\| : \|x\| = \|y\| = 1, \|x - y\| \geqslant \varepsilon\right\} > 0,$$
$$(\forall 0 < \varepsilon \leqslant 2) \tag{4}$$

注 1.2 应该指出: 如果 E 是实的一致凸的 Banach 空间, 则 E 是自反的和严格凸的, 从而正规对偶映象 $J: E \to E^*$ 是单值的•

定义 1.3 设 D 是 E 中之一非空闭凸集, D 称为 E 的收缩核, 如果存在一连续映象 $Q: E \xrightarrow{\text{onto}} D$, 使得 $Qx = x$, $\forall x \in D$• 映象 Q 称为由 E 到 D 的保核收缩•

定义 1.4 设 D 是 E 之一非空闭凸集, $T: D \to D$ 是一映象• $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ 是 $[0, 1]$ 中的两个序列, $Q: E \xrightarrow{\text{onto}} D$ 是一非扩张的保核收缩• $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ 是 E 中满足条件:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\| < \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \|v_n\| < \infty \tag{5}$$

的二有界序列, 则

1. 由下式定义的序列 $\{x_n\} \subset D$:

$$\left.\begin{aligned} & x_0 \in D, \\ & x_{n+1} = Qp_n, \\ & p_n = (1 - \alpha_n) x_n + \alpha_n T^n Q y_n + u_n, \\ & y_n = (1 - \beta_n) x_n + \beta_n T^n x_n + v_n, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

称为修正的具误差的 Ishikawa 迭代序列;

2. 由下式定义的序列 $\{x_n\} \subset D$:

$$\left.\begin{aligned} & x_0 \in D, \\ & x_{n+1} = Qp_n, \\ & p_n = (1 - \alpha_n) x_n + \alpha_n T^n x_n + u_n• \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

称为修正的具误差的 Mann 迭代序列;

3. 特别, 如果 $u_n = v_n = \theta$, $\forall n \geqslant 0$, 则由(6) 和(7) 所定义的序列 $\{x_n\} \subset D$ 分别称为修正的 Ishikawa 迭代序列和修正的 Mann 迭代序列•

渐近非扩张映象与渐近非扩张型映象的概念分别由 Goebel_Kirk[1] 和 Kirk[2] 所引入• 这些概念与 Banach 空间中不动点理论紧密相关• Goebel, Kirk 在[1] 中证明: 一致凸 Banach 空间中任一有界闭凸集上的渐近非扩张自映象存在不动点•

关于渐近非扩张映象及渐近非扩张型映象不动点的迭代逼近问题在 Chang 等的[4], Xu 的[5], Goebel_Kirk 的[1], Kirk 的[2], Liu 的[6], Schu 的[7], Zeng 的[8] 及 Kirk_Torrejon 的[9] 中讨论过• 本文的目的是在 Banach 空间的框架下, 研究渐近非扩张型映象不动点的具误差的迭代逼近问题, 本文结果是引文[1, 4, 6, 7, 8] 中相应结果的改进和推广•

下面的引理在证明本文的主要结果中起到重要的作用•

引理 1.1(Chang[10]) 设 E 是任一实 Banach 空间, $J: E \to 2^{E^*}$ 是正规对偶映象, 则对任意的 $x, y \in E$ 及对任意的 $j(x + y) \in J(x + y)$ 有

$$\|x+y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2\langle y, j(x+y)\rangle.$$

引理 1.2(Xu[3], 定理 2) 设 $p>1$ 是 $r>0$ 是两个给定的正数. 则 Banach 空间 E 是一致凸的, 当而且仅当存在一严格增的连续的凸函数 $g:[0,\infty)\to[0,\infty)$, $g(0)=0$ 使得

$$\|\lambda x+(1-\lambda)y\|^p \leqslant \lambda\|x\|^p+(1-\lambda)\|y\|^p-\omega_p(\lambda)g(\|x-y\|), \tag{8}$$

对一切 $x, y\in B(0,r)$, $\lambda\in[0,1]$ 成立, 其中 $B(0,r)$ 表 E 中以 O 为心, $r>0$ 为半径的闭球, 而且

$$\omega_p(\lambda)=\lambda^p(1-\lambda)+\lambda(1-\lambda)^p. \tag{9}$$

引理 1.3 设 E 是一实 Banach 空间, D 是 E 中之一非空闭凸集, $Q: E\xrightarrow{\text{onto}}D$ 是 E 到 D 的非扩张的保核收缩, $T: D\to D$ 是一致 L_Lipschitzian 映象, $L>0$, 设 $\{x_n\}$ 是由(6) 定义的修正的具误差的 Ishikawa 迭代序列, 其中 $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ 是 E 中满足条件(5) 的二有界序列. 则由 $\|x_n-T^nx_n\|\to 0$, 可推出 $\|x_n-Tx_n\|\to 0$.

证 令

$$\begin{aligned}
a_n &= \|x_n-T^nx_n\|+\|u_n\|+\|v_n\|,\\
b_n &= \|x_n-T^nQy_n\|+\|u_n\|+\|v_n\|,\\
c_n &= \|y_n-x_n\|,\\
d_n &= \|y_{n-1}-x_n\|,\\
e_n &= \|x_{n+1}-x_n\|.
\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}
c_n &= \|\beta_n(T^nx_n-x_n)+v_n\| \leqslant \\
&\quad \beta_n\|T^nx_n-x_n\|+\|v_n\| \leqslant a_n,\\
b_n &\leqslant \|x_n-T^nx_n\|+\|T^nx_n-T^nQy_n\|+\|u_n\|+\|v_n\| \leqslant \\
&\quad a_n+L\cdot\|x_n-Qy_n\| (\text{因 } x_n\in D, \text{故 } Qx_n=x_n) \leqslant \\
&\quad a_n+L\cdot\|x_n-y_n\| = a_n+Lc_n \leqslant a_n(1+L),\\
e_n &= \|x_{n+1}-x_n\| = \|Qp_n-x_n\| = \|Qp_n-Qx_n\| \leqslant \\
&\quad \|p_n-x_n\| = \|\alpha_n(T^nQy_n-x_n)+u_n\| \leqslant \\
&\quad \alpha_n\|T^nQy_n-x_n\|+\|u_n\| \leqslant b_n \leqslant a_n(1+L),\\
d_n &= \|y_{n-1}-x_n\| \leqslant \|y_{n-1}-x_{n-1}\|+\|x_{n-1}-x_n\| = \\
&\quad c_{n-1}+e_{n-1} \leqslant a_{n-1}+a_{n-1}(1+L) = a_{n-1}(2+L).
\end{aligned}$$

从而有

$$\left.\begin{aligned}
&\|x_{n-1}-T^{n-1}(x_n)\| \leqslant \|x_{n-1}-T^{n-1}(x_{n-1})\|+\|T^{n-1}(x_{n-1})-\\
&\quad T^{n-1}(x_n)\| \leqslant a_{n-1}+L\|x_{n-1}-x_n\| = \\
&\quad a_{n-1} = Le_{n-1} \leqslant a_{n-1}(1+L+L^2),\\
&\|x_n-T^{n-1}x_n\| \leqslant \|x_n-x_{n-1}\|+\|x_{n-1}-T^{n-1}(x_n)\| \leqslant \\
&\quad a_{n-1}(1+L)+a_{n-1}(1+L+L^2),\\
&\|x_n-Tx_n\| \leqslant \|x_n-T^nx_n\|+\|T^nx_n-Tx_n\| \leqslant \\
&\quad a_n+L\cdot\|x_n-T^{n-1}x_n\| \leqslant \\
&\quad a_n+a_{n-1}L\cdot(1+(1+L)^2).
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

因 $\sum_n\|u_n\|<\infty$, $\sum_n\|v_n\|<\infty$, 故 $\|u_n\|\to 0$, $\|v_n\|\to 0$. 如果 $\|x_n-T^nx_n\|\to 0$, 故

$a_n \to 0$. 于是由(10)知 $\|x_n - Tx_n\| \to 0$. 引理1.3证毕.

2 渐近非扩张型映象不动点的迭代逼近

定义2.1 设 E 是一实Banach空间, D 是 E 中的闭子集, $T: D \to D$ 是一映象. T 称为半紧的, 如果对 D 中任一有界序列 $\{x_n\}$ 满足 $\|x_n - Tx_n\| \to 0(n \to \infty)$, 则存在子序列 $\{x_{n_j}\} \subset \{x_n\}$ 使得 $x_{n_i} \to x^* \in D(n_i \to \infty)$.

定理2.1 设 E 是一实的一致的凸的Banach空间, D 是 E 中之一有界闭凸子集. 设存在非扩张的保核收缩 $Q: E \xrightarrow{\text{onto}} D$. 设 $T: D \to D$ 是一半紧的一致 L_Lipschitzian 渐近非扩张型映象. 设 $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ 是 $[0,1]$ 中的二序列使得

$$0 < \varepsilon \leqslant \alpha_n, \quad \beta_n \leqslant 1 - \varepsilon \qquad (\forall n \geqslant 0). \tag{11}$$

如果 $F(T) \neq \phi$ ($F(T)$ 是 T 在 D 中不动点的集合), 则由(6)定义的修正的具误差的Ishikawa迭代序列 $\{x_n\}$ 收敛于 T 在 D 中的某一不动点 x^*, 如果 T 满足条件:

(*) 对任意子列 $\{x_{n_i}\} \subset \{x_n\}$, 当 $\|T^{n_i}x_{n_i} - x_{n_i}\| \to 0$ 时就有 $\|Tx_{n_i} - x_{n_i}\| \to 0$

证 任取 $q \in F(T)$, 因 D 是有界的, $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ 是 E 中的满足条件(5)的有界列, 且 x_n, T^nQy_n, T^nx_n 均属于 D, 故存在 $r > 0$, 使得

$$D \cup \{x_n - q + u_n\} \cup \{T^nQy_n - q + u_n\} \cup \{T^nx_n - q + v_n\} \cup \{x_n - q + v_n\} \subset B(0, r),$$

其中 $B(0, r)$ 表以 O 为心, $r > 0$ 为半径的闭球, 在引理1.2中取 $p = 2$, $\lambda = \alpha_n$, 于是由(6)有

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - q\|^2 &= \|Qp_n - Qq\|^2 \leqslant \|p_n - q\|^2 = \\ &\|(1-\alpha_n)(x_n - q + u_n) + \alpha_n(T^nQy_n - q + u_n)\|^2 \leqslant \\ &(1-\alpha_n)\|x_n - q + u_n\|^2 + \alpha_n\|T^nQy_n - q + u_n\|^2 - \\ &\omega_2(\alpha_n)g(\|T^nQy_n - x_n\|) \leqslant \\ &(1-\alpha_n)\|x_n - q + u_n\|^2 + \alpha_n\|T^nQy_n - q + u_n\|^2. \end{aligned} \tag{12}$$

因 $\{x_n - q + u_n\}$ 和 $\{T^nQy_n - q + u_n\}$ 均包含于 $B(0, r)$, 于是由引理1.1有

$$\begin{aligned} \|x_n - q + u_n\|^2 &\leqslant \|x_n - q\|^2 + 2\langle u_n, J(x_n - q + u_n)\rangle \leqslant \\ &\|x_n - q\|^2 + 2\|u_n\| \cdot \|x_n - q + u_n\| \leqslant \\ &\|x_n - q\|^2 + 2r\|u_n\|, \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \|T^nQy_n - q + u_n\|^2 &\leqslant \|T^nQy_n - q\|^2 + 2 < u_n, J(T^nQy_n - q + u_n) > \leqslant \\ &\|T^nQy_n - q\|^2 + 2r\|u_n\|. \end{aligned} \tag{14}$$

把(13), (14)代入(12)化简得

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - q\|^2 &\leqslant (1-\alpha_n)\|x_n - q\|^2 + \alpha_n\|T^nQy_n - q\|^2 + 2r\|u_n\| = \\ &\|x_n - q\|^2 + \alpha_n\{\|T^nQy_n - q\|^2 - \|Qy_n - q\|^2\} + \\ &\alpha_n\{\|Qy_n - q\|^2 - \|x_n - q\|^2\} + 2r\|u_n\|. \end{aligned} \tag{15}$$

首先考察上式右端第三项, 在引理1.2中取 $p = 2$, 于是由引理1.2可得

$$\begin{aligned} \|Qy_n - q\|^2 - \|x_n - q\|^2 &= \|Qy_n - Qq\|^2 - \|x_n - q\|^2 \leqslant \\ &\|y_n - q\|^2 - \|x_n - q\|^2 = \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\|(1-\beta_n)(x_n-q+v_n)+\beta_n(T^nx_n-q+v_n)\|^2-\|x_n-q\|^2\leqslant\\
&\quad(1-\beta_n)\|x_n-q+v_n\|^2+\beta_n\|T^nx_n-q+v_n\|^2-\\
&\quad\omega_2(\beta_n)g(\|x_n-T^nx_n\|)-\|x_n-q\|^2.
\end{aligned}\tag{16}
$$

因 $x_n-q+v_n\in B(0,r)$, $T^nx_n-q+v_n\in B(0,r)$, 故由引理 1.1 有

$$
\begin{aligned}
&\|x_n-q+v_n\|^2\leqslant\|x_n-q\|^2+2\langle v_n, J(x_n-q+v_n)\rangle\leqslant\\
&\quad\|x_n-q\|^2+2\|v_n\|\cdot r,
\end{aligned}\tag{17}
$$

$$
\begin{aligned}
&\|T^nx_n-q+v_n\|^2\leqslant\|T^nx_n-q\|^2+2\langle v_n, J(T^nx_n-q+v_n)\rangle\leqslant\\
&\quad\|T^nx_n-q\|^2+2r\|v_n\|
\end{aligned}\tag{18}
$$

把(17), (18) 代入(16), 并化简得

$$
\begin{aligned}
&\|Qy_n-q\|^2-\|x_n-q\|^2\leqslant\beta_n\left\{\|T^nx_n-q\|^2-\|x_n-q\|^2\right\}+\\
&\quad 2r\|v_n\|-\beta_n(1-\beta_n)g(\|x_n-T^nx_n\|).
\end{aligned}\tag{19}
$$

把(19) 代入(15) 化简得

$$
\begin{aligned}
&\|x_{n+1}-q\|^2\leqslant\|x_n-q\|^2+\alpha_n\left\{\|T^nQy_n-q\|^2-\|Qy_n-q\|^2\right\}+\\
&\quad\alpha_n\left\{\beta_n(\|T^nx_n-q\|^2-\|x_n-q\|^2)+2r\|v_n\|-\right.\\
&\quad\left.\beta_n(1-\beta_n)g(\|x_n-T^nx_n\|)\right\}+2r\|u_n\|\leqslant\\
&\quad\|x_n-q\|^2-\frac{\alpha_n\beta_n(1-\beta_n)}{2}g(\|x_n-T^nx_n\|)+\\
&\quad\alpha_n\left\{\|T^nQy_n-q\|^2-\|Qy_n-q\|^2-\frac{\beta_n(1-\beta_n)}{4}g(\|x_n-T^nx_n\|)\right\}+\\
&\quad\alpha_n\beta_n\left\{\|T^nx_n-q\|^2-\|x_n-q\|^2-\frac{(1-\beta_n)}{4}g(\|x_n-T^nx_n\|)\right\}+\\
&\quad 2r(\|u_n\|+\|v_n\|).
\end{aligned}
$$

利用条件(11) 化简得

$$
\begin{aligned}
&\|x_{n+1}-q\|^2\leqslant\|x_n-q\|^2-\frac{\varepsilon^2}{2}g(\|x_n-T^nx_n\|)+\\
&\quad\alpha_n\left\{\|T^nQy_n-q\|^2-\|Qy_n-q\|^2-\frac{\varepsilon^2}{4}g(\|x_n-T^nx_n\|)\right\}+\\
&\quad\alpha_n\beta_n\left\{\|T^nx_n-q\|^2-\|x_n-q\|^2-\frac{\varepsilon}{4}g(\|x_n-T^nx_n\|)\right\}+\\
&\quad 2r(\|u_n\|+\|v_n\|)\qquad(\forall n\geqslant 0).
\end{aligned}\tag{20}
$$

现记

$$
\sigma=\inf_{n\geqslant 0}\|x_n-T^nx_n\|.
$$

下证 $\sigma=0$. 设不然 $\sigma>0$. 故 $\|x_n-T^nx_n\|\geqslant\sigma>0(\forall n\geqslant 0)$, 由 g 的严格增性及 $g(0)=0$, 故

$$
g(\|x_n-T^nx_n\|)\geqslant g(\sigma)>0(\forall n\geqslant 0).\tag{21}
$$

于是由(20) 知

$$
\begin{aligned}
&\|x_{n+1}-q\|^2\leqslant\|x_n-q\|^2-\frac{\varepsilon^3}{2}g(\sigma)+\\
&\quad\alpha_n\left\{\|T^nQy_n-q\|^2-\|Qy_n-q\|^2-\frac{\varepsilon^2}{4}g(\sigma)\right\}+
\end{aligned}
$$

$$\alpha_n\beta_n\left\{\|T^nx_n-q\|^2-\|x_n-q\|^2-\frac{\varepsilon}{4}g(\sigma)\right\}+$$
$$2r(\|u_n\|+\|v_n\|)\cdot \tag{22}$$

因为 T 是渐近非扩张型映象故

$$\lim_{n\to\infty}\sup\sup_{x\in D}\left\{\|T^nx-T^ny\|-\|x-y\|\right\}\leqslant 0,\ 对每一\ y\in D,$$

从而有

$$\lim_{n\to\infty}\sup\sup_{x\in D}\left\{\|T^nx-T^ny\|^2-\|x-y\|^2\right\}=$$
$$\lim_{n\to\infty}\sup\sup_{x\in D}\left\{(\|T^nx-T^ny\|-\|x-y\|)(\|T^nx-T^ny\|+\|x-y\|)\right\}\leqslant$$
$$0\quad (对每一\ y\in D), \tag{23}$$

于是对给定的 $q\in F(T)\subset D$ 和给定的数 $\varepsilon^2q(\sigma)/4>0$, 存在正整数 n_0, 当 $m\geqslant n_0$ 时有

$$\sup_{m\geqslant n_0}\sup_{x\in D}\left\{\|T^mx-q\|^2-\|x-q\|^2\right\}<\frac{\varepsilon^2}{4}g(\sigma)\cdot \tag{24}$$

因 $Qy_n\in D$, $x_n\in D$, 于是当 $n\geqslant n_0$ 时, 由(24) 可得

$$\|T^nQy_n-q\|^2-\|Qy_n-q\|^2<\frac{\varepsilon^2}{4}g(\sigma),$$
$$\|T^nx_n-q\|^2-\|x_n-q\|^2<\frac{\varepsilon^2}{4}g(\sigma)<\frac{\varepsilon}{4}g(\sigma)\cdot$$

于是当 $n\geqslant n_0$ 时, 由(22) 有

$$\|x_{n+1}-q\|^2\leqslant\|x_n-q\|^2-\frac{\varepsilon^3}{2}g(\sigma)+$$
$$2r(\|u_n\|+\|v_n\|)\qquad(\forall n\geqslant n_0),$$

即

$$\frac{\varepsilon^2}{2}g(\sigma)\leqslant\|x_n-q\|^2-\|x_{n+1}-q\|^2+$$
$$2r(\|u_n\|+\|v_n\|)\qquad(\forall n\geqslant n_0)\cdot$$

于是对任一 $m\geqslant n_0$ 有

$$\sum_{n=n_0}^{m}\frac{\varepsilon^2}{2}g(\sigma)\leqslant\|x_{n_0}-q\|^2-$$
$$\|x_{m+1}-q\|^2+2r\left(\sum_{n=n_0}^{m}\|u_n\|+\sum_{n=n_0}^{m}\|v_n\|\right)\cdot$$

让 $m\to\infty$ 即得

$$\infty\leqslant\|x_{n_0}-q\|^2+2r\left(\sum_{n=n_0}^{\infty}\|u_n\|+\sum_{n=n_0}^{\infty}\|v_n\|\right)<\infty\cdot$$

这是一个矛盾, 由此矛盾知 $\sigma=0$. 故存在子序列 $\{x_{n_j}\}\subset\{x_n\}$ 使得

$$\|x_{n_j}-T^{n_j}x_{n_j}\|\to 0\quad(n_j\to\infty)\cdot \tag{25}$$

于是由条件(*) 知

$$\|x_{n_j}-Tx_{n_j}\|\to 0\quad(n_j\to\infty)\cdot$$

因 T 是半紧的, 故存在子序列 $\{x_{n_i}\}\subset\{x_{n_j}\}$ 使得

$$x_{n_i}\to x^*\in D(n_i\to\infty), \tag{26}$$

因 T 是连续的, 由(26) 即得

$$\lim_{n_i\to\infty}\|x_{n_i}-Tx_{n_i}\|=\|x^*-Tx^*\|=0,$$

即 x^* 是 T 在 D 中之一不动点, 又因

$$\|T^{n_i}x_{n_i}-x^*\|\leqslant\|T^{n_i}x_{n_i}-x_{n_i}\|+\|x_{n_i}-x^*\|\to 0\qquad(n_i\to\infty)$$

另由(6)及(25)知

$$y_{n_i}=x_{n_i}-\beta_{n_i}(x_{n_i}-T^{n_i}x_{n_i})+v_{n_i}\to x^*\quad(n_i\to\infty)\cdot$$

下证

$$T^{n_i}Qy_{n_i}\to x^*\quad(n_i\to\infty)\cdot\tag{27}$$

事实上, 因 $T:D\to D$ 是渐近非扩张型映象, 于是由(23)有

$$\begin{aligned}&\limsup_{n_i\to\infty}\left\{\|T^{n_i}Qy_{n_i}-x^*\|^2-\|Qy_{n_i}-x^*\|^2\right\}\leqslant\\&\quad\limsup_{n_i\to\infty}\sup_{x\in D}\left\{\|T^{n_i}x-x^*\|^2-\|x-x^*\|^2\right\}\leqslant\\&\quad\limsup_{n\to\infty}\sup_{x\in D}\left\{\|T^{n}x-x^*\|^2-\|x-x^*\|^2\right\}\leqslant 0\cdot\end{aligned}\tag{28}$$

因 Q 是非扩张的, 因而是连续的, 于是有 $Qy_{n_i}\to Qx^*=x^*$, 故由(28)有

$$\limsup_{n_i\to\infty}\left\{\|T^{n_i}Qy_{n_i}-x^*\|^2\right\}\leqslant 0\cdot$$

但因

$$\liminf_{n_i\to\infty}\left\{\|T^{n_i}Qy_{n_i}-x^*\|^2\right\}\geqslant 0\cdot$$

故有

$$\lim_{n_i\to\infty}\|T^{n_i}Qy_i-x^*\|^2=0\cdot$$

(27)得证•

现在(20)中取 $q=x^*$ 于是有

$$\begin{aligned}\|x_{n_i+1}-x^*\|^2\leqslant{}&\|x_{n_i}-x^*\|^2-\frac{\varepsilon^3}{2}g(\|x_{n_i}-T^{n_i}x_{n_i}\|)+\\&\alpha_{n_i}\left\{\|T^{n_i}Qy_{n_i}-x^*\|^2-\|Qy_{n_i}-x^*\|^2-\frac{\varepsilon^2}{4}g(\|x_{n_i}-T^{n_i}x_{n_i}\|)\right\}+\\&\alpha_{n_i}\beta_{n_i}\left\{\|T^{n_i}x_{n_i}-x^*\|^2-\|x_{n_i}-x^*\|^2-\frac{\varepsilon}{4}g(\|x_{n_i}-T^{n_i}x_{n_i}\|)\right\}+\\&2r(\|u_{n_i}\|+\|v_{n_i}\|)\cdot\end{aligned}$$

于是由(25)~(27)及 g 的连续性知

$$\lim_{xn_i\to\infty}\|_{n_i+1}-x^*\|^2=0\cdot$$

即

$$x_{n_i+1}\to x^*\qquad(n_i\to\infty)\cdot\tag{29}$$

用与(28)中相同的方法可证

$$\limsup_{n_i\to\infty}\left\{\|T^{n_i+1}x_{n_i+1}-x^*\|^2-\|x_{n_i+1}-x^*\|^2\right\}\leqslant 0\cdot$$

由(29)及上式即得

$$\limsup_{n_i\to\infty}\left\{\|T^{n_i+1}x_{n_i+1}-x^*\|^2\right\}\leqslant 0\cdot$$

从而得证 $\lim_{n_i\to\infty}\|T^{n_i+1}x_{n_i+1}-x^*\|=0$, 即

$$T^{n_i+1}x_{n_i+1} \to x^* \qquad (n_i \to \infty). \tag{30}$$

由(6), (29)及(30)知

$$y_{n_i+1} = x_{n_i+1} - \beta_{n_i+1}(T^{n_i+1}x_{n_i+1} - x_{n_i+1}) + v_{n_i+1} \to x^* \qquad (n_i \to \infty). \tag{31}$$

仿在证明(27)时所用的方法并由(31)可证

$$\lim_{n_i \to \infty} T^{n_i+1}Qy_{n_i+1} = x^*.$$

重复上述方法, 由归纳法可证: 对一切 $m \geqslant 0$ 有

$$x_{n_i+m} \to x^*,\ y_{n_i+m} \to x^* \qquad (n_i \to \infty),$$

$$T^{n_i+m}x_{n_i+m} \to x^*,\ T^{n_i+m}Qy_{n_i+m} \to x^* \qquad (n_i \to \infty).$$

于是得证 $x_n \to x^*$ $(n \to \infty)$, $y_n \to x^*$ $(n \to \infty)$.

定理 2.1 得证.

定理 2.2 设 E 是一实的一致凸的 Banach 空间, D 是 E 中之一有界闭凸集. 设 $T: D \to D$ 是一半紧的渐近非扩张映象. 设存在非扩张的保核收缩 $Q: E \xrightarrow{\text{onto}} D$. 再设 $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ 是 $[0, 1]$ 中的满足条件(11)的序列. 则由(6)定义的修正的具误差的 Ishikawa 迭代序列 $\{x_n\}$ 强收敛于 T 在 D 中的某一不动点 x^*, 如果 T 满足定理 2.1 中的条件(*).

证 因 D 是一致凸 Banach 空间 E 中的有界闭凸集, $T: D \to D$ 是渐近非扩张映象. 于是由 Goebel_Kirk 的[1], T 在 D 中有不动点, 故 $F(T) \neq \phi$. 又因 T 是渐近非扩张的, 由注 1.1, T 是一致 L_Lipschizian 的渐近非扩张型映象. 故定理 2.1 中的一切条件满足, 定理 2.2 的结论由定理 2.1 直接可得.

仿定理 2.1 的证明, 可证下面的结果成立.

定理 2.3 设 E 是一致凸的实 Banach 空间, D 是 E 中之一非空的有界闭凸集, $T: D \to D$ 是一半紧的一致 L_Lipschitzin 渐近非扩张型映象. 设 $\{\alpha_n\}$ 是 $[0, 1]$ 中的实序列满足条件:

$$0 < \varepsilon \leqslant \alpha_n \leqslant 1 - \varepsilon \qquad (\forall n \geqslant 0).$$

设存在非扩张的保核收缩 $Q: E \xrightarrow{\text{onto}} D$. 如果 $F(T) \neq \phi$, 则由(7)式定义的修正的具误差的 Mann 迭代序列 $\{x_n\}$ 强收敛于 T 在 D 中的某一不动点 x^*, 如果 T 满足定理 2.1 中的条件(*).

注 2.1 我们追求下列事实:

1. 设 E 是一实的一致凸的 Banach 空间(从而 E 是自反的和严格凸的), 设 D 是 E 中的闭凸集, 设 $A: D(A) = D \to E$ 是一 m_增生映象, 于是由 Reich[11] 知, 存在 E 到 D 上的非扩张的保核收缩 $Q: E \xrightarrow{\text{onto}} D$.

2. 在定理 2.1 中, 如果 $u_n = v_n = 0$, $\forall n \geqslant 0$, 则条件"存在 E 到 D 上的非扩张的保核收缩"是不必要的, 因而有下之结果.

定理 2.4 设 E 是一实的一致凸的 Banach 空间, D 是 E 之一有界闭凸子集, 设 $T: D \to D$ 是一半紧的一致 L_Lipschitian 渐近非扩张型映象. 设 $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ 是 $[0, 1]$ 中的二序列满足条件(11). 如果 $F(T) \neq \phi$, 则由下式定义的修正的 Ishikawa 迭代序列 $\{x_n\}$:

$$\left.\begin{aligned} &x_0 \in D, \\ &x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T^n y_n, \\ &y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T^n x_n \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

强收敛于 T 在 D 中的某一不动点 x^*，如果 T 满足定理 2.1 中的条件 $(*)$·

注 2.2 定理 2.1, 2.2, 2.3 及 2.4 改进和推广了 Chang 等[4], Goebel_Kirk[1], Schu[7], Liu[6] 及 Zeng[8] 中的相应结果·

[参 考 文 献]

[1] Goebel K, Kirk W A. A fixed point theorem for asymptotically nonexpansive mappings[J]. Proc Amer Math Soc, 1972, **35**(1): 171—174.

[2] Kirk W A. Fixed point theorems for non_Lipschitzian mappings of asymptotically nonexpansive type [J]. Israel J Math, 1974, **11**: 339—346.

[3] Xu H K. Inequalities in Banach spaces with applications[J]. Nonlinear Anal TMA, 1991, **16**(12): 1127—1138.

[4] CHANG Shih_sen, Cho Y J, Jung J S, et al. Iterative approximation of fixed point and solutions for strongly accretive and strongly pseudo_contractive mappings in Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 1998, **224**: 149—165.

[5] Xu H K. Existence an convergence for fixed points of mappings of asymptotically nonexpansive type [J]. Nonlinear Anal TMA, 1991, **16**(12): 1139—1146.

[6] Liu Q H. Convergence theorems of the sequence of iterates for asymptotically demi_contractive and hemi_contractive mappings[J]. Nonlinear Anal TMA, 1996, **26**(11): 1835—1842.

[7] Schu J. Iterative construction of fixed points of asymptotically nonexpansive mappings[J]. J Math Anal Appl, 1991, **158**: 407—413.

[8] Zeng L C. A note on approximating fixed points of nonexpansive mapping by the Ishikawa iterative processes[J]. J Math Anal Appl, 1998, **226**: 245—250.

[9] Kirk W A, Torrejon R. An asymptotically nonexpansive semigroup in Banach space[J]. Nonlinear Anal TMA, 1979, **1**: 111—121.

[10] CHANG Shih_sen. On Chidume's open questions and approximate solutions of multivalued strongly accretive mapping equations in Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 1997, **216**: 94—111.

[11] Reich S. Extension problems for accretive sets in Banach spaces[J]. J Func Anal, 1997, **26**: 378—395.

On the Iterative Approximation Problem of Fixed Points for Asymptotically Nonexpansive Type Mappings in Banach Spaces

ZHANG Shi_sheng[1, 2]

(1. Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, P R China;
2. Department of Mathematics, Yibin Teacher's College, Yibin, Sichuan 644007, P R China)

Abstract: Some iterative approximation theorems of fixed points for asymptotically nonexpansive type mappings in Banach spaces are obtained.

Key words: asymptotically nonexpansive mapping; fixed point; modified Ishikawa iterative sequence with errors; modified Mann iterative sequence with errors