应用数学和力学, 第 21 卷 第 12 期(2000 年 12 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2000) 12_1285_08

获得非线性微分方程显式解析解的两种新算法*

张鸿庆, 闫振亚

(大连理工大学 应用数学系, 大连 116024)

(我刊编委张鸿庆来稿)

摘要: 基于 AC= BD 的思想来求解非线性微分方程(组)• 设 $Au = 0$ 为给定的待求解的方程, $Dv = 0$ 是容易求解的方程• 如果可以获得变换 $u = Cv$ 使得 v 满足 $Dv = 0$, 则能够得到 $Au = 0$ 的解• 为了说明该种途径, 本文举例给出几种变换 C 的表达式•

关 键 词: 非线性微分方程; 变换; 算法; 解析解
中图分类号: O175.29 文献标识码: A

引 言

几百年以来, 构造微分方程的解析解是既重要又困难的课题, 许多数学家及理论物理学家做了大量的工作[1~5], 但仍有许多重要的具有实际意义的微分方程(组) 无法求出其显式解析解或求出很少的解• 即使已求出一些解, 也是对不同的方程各有各的途径, 没有统一的模式• 随着计算机工具的迅速发展, 大量的复杂的计算可以在计算机上实现• 我们的目的是给出一大类问题的统一的模式, 并且借助于计算机获得方程的解析解•

1 AC= BD 思想及定理

令 $Au = 0$ 为待求的方程(组), $Dv = 0$ 为容易解的方程(组), 寻求变换 $u = Cv$, 使得 v 满足 $Dv = 0$• A 和 D 可以有如下不同的表达式[6]

A	D
任意微分方程组	具有对角形式的微分方程组
非线性微分方程	线性微分方程
变系数微分方程	常系数微分方程
高阶微分方程	低阶微分方程
微分方程	代数方程

---

* 收稿日期: 2000_01_14; 修订日期: 2000_08_21
基金项目: 国家重点基础研究发展规划基金资助项目(G1998030600); 教育部博士点基金资助项目(98014119)
作者简介: 张鸿庆(1936—) , 男, 黑龙江人, 教授, 博士生导师.

不可分离变量微分方程	可分离变量微分方程
不会求解的方程	会求解的方程或具有重要性的方程

现在的问题是如何构造变换 $u=\mathrm{C}v$，将待求解的方程 $\mathrm{A}u=0$ 约化为求解方程 $\mathrm{D}v=0$。设 X 是线性空间，A、B、C、D 是从 X 到 X 的算子，对任意 $v\in X$，定义：

$$\mathrm{AC}(v)=\mathrm{A}(\mathrm{C}v),\quad \mathrm{BD}v=\mathrm{B}(\mathrm{D}v).$$

如果对 $\forall v\in X$，$\mathrm{AC}v=\mathrm{BD}v$，则称 $\mathrm{AC}=\mathrm{BD}$。

令 $\mathrm{Ker\,A}=\left\{u\mid \mathrm{A}u=0\right\}$，$\mathrm{Ker\,D}=\left\{v\mid \mathrm{D}v=0\right\}$，若 $\mathrm{C\,Ker\,D}\subset\mathrm{Ker\,A}$，则对 $\mathrm{DV}=0$ 的任意解 v，若 $u=\mathrm{C}v$，则 $\mathrm{A}u=0$。若 $\mathrm{C\,Ker\,D}\supset\mathrm{Ker\,A}$，则对 $\mathrm{A}u=0$ 的任意解 u，必有 $v\in\mathrm{Ker\,A}$，使得 $u=\mathrm{C}v$。如果 $\mathrm{C\,Ker\,D}\subset\mathrm{Ker\,A}$ 和 $\mathrm{C\,Ker\,D}\supset\mathrm{Ker\,A}$ 同时成立，则 $\mathrm{C\,Ker\,D}=\mathrm{Ker\,A}$，这时称方程 $\mathrm{A}u=0$ 的一般解为 $u=\mathrm{C}v$，其中 v 满足 $\mathrm{D}v=0$。也称在变换 $u=\mathrm{C}v$ 下，方程 $\mathrm{A}u=0$ 和 $\mathrm{D}v=0$ 等价。

定理 1　设 X 是线性空间，A、B、C、D 是从 X 到 X 的算子，如果 $\mathrm{AC}=\mathrm{BD}$，$\mathrm{B}0=0$，$\mathrm{C\,Ker\,D}\supset\mathrm{Ker\,A}$，则 $\mathrm{A}u=0$ 的一般解为 $u=\mathrm{C}v$，且 v 满足 $\mathrm{D}v=0$。

证明　对 $\forall v\in\mathrm{Ker\,D}$，令 $u=\mathrm{C}v$，则 $\mathrm{A}u=\mathrm{AC}v=\mathrm{BD}v=\mathrm{B}0=0$，因此 $\mathrm{C\,Ker\,D}\subset\mathrm{Ker\,A}$，又由假设 $\mathrm{C\,Ker\,D}\supset\mathrm{Ker\,A}$。从而 $\mathrm{C\,Ker\,D}=\mathrm{Ker\,A}$。定理得证。

推论 1　若 X 是线性空间且 $\mathrm{C\,Ker\,D}\supset\mathrm{Ker\,A}$，则 $\mathrm{A}u=0$ 的一般解可以用 $u_n=\mathrm{C}v_n$ 逼近，其中 v_n 满足 $\mathrm{D}v_n=0$。

推论 2　若 A、B、C、D 是线性算子，$f\in X$，$\mathrm{AC}=\mathrm{BD}$，$\mathrm{C\,Ker\,D}\supset\mathrm{Ker\,A}$，则 $\mathrm{A}u=f$ 的一般解为 $u=\mathrm{C}v+e$，其中 v 满足 $\mathrm{D}v=g$，e 和 g 满足 $\mathrm{A}e+\mathrm{B}g=f$。

证明　如果存在从 X 到 X 的算子 M、N 和 E 使得 $\mathrm{AM}+\mathrm{BN}=\mathrm{E}$，则 $e=\mathrm{M}\phi$ 和 $g=\mathrm{N}\phi$ 满足方程 $\mathrm{A}e+\mathrm{B}g=f$。其中 ϕ 满足方程 $\mathrm{E}\phi=f$。

根据以上定理，问题转化为求算子 B，C 和 D 满足

1) $\mathrm{AC}=\mathrm{BD}$，2) $\mathrm{C\,Ker\,D}=\mathrm{Ker\,A}$。

为了解决这两个问题我们发展了一系列的算法[6~17]。

例 1　势 Burgers 方程

$$\mathrm{A}u=\left[\partial_t+\frac{1}{2}(\partial_x)^2-\lambda\partial_{xx}\right]u=0. \tag{1}$$

基于 AC= BD 的思想，我们取

$$u=\mathrm{C}v=-2\lambda\ln v,\quad \mathrm{B}v=-\frac{2\lambda}{v},\quad \mathrm{D}v=v_t-\lambda v_{xx}=0. \tag{2}$$

很显然可以证明 $\mathrm{AC}v=\mathrm{B}v\mathrm{D}v$，并且还可以证明 $\mathrm{C\,Ker\,D}=\mathrm{Ker\,A}$。因此说 $\mathrm{A}u=0$ 的解析解可以表示为 $u=\mathrm{C}v$，$\mathrm{D}v=0$。

下面我们将基于 AC= BD 的思想给出其它新的算法，对于给定的非线性偏微分方程(组)，不妨仅考虑两个变量 x,t

$$\mathrm{A}u=\mathrm{A}(u,u_t,u_x,u_{xt},u_{xx},u_{tt},\cdots)=0, \tag{3}$$

下面给出两种不同的算法，并将其应用到具体的数学物理方程中。

2　算法 1 及浅水波近似方程

算法 1　我们寻求具有重要意义的如下形式的行波解

$$u(x,t)=u(\xi),\ \xi=x-\lambda t+c.\tag{4}$$

其中 λ 为待定的常数, c 为任意的常数. 则方程(3) 约化为非线性常微分方程

$$F(u,u',u'',u''',\cdots)=0.\tag{5}$$

为了寻求(5) 的解析解, 我们做如下的变换

$$u=Cv=\sum_{i=1}^{n}v^{i-1}\left[P_iv+Q_i\sqrt{\mu_1(1+\mu_2v^2)}\right]+P_0,\tag{6}$$

且新的变量 $v=v(\xi)$ 满足

$$Dv=dv/d\xi-R(1+\mu_2v^2)=0.\tag{7}$$

其中 $P_i, Q_i(i=1,2,\cdots), R, P_0$ 为待定的常数. $\mu_j=\pm 1, j=1,2$. 存在下面的步骤须做进一步的讨论:

步骤 1　通过平衡方程(5) 中最高阶线性项和非线性项, 很容易得到(6) 中 n 的值.

步骤 2　借助于 MATHEMATICA, 将(6) 和(7) 代入(5), 可得关于 $v^i(\mu_1+\mu_1\mu_2v^2)^{j/2}(j=0,1;i=0,1,2,\cdots)$ 的方程(组).

步骤 3　令所获得的方程(组) 中 $v^i(\mu_1+\mu_1\mu_2v^2)^{j/2}(j=0,1;i=0,1,2,\cdots)$ 的系数为零, 得到一个关于未知变量 $\lambda, R, P_0, P_i, Q_i(i=1,2,\cdots)$ 的超定的非线性代数方程组.

步骤 4　借助于 MATHEMATICA, 利用吴消元法[18, 19] 解上述方程组, 可得到 $\lambda, R, P_0, P_i, Q_i(i=1,2,\cdots)$ 的值.

步骤 5　已知(7) 的通解为

$$v(\xi)=\tanh(R\xi),\ v(\xi)=\coth(R\xi),\qquad (\mu=-1);\tag{8}$$

$$v(\xi)=\tan(R\xi),\ v(\xi)=\cot(R\xi),\qquad (\mu=1).\tag{9}$$

因此由(4)、(6)、(8)、(9) 及步骤 5 中得到的结果, 可得到(3) 的若干解析解. 下面将该算法应用到具体的例子中.

例 2　浅水波近似方程

$$u_t-uu_x-H_x+\frac{1}{2}u_{xx}=0,\tag{10a}$$

$$H_t-(Hu)_x-\frac{1}{2}H_{xx}=0.\tag{10b}$$

根据算法 1, 首先做如下形式的行波变换

$$u(x,t)=u(\xi),\ H(x,t)=H(\xi),\ \xi=x-\lambda t+c.\tag{11}$$

其中 λ 为待定的常数, c 是任意的常数. 将(11) 代入(10a) 和(10b), 可得

$$-\lambda u'-uu'-H'+\frac{1}{2}u''=0,\tag{12a}$$

$$\lambda H'-(Hu)'-\frac{1}{2}H''=0.\tag{12b}$$

根据步骤 1, 令(12a) 和(12b) 有如下形式的解析解

$$u=P_0+P_1v+Q_1\sqrt{\mu_1(1+\mu_2v^2)},\tag{13a}$$

$$H=a_0+a_1v+b_1\sqrt{\mu_1(1+\mu_2v^2)}+a_2v^2+b_2v\sqrt{\mu_1(1+\mu_2v^2)}.\tag{13b}$$

根据步骤 2~ 4, 我们可获得变量 λ、P_0、P_1、Q_1、a_0、a_1、a_2、b_1、b_2、R 的值, 即

情况 1　$\mu_1=\pm 1, \mu_2=-1, a_1=b_1=b_2=Q_1=0, P_1=\pm 2R, p_0=\lambda, a_2=-2R^2, a_0=2R^2$.

情况 2 $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = -1$, $a_1 = b_1 = b_2 = P_1 = 0$, $Q_1 = \pm 2R\mathrm{i}$, $p_0 = \lambda$, $a_2 = -2R^2$, $a_0 = R^2$, $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$•

情况 3 $\mu_1 = \mu_2 = -1$, $a_1 = b_1 = b_2 = P_1 = 0$, $Q_1 = \pm 2R$, $p_0 = \lambda$, $a_2 = -2R^2$, $a_0 = R^2$•

情况 4 $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $a_1 = b_1 = b_2 = Q_1 = 0$, $P_1 = \pm 2R$, $p_0 = \lambda$, $a_2 = -2R^2$, $a_0 = -2R^2$•

情况 5 $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = -1$, $a_1 = b_1 = b_2 = P_1 = 0$, $Q_1 = \pm 2R$, $p_0 = \lambda$, $a_2 = -2R^2$, $a_0 = -R^2$•

情况 6 $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = -1$, $a_1 = b_1 = 0$, $P_1 = \pm R$, $Q_1 = \pm R\mathrm{i}$, $p_0 = \lambda$, $a_2 = -R^2$, $b_2 = \pm a_2\mathrm{i}$, $a_0 = R^2$•

情况 7 $\mu_1 = \mu_2 = -1$, $a_1 = b_1 = 0$, $P_1^2 = Q_1^2 = R^2$, $p_0 = \lambda$, $a_2 = -R^2$, $b_2 = \pm R^2$, $a_0 = R^2$•

情况 8 $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $a_1 = b_1 = 0$, $P_1 = \pm R$, $Q_1 = \pm R$, $p_0 = \lambda$, $a_2 = -R^2$, $b_2 = \pm R^2$, $a_0 = -R^2$•

因此由步骤5, 可得到浅水波近似方程(10) 的如下 12 种精确解析解

$$u_1 = \lambda \pm 2R\tanh[R(x-\lambda t+c)],\quad H_1 = 2R^2 - 2R^2\tanh^2[R(x-\lambda t+c)],$$
$$u_2 = \lambda \pm 2R\mathrm{i}\,\mathrm{sech}[R(x-\lambda t+c)],\quad H_2 = 2R^2\mathrm{sech}^2[R(x-\lambda t+c)] - R^2,$$
$$u_3 = \lambda \pm 2R\coth[R(x-\lambda t+c)],\quad H_3 = -2R^2\mathrm{csch}^2[R(x-\lambda t+c)],$$
$$u_4 = \lambda \pm 2R\,\mathrm{csch}[R(x-\lambda t+c)],\quad H_4 = -2R^2\mathrm{csch}^2[R(x-\lambda t+c)] - R^2,$$
$$u_5 = \lambda \pm 2R\tan[R(x-\lambda t+c)],\quad H_5 = -2R^2\sec^2[R(x-\lambda t+c)],$$
$$u_6 = \lambda \pm 2R\cot[R(x-\lambda t+c)],\quad H_6 = -2R^2\csc^2[R(x-\lambda t+c)],$$
$$u_7 = \lambda \pm 2R\sec[R(x-\lambda t+c)],\quad H_7 = -2R^2\sec^2[R(x-\lambda t+c)],$$
$$u_8 = \lambda \pm 2R\csc[R(x-\lambda t+c)],\quad H_8 = -2R^2\csc^2[R(x-\lambda t+c)] + R^2,$$
$$u_9 = \lambda \pm 2R\tanh[R(x-\lambda t+c)] \pm \mathrm{i}R\,\mathrm{sech}[R(x-\lambda t+c)],$$
$$H_9 = R^2\mathrm{sech}^2[R(x-\lambda t+c)] \pm \mathrm{i}R^2\tanh[R(x-\lambda t+c)]\mathrm{sech}[R(x-\lambda t+c)],$$
$$u_{10} = \lambda \pm R\coth[R(x-\lambda t+c)] \pm R\,\mathrm{csch}[R(x-\lambda t+c)],$$
$$H_{10} = R^2\mathrm{csch}^2[R(x-\lambda t+c)] \pm R^2\coth[R(x-\lambda t+c)]\mathrm{csch}[R(x-\lambda t+c)],$$
$$u_{11} = \lambda \pm R\tan[R(x-\lambda t+c)] \pm R\sec[R(x-\lambda t+c)],$$
$$H_{11} = R^2\sec^2[R(x-\lambda t+c)] \pm R^2\tan[R(x-\lambda t+c)]\sec[R(x-\lambda t+c)],$$
$$u_{12} = \lambda \pm R\cot[R(x-\lambda t+c)] \pm R\csc[R(x-\lambda t+c)],$$
$$H_{12} = -R^2\csc^2[R(x-\lambda t+c)] \pm R^2\cot[R(x-\lambda t+c)]\csc[R(x-\lambda t+c)],$$

其中包括具有重要物理意义新的孤子解•

3 算法 2 及非均匀谱变系数 KdV 方程

算法 2 对于给定的方程(3), 首先引入新的变量, 如 ϕ, 则(3) 或许变成含有更多方程的如下方程组

$$F_i(u, \phi, u_t, \phi_t, u_x, \phi_x, u_{xx}, \phi_{xx}, \cdots) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, \cdots)• \tag{14}$$

且设(14)中的解 u 都为(3)的解• 如果我们能给出如下的变换

$$u_{n+1} = C_1(u_n, \phi_n), \tag{15a}$$

$$\phi_{n+1} = C_2(u_n, \phi_n), \tag{15b}$$

其中 (u_n, ϕ_n) 满足(14)• 且若可以证明 (u_{n+1}, ϕ_{n+1}) 也满足(14), 则根据变换(15)可一步一步地得到(3)的一系列解析解•

例 3 非均匀谱变系数 KdV 方程

$$u_t + k_1(u_{xxx} + 6uu_x) + (4k_2 - xk_3)u_x - 2k_3 u = 0, \tag{16}$$

其中 $k_1 = k_1(t)$, $k_2 = k_2(t)$, $k_3 = k_3(t)$ 为 t 的任意的函数• 许多著名的方程, 如 KdV 方程及柱_KdV 方程[1,4]都为(16)的特例•

通过引入新的变量 ϕ, 则(16)扩展为如下的方程组

$$\phi_x = \lambda - u - \phi^2, \tag{17a}$$

$$\phi_t = [xk_3 - 4k_2 - 2k_1(u + 2\lambda)]\phi_x + (k_3 - 2k_1u_x)\phi + k_1u_{xx}, \tag{17b}$$

且谱变量 λ 满足

$$\lambda_t - 2k_3\lambda = 0, \quad \text{i.e,} \quad \lambda = \exp\left[\int 2k_3(t)\,\mathrm{d}t\right] • \tag{18}$$

很显然(17a)和(17b)的相容条件 $\phi_{xt} = \phi_{tx}$ 恰是(16), 因此说如果 (u, ϕ) 为(17a)和(17b)的解, 则 u 一定为(16)的解• 事实上, (17)为(16)的 Riccati 形式的 Lax 对• 下面我们主要考虑(17)•

定理 2 令

$$M_n(x, t) = [4k_2 + 2k_1(u_n + 2\lambda) - xk_3]\phi_n - k_1u_{nx} + \frac{1}{2}k_3 + \frac{\partial}{\partial t}\left(\int \phi_n \mathrm{d}x\right), \tag{19}$$

$$N_n(x, t) = [4k_2 + 2k_1(u_n + 2\lambda) - xk_3]\exp\left(-2\int \phi_n \mathrm{d}x\right) + 2M_n(x, t)\int \exp\left(-2\int \phi_n \mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial t}\left(\int \exp\left(-2\int \phi_n \mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x\right) • \tag{20}$$

$$W_n(x, t) = \int \exp\left(-2\int \phi_n \mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x + \exp\left(-2\int M_n \mathrm{d}t\right)\left[c_0 - \int N_n \exp\left(2\int M\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}t\right], \tag{21}$$

$$u_{n+1} = u_n - 2\phi_{n,x} - 2(\ln W_n(x, t))_{xx}, \tag{22a}$$

$$\phi_{n+1} = -\phi_n - (\ln W_n(x, t))_x \qquad (i = 1, 2, 3, \cdots), \tag{22b}$$

其中 c_0 为常数• 如果 (u_n, ϕ_n), 满足(17), 则 (u_{n+1}, ϕ_{n+1}) 也一定满足(17)•

证明 直接计算可知

$$(\ln W_n)_x = \exp\left(-2\int \phi_n \mathrm{d}x\right)W_n^{-1}, \tag{23}$$

$$(\ln W_n)_{xx} = -2\phi_n \exp\left(-2\int \phi_n \mathrm{d}x\right)W_n^{-1} - \exp\left(-4\int \phi_n \mathrm{d}x\right)W_n^{-2} • \tag{24}$$

将(23)和(24)代入(22), 并结合条件 (u_n, ϕ_n) 满足(17), 即

$$\phi_{n,x} = \lambda - u_n - \phi_n^2, \tag{25a}$$

$$\phi_{n,t} = [xk_3 - 4k_2 - 2k_1(u_n + 2\lambda)]\phi_{n,x} + (k_3 - 2k_1u_{n,x})\phi_n + k_1u_{n,xx} • \tag{25b}$$

可证 (u_{n+1}, ϕ_{n+1}) 满足(17a), 即

$$\phi_{n+1,x} = \lambda - u_{n+1} - \phi_{n+1}^2, \tag{26}$$

从(25a)和(26), 得

$$u_n = u_{n+1} + 2\phi_{n+1,x} = u_{n+1} + 2(\lambda - u_{n+1} - \phi_{n+1}^2) = 2\lambda - u_{n+1} - 2\phi_{n+1}^2, \tag{27}$$

$$u_{n,x} = -u_{n+1,x} - 4\phi_{n+1}\phi_{n+1,x} = -u_{n+1,x} - 4\phi_{n+1}(\lambda - u_{n+1} - \phi_{n+1}^2), \tag{28}$$

$$u_{n,xx} = -u_{n+1,xx} - 4(\lambda - u_{n+1} - \phi_{n+1}^2) + 4\phi_{n+1}u_{n+1,x} + 8\phi_{n+1}^2(\lambda - u_{n+1} - \phi_{n+1}^2). \tag{29}$$

又从(22b),可得

$$\phi_{n+1,t} = -k_1u_{n,xx} + (k_3 - 2k_1u_x)\phi_{n+1} + [4k_2 + 2k_1(u_n + 2\lambda) - xk_3]\phi_{n+1,x}. \tag{30}$$

将(27)～(29)代入(30),可得(u_{n+1}, ϕ_{n+1})满足

$$\phi_{n+1,t} = [xk_3 - 4k_2 - 2k_1(u_{n+1} + 2\lambda)]\phi_{n+1,x} + (k_3 - 2k_1u_{n+1,x})\phi_{n+1} + k_1u_{n+1,xx}. \tag{31}$$

因此定理得证. 下面应用该定理来考虑(16)的显式解析解.

情况1 取(17)的特解$u_1 = \lambda$, $\phi_1 = 0$, 得

$$\int\phi_1\mathrm{d}x = g(t), \quad \int\exp\left(-2\int\phi_1\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x = \exp[-2g(t)]x + f(t). \tag{32}$$

其中$g(t), f(t)$为t的积分函数. 因此有

$$M_1 = g_t + \frac{1}{2}k_3, \tag{33}$$

$$N_1 = f_t + 2fg_t + fk_3 + (6\lambda k_1 + 4k_3)\exp(-2g), \tag{34}$$

$$W_1(x,t) = \exp(-2g)x + f + \exp\left(-g - \frac{1}{2}\int k_3(t)\mathrm{d}t\right)\Big[\beta_0 - \int\beta_1(t)\exp\left(g + \frac{1}{2}\int k_3(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}t\Big]. \tag{35}$$

由得到的变换(22),可推得(17)的另一有理形式的解析解

$$u_2 = \lambda - 2\exp(-4g)\Big\{\exp(-2g)x + f + \exp\left(-g - \frac{1}{2}\int k_3(t)\mathrm{d}t\right)\Big[c_0 - \int N_1\exp\left(g + \frac{1}{2}\int k_3(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}t\Big]\Big\}^{-2}, \tag{36}$$

$$\phi_2 = \exp(-2g)\Big\{\exp(-2g)x + f + \exp\Big[-g - \frac{1}{2}\int k_3(t)\mathrm{d}t\Big]\Big[c_0 - \int N_1\exp\left(g + \frac{1}{2}\int k_3(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}t\Big]\Big\}^{-1}. \tag{37}$$

情况2 再取(17)的另一特解为

$$u_1(x,t) = \lambda - \mu\exp\left(\int k_3\mathrm{d}t\right), \quad \phi_1 = \mu\exp\left(\int k_3\mathrm{d}t\right), \tag{38}$$

其中$\mu \neq 0$. 由(38)可得

$$\int\phi_1\mathrm{d}x = \mu\exp\left(\int k_3\mathrm{d}t\right)x + h_1(t),$$

$$\int\exp\left(-2\int\phi_1\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2\mu}\exp\Big[-2\mu x e^{\int k_3\mathrm{d}t} - \int k_3\mathrm{d}t - 2h_1(t)\Big] + h_2(t),$$

其中$h_1(t), h_2(t)$为积分函数. 因此可得

$$W_1(x,t) = -\frac{1}{2\mu}\exp\Big[-2\mu x e^{\int k_3\mathrm{d}t} - \int k_3\mathrm{d}t - 2h_1(t)\Big] + h_2(t) + c_0\exp\Big[-2\int M_1\mathrm{d}t\Big].$$

由得到的变换(22),可推得(17)的另一解

$$u_2(x,t) = \lambda - \mu\exp\left(\int k_3\mathrm{d}t\right) - \frac{2(W_{1xx}W_1 - W_{1x}^2)}{W_1^2},$$

$$\phi_2(x,t) = -\mu\exp\left(\int k_3\mathrm{d}t\right) - \frac{W_{1x}}{W_1}.$$

其实,$u_2(x,t)$为方程(1)的类孤子解. 有进一步的情况分析如下

情况 2a 当 $\operatorname{sgn}(\mu) = -\operatorname{sgn}\left(h_2(t) + c_0\exp\left[-2\int M_1\mathrm{d}t\right]\right)$ 时, 我们可得到方程(1) 的钟状类孤子解

$$\begin{aligned}u_{21}(x,t) = {}& \lambda - \mu\exp\left(\int k_3\mathrm{d}t\right) - 2\mu^2\exp\left(2\int k_3\mathrm{d}t\right)\times \\ & \operatorname{sech}^2\left\{-\mu x e^{\int k_3\mathrm{d}t} - \frac{1}{2}\int k_3\mathrm{d}t - h_1(t) - \right. \\ & \left.\ln\left[-2\mu h_2(t) - 2\mu c_0\exp\left(-2\int M_1\mathrm{d}t\right)\right]\right\}.\end{aligned}$$

情况 2b 当 $\operatorname{sgn}(\mu) = \operatorname{sgn}\left(h_2(t) + c_0\exp\left[-2\int M_1\mathrm{d}t\right]\right)$ 时, 我们可得到方程(1) 的奇性类孤子解

$$\begin{aligned}u_{22}(x,t) = {}& \lambda - \mu\exp\left(\int k_3\mathrm{d}t\right) - 2\mu^2\exp\left(2\int k_3\mathrm{d}t\right)\times \\ & \operatorname{csch}^2\left\{-\mu x e^{\int k_3\mathrm{d}t} - \frac{1}{2}\int k_3\mathrm{d}t - h_1(t) - \right. \\ & \left.\ln\left[-2\mu h_2(t) - 2\mu c_0\exp\left(-2\int M_1\mathrm{d}t\right)\right]\right\}.\end{aligned}$$

根据同样的步骤, 我们可以一步一步地推得(16) 的一系列解析解. 在求解过程中只须做积分和微分运算就可以.

4 结 论

总之, 我们基于 AC= BD 的思想, 获得了很多的算法来求解微分方程, 并将这些算法应用于具体的具有实际意义的数学物理方程, 如 Burgers 方程, 浅水波近似方程及变系数 KdV 方程. 推得了许多有意义的解析解. 此外, 借助于吴消元法及数学软件, 如 Mathematica, Maple, 该途径可以在 computer 上实现.

[参 考 文 献]

[1] Ablowitz M J, Clarkson P A. Soliton Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scatting[M]. New York: Cambridge University Press, 1991.

[2] Olver P J. Applications of Lie Groups to Differential Equatons[M]. New York: Springer_Verlag, 1986.

[3] Bluman G W, Kumei S. Symmetries and Differential Equations[M]. New York: Springer_Verlag, 1989.

[4] Gu C H, Li Y S, Guo B L, et al. Soliton Theory and Its Application[M]. Berlin: Springer, 1995.

[5] Cox D. Ideal Varieties and Algorithms[M]. New York: Springer_Verlag, 1991.

[6] ZHANG Hong_qing. The algebraization, mechanization, symplectication and geometrization for mechanics[A]. In: LIU Yu_lu Ed. Modern Math Mech(MMM_Ⅶ)[C]. Shanghai: Shanghai University Press, 1997, 20.

[7] ZHANG Hong_qing. A united theory on general solution of systems of elasticity[J]. J Dalian University of Technology, 1978, **18**(1): 25—47.

[8] ZHANG Hong_qing. Algebraic constructure for general solutions of linear operator systems[J]. Acta Mechanica Sinica, 1981, **13**(special issure): 26—31.

[9] 张鸿庆. Mexwell 方程的多余阶次与恰当解[J]. 应用数学和力学, 1981, **2**(3): 321—331.

[10] ZHANG Hong_qing, WANG Zhen_yu. The completeness and approximation of Hu Haichang's solution[J]. Kexue Tongbao, 1986, **31**(10): 667—672.
[11] ZHANG Hong_qing, WU Fang_xiang. General solutions for a class of system of partial differential equations and its application in the theory of shells[J]. Acta Mechanica Sinica, 1992, **24**(5): 700—705.
[12] 张鸿庆, 杨光. 变系数偏微分方程组一般解的构造[J]. 应用数学和力学, 1991, **12**(2): 135—139.
[13] ZHANG Hong_qing, YAN Zhen_ya. New explicit and exact solutions for nonlinear evolution equations [J]. Math Appl, 1999, **12**(1): 76—81.
[14] YAN Zhen_ya, ZHANG Hong_qing. New explicit and exact solutions for a system of variant Boussinesq equations in mathematical physics[J]. Phys Lett A, 1999, **252**(2): 291—297.
[15] YAN Zhen_ya, ZHANG Hong_qing, FAN En_gui. New explicit travelling wave solutions for a class of nonlinear evolution equation[J]. Acta Phys Sin, 1999, **48**(1): 1—5.
[16] YAN Zhen_ya, ZHANG Hong_qing. Explicit and exact solutions for the generalized reaction duffing equation[J]. Commun Nonl Sci Numer Simu, 1999, **4**(3): 224—229.
[17] YAN Zhen_ya, ZHANG Hong_qing. Backlund transformation and exact solutions for (2+1)_dimensional KPP equation[J]. Commun Nonl Sci Numer Simu, 1999, **4**(2): 146—151.
[18] Wu W. On the zeros of polynomial set[J]. Kexue Tongbao, 1986, **31**(1): 1—5.
[19] Wu W. On the foundation of algebraic differential geometry[J]. MMR_Preptints, 1989, **3**(1): 1—6.

Two Types of New Algorithms for Finding Explicit Analytical Solutions of Nonlinear Differential Equations

ZHANG Hong_qing, YAN Zhen_ya
(Department of Applied Mathematics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, P R China)

Abstract: The idea of AC= BD was applied to solve the nonlinear differential equations. Suppose that Au = 0 is a given equation to be solved and Dv = 0 is an equation to be easily solved. If the transformation u = Cv is obtained so that v satisfies Dv = 0, then the solutions for Au = 0 can be found. In order to illustrate this approach, several examples about the transformation C are given.

Key words: nonlinear differential equations; transformation; algorithm; analytical solution