应用数学和力学, 第 21 卷 第 11 期(2000 年 11 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2000) 11_1125_08

弹性薄板弯曲问题的等价的边界积分方程

张耀明[1], 孙焕纯[2], 杨家新[2]

(1 山东工程学院 数理系, 山东淄博 255012; 2 大连理工大学 力学系, 大连 116023)

(我刊编委孙焕纯来稿)

摘要: 用非解析开拓数学方法建立平面弹性薄板弯曲问题理论中具有间接变量的等价边界积分方程, 并采用变分法进行了严格的说明 以往出现的三种间接变量边界积分方程, 它们都不是等价的, 对此我们进行了深入的讨论

关 键 词: 薄板弯曲问题; 边界元; 等价的边界积分方程

中图分类号: O342 文献标识码: A

引 言

用边界元法解平面双调和函数的边值问题已有很久的历史了, 较早期的工作是将简单的载荷情况转化为双层位势, 借助边界条件建立边界积分方程, 采用间接法, 其后采用直接法, 在数值求解中采用常数单元或线性单元 然而, 等价的边界积分方程, 即边界积分方程与原边值问题的等价性问题的研究, 一直未得到很好的解决 以往文献中出现三种间接变量边界积分方程[1,2], 它们都不是等价的, 本文对此进入了深入的讨论 本文用非解析开拓数学方法得出了任意任意区域内的双调和函数的一个边界积分表示式, 这个表示式中有两个边界函数和三个常数, 它们与双调和函数之间一一对应关系 建立在此边界积分表示式基础之上, 通过极限方法得出原边值问题的等价的边界积分方程, 并用变分法进行了严格的证明

1 基 本 概 念

我们总假设 是平面内的有界区域, = , $_c = R^2 - ($ $)$ 是区域 的补域 由 Kirchhoff 理论知, 各项同性薄板弯曲问题的控制微分方程为

$$^4 w(\boldsymbol{x}) = q/D \qquad (\boldsymbol{x} \qquad) \tag{1}$$

式中 w 为板的侧向位移, 即挠度; q 为横向外荷载; D 为板的抗弯刚度

常用的三种边界条件为

固支边 $_1$: $w = w$, $M_n = M_n$;

简支边 $_2$: $w = w$, $_n = _n$;

自由边 $_3$: $R_n = R_n$, $M_n = M_n$,

其中 $_n$, M_n, R_n 分别代表法向转角算子, 法向弯矩算子, 综合横力算子 表达式是

收稿日期: 1999_05_28; 修订日期: 2000_06_18
作者简介: 张耀明(1962) , 男, 山西省五寨县人, 副教授, 博士.

$$\left.\begin{aligned} R_{\boldsymbol{n}}(w) &= -D\left[\frac{}{\boldsymbol{n}}(\ ^2 w) + (1 - \ )\frac{^3 w}{\boldsymbol{n}\ ^2\boldsymbol{t}}\right], \\ M_{\boldsymbol{n}}(w) &= -D\left[\frac{^2 w}{^2\boldsymbol{n}} + \frac{^2 w}{^2\boldsymbol{t}}\right], \quad {}_{\boldsymbol{n}}(w) = \frac{w}{\boldsymbol{n}}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

这里 为泊松比; $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{t}$ 分别为边界曲线 的外法向和切向 在不致混淆的情形下, 我们将 ${}_{\boldsymbol{n}}(w^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})), M_{\boldsymbol{n}}(w^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})), R_{\boldsymbol{n}}(w^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}))$ 分别简记为 ${}^*_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), M^*_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), R^*_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 或 ${}^*_{\boldsymbol{n}}, M^*_{\boldsymbol{n}}, R^*_{\boldsymbol{n}}$, 将 ${}_{\boldsymbol{n}}(w), M_{\boldsymbol{n}}(w), R_{\boldsymbol{n}}(w)$ 分别简记为 ${}_{\boldsymbol{n}}, M_{\boldsymbol{n}}, R_{\boldsymbol{n}}$

方程(1) 式的基本解由下列方程定义

$$D\ ^4 w^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0,$$

即为 $$w^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = -\frac{1}{8\ D} r^2 \ln r \quad \left(r = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}\right)$$

2 基 本 定 理

定理 1 设 $w(\boldsymbol{x})$ 是 上的双调和函数, 则有

$$\left\{R_{\boldsymbol{n}}(w)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} - M_{\boldsymbol{n}}(w)\frac{}{\boldsymbol{n}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \mathrm{d} = 0 \tag{3}$$

证明 在区域 上, 将双调和函数 $w(\boldsymbol{x})$ 与任一个一次多项式 $p_1(\boldsymbol{x}) = ax_1 + bx_2 + c$ 应用 Betty 互等定理, 可得

$$\left\{R_{\boldsymbol{n}}(w) p_1(\boldsymbol{x}) - M_{\boldsymbol{n}}(w)\frac{p_1(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{n}}\right\} \mathrm{d} = 0 \tag{4}$$

在式(4) 中, 一次多项式 $p_1(\boldsymbol{x}) = ax_1 + bx_2 + c$ 取不同的 a, b, c 即可得式(3)

定理 2 设 $w_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{x})$ 是 ${}_{\mathrm{c}}$ 上的双调和函数, 且满足

当 $\boldsymbol{x}$ 时, $$w_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{x}) = O(\ln r) + p_1(\boldsymbol{x}) + o(1/r), \tag{5}$$

那么有

$$\left\{R_{\boldsymbol{n}}(w_{\mathrm{c}})\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} - M_{\boldsymbol{n}}(w_{\mathrm{c}})\frac{}{\boldsymbol{n}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \mathrm{d} = 0 \tag{6}$$

证明 以原点为圆心, R 为半径作圆域 $B_R(O)$, 简记为 B_R, 并使 $B_R(O)$, 令 $\hat{\ } = {}_{\mathrm{c}}$ B_R, 在区域 $\hat{\ }$ 上, 将双调和函数 $w_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{x})$ 与一次多项式 $p_1(\boldsymbol{x})$ 应用 Betty 互等定理, 可得

$$\left[R_{\boldsymbol{n}}(w_{\mathrm{c}}) p_1 - M_{\boldsymbol{n}}(w_{\mathrm{c}})\frac{p_1}{\boldsymbol{n}}\right] \mathrm{d} + {}_{B_R}\left[R_{\boldsymbol{n}}(w_{\mathrm{c}}) p_1 - M_{\boldsymbol{n}}(w_{\mathrm{c}})\frac{p_1}{\boldsymbol{n}}\right] \mathrm{d} = 0 \tag{7}$$

由式(5) 可知, 当 R 时, 在 B_R 上有 $R_{\boldsymbol{n}}(w_{\mathrm{c}}) = o\left(\frac{1}{R^3}\right)$, $M_{\boldsymbol{n}}(w_{\mathrm{c}}) = o\left(\frac{1}{R^2}\right)$, 于是

$$ {}_{B_R}\left[R_{\boldsymbol{n}}(w_{\mathrm{c}}) p_1(\boldsymbol{x}) - M_{\boldsymbol{n}}(w_{\mathrm{c}})\frac{p_1(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{n}}\right] \mathrm{d} \quad 0 \tag{8}$$

将式(8) 代入式(7) , 可得

$$\left[R_{\boldsymbol{n}}(w_{\mathrm{c}}) p_1(\boldsymbol{x}) - M_{\boldsymbol{n}}(w_{\mathrm{c}})\frac{p_1(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{n}}\right] \mathrm{d} = 0 \tag{9}$$

在式(9) 中, 一次多项式 $p_1(\boldsymbol{x}) = Ax_1 + bx_2 + C$ 取不同的 A, B, C, 即可得到(6) 式

定理 3 由积分

$$w_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{y}) = \left[q(\boldsymbol{x}) w^{*}(\boldsymbol{x}) - m(\boldsymbol{x}) \frac{w^{*}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\boldsymbol{n}} \right] \mathrm{d}_{\boldsymbol{x}},$$

所确定的双调和函数 $w_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{y})$, 当 $\boldsymbol{y}$ 时

$$w_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{y}) = O(\ln r) \tag{10}$$

成立当且仅当满足条件

$$\left\{ q(\boldsymbol{x}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} - m(\boldsymbol{x}) \frac{}{\boldsymbol{n}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \mathrm{d}_{\boldsymbol{x}} = 0 \tag{11}$$

证明 由于 $w^{*}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = -\frac{1}{8D} r^2 \ln r$, 所以当 $\boldsymbol{y}$ 时

$$w^{*}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = -\frac{1}{16D}[x_1^2 + x_2^2 - 2x_1y_1 - 2x_2y_2 + y_2^2 + y_2^2] \ln \frac{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}{y_1^2 + y_2^2} -$$

$$\frac{1}{16D}[x_1^2 + x_2^2 - 2x_1y_1 - 2x_2y_2 + y_1^2 + y_2^2] \ln(y_1^2 + y_2^2) =$$

$$O(\ln(y_1^2 + y_2^2)) + \frac{1}{2D}[y_1 + y_1 \ln(y_1^2 + y_2^2)] x_1 +$$

$$\frac{1}{2D}[y_2 + y_2 \ln(y_1^2 + y_2^2)] x_2 - \frac{1}{16D}(y_1^2 + y_2^2) \ln(y_1^2 + y_2^2),$$

由此可得, 当 $\boldsymbol{y}$ 时, 式(10) 成立当且仅当满足条件式(11)

推论 下列积分

$$w_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{y}) = \left[q(\boldsymbol{x}) w^{*}(\boldsymbol{x}) - m(\boldsymbol{x}) \frac{w^{*}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\boldsymbol{n}} \right] \mathrm{d}_{\boldsymbol{x}} + ay_1 + by_2 + c$$

所定义的函数 $w_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{y})$, 当 $\boldsymbol{y}$ 时

$$w_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{y}) = O(\ln r) + ay_1 + by_2 + c$$

成立当且仅当满足条件 $\left\{ q(\boldsymbol{x}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} - m(\boldsymbol{x}) \frac{}{\boldsymbol{n}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \mathrm{d}_{\boldsymbol{x}} = 0$

3 双调和函数的边界积分表示

首先我们就 为单连通区域的情形下进行讨论 现在我们将 上的双调和函数 $w(\boldsymbol{x})$ 非解析开拓到补域 $_{\mathrm{c}} = R^2 -$ 中去, 在 $_{\mathrm{c}}$ 中如下确定一个双调和函数

$$\left. \begin{aligned} &\text{在 }_{\mathrm{c}}\text{ 内:} \quad 4w_{\mathrm{c}} = 0, \\ &\text{在 上:} \quad w_{\mathrm{c}}^{+} = w^{-}, \quad \frac{w_{\mathrm{c}}}{\boldsymbol{n}^{+}} = \frac{w}{\boldsymbol{n}^{-}}, \\ &\text{在 处:} \quad w_{\mathrm{c}} = O(\ln r) + O(1/r) + p_1, \end{aligned} \right\} \tag{12}$$

这里 $\boldsymbol{n}$ 是区域 的边界在 $\boldsymbol{y}$ 点处的外法向量, $\hat{\boldsymbol{n}}$ 是区域 的边界在 $\boldsymbol{y}$ 点处的单位外法向量: $\frac{w}{\boldsymbol{n}^{-}} = \lim_{\substack{t^{-} \;\; 0 \\ y+ t\hat{n}}} \frac{w(y + t\hat{\boldsymbol{n}})}{\boldsymbol{n}}$, $\frac{w_{\mathrm{c}}}{\boldsymbol{n}} = \lim_{\substack{t^{+} \;\; 0 \\ y+ t\hat{n} \;\; \mathrm{c}}} \frac{w_{\mathrm{c}}(y + t\hat{\boldsymbol{n}})}{\boldsymbol{n}}$, p_1 是一个待定的一次多项式, 即 $p_1(\boldsymbol{x}) = ax_1 + bx_2 + c$ 为了叙述方便, 引入标识函数

$$S(\boldsymbol{y}) = \begin{cases} 1 & (\boldsymbol{y} \quad), \\ 0 & (\boldsymbol{y} \quad _{\mathrm{c}}), \end{cases} \quad S_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{y}) = \begin{cases} 0 & (\boldsymbol{y} \quad), \\ 1 & (\boldsymbol{y} \quad _{\mathrm{c}}) \end{cases}$$

在区域 内将基本解 $w^{*}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 和函数 $w(\boldsymbol{x})$ 应用 Betty 互等定理[2], 可得

$$S(\boldsymbol{y})w(\boldsymbol{y}) = \quad (w^{*}\ R_{\boldsymbol{n}^-}(w) - \ {}^{*}_{\boldsymbol{n}^-}M_{\boldsymbol{n}^-}(w) + \ {}_{\boldsymbol{n}^-}(w)M^{*}_{\boldsymbol{n}^-} - wR^{*}_{\boldsymbol{n}^-})\mathrm{d}\ \ {}_{\boldsymbol{x}} \tag{13}$$

以原点为圆心, 充分大的 R 为半径作圆域 $B_R(0)$, 并使得 $B_R(0)$　　令 $\hat{}\ = B_R(O)$ ${}_c$, 在区域 $\hat{}$ 内, 将函数 $w^{*}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 与 $w(\boldsymbol{x})$ 应用 Betty 互等定理, 可得

$$S_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{y})w_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{y}) = - \quad [w^{*}\ R_{\boldsymbol{n}^+}(w_{\mathrm{c}}) - \ {}^{*}_{\boldsymbol{n}^+}M_{\boldsymbol{n}^+}(w_{\mathrm{c}}) + \ {}_{\boldsymbol{n}^+}(w_{\mathrm{c}})M^{*}_{\boldsymbol{n}^+} - w_{\mathrm{c}}R^{*}_{\boldsymbol{n}^+}]\mathrm{d}\ \ {}_{\boldsymbol{x}} + I_R(w^{*}, w_{\mathrm{c}}), \tag{14}$$

其中

$$I_R(w^{*}, w_{\mathrm{c}}) = \quad_{B_R}[w^{*}\ R_{\boldsymbol{n}^-}(w_{\mathrm{c}}) - \ {}^{*}_{\boldsymbol{n}^-}M_{\boldsymbol{n}^-}(w_{\mathrm{c}}) + \ {}_{\boldsymbol{n}^-}(w_{\mathrm{c}})M^{*}_{\boldsymbol{n}^-} - w_{\mathrm{c}}R^{*}_{\boldsymbol{n}^-}]\mathrm{d}\ \ {}_{\boldsymbol{x}}, \tag{15}$$

当 R　　时, 只有 w_{c} 的主部才对(15) 式的积分有贡献, 而 w_{c} 主部包括两项, 即 $O(\ln r)$ 和 $p_1(\boldsymbol{x}) = \ \alpha x_1 + \ bx_2 + \ c$　因此式(15) 可变成

$$I_R(w^{*}, w_{\mathrm{c}}) = I^1_R(w^{*}, \ln r) + I^2_R(w^{*}, p_1(\boldsymbol{x})), \tag{16}$$

这里

$$I^1_R(w^{*}, w_{\mathrm{c}}) = \quad_{B_R}[w^{*}\ R_{\boldsymbol{n}^-}(\ln r) - \ {}^{*}_{\boldsymbol{n}^-}M_{\boldsymbol{n}^-}(\ln r) + \ {}_{\boldsymbol{n}^-}(\ln r) - \ln r R^{*}_{\boldsymbol{n}^-}]\mathrm{d}\ \ {}_{\boldsymbol{x}} \tag{17}$$

$$I^2_R(w^{*}, p_1) = \quad_{B_R}[w^{*}\ R_{\boldsymbol{n}^-}(p_1) - \ {}^{*}_{\boldsymbol{n}^-}M_{\boldsymbol{n}^-}(p_1) + \ {}_{\boldsymbol{n}^-}(p_1)M^{*}_{\boldsymbol{n}^-} - p_1R^{*}_{\boldsymbol{n}^-}]\mathrm{d}\ \ {}_{\boldsymbol{x}} \tag{18}$$

可证得

$$\text{当 } R \quad \text{时},\quad I^1_R(w^{*}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \ln r) \quad 1 \tag{19}$$

事实上, 由式(2) 可得

$$I^1_R(w^{+}, \ln r) = - D \quad_{B_R}\left[\ w^{*}\ \frac{(\ln r)}{\boldsymbol{n}^-} - \frac{(\ w^{*}\ )}{\boldsymbol{n}^-}\ln r\right]\mathrm{d}\ \ {}_{x} -$$

$$D(1 - \quad)\quad_{B_R}\left[\frac{^3(\ln r)}{\boldsymbol{n}^-\quad \boldsymbol{t}^2}w^{*} - \frac{^3w^{*}}{\boldsymbol{n}^-\quad \boldsymbol{t}^2}\ln r + \frac{^2(\ln r)}{\boldsymbol{t}^2}\ \frac{w^{*}}{\boldsymbol{n}^-} - \frac{^2w^{*}}{\boldsymbol{t}^2}\ \frac{(\ln r)}{\boldsymbol{n}^-}\right]\mathrm{d}\ \ {}_{x}$$

第二项积分等于角点项　$\left\{[M_{\boldsymbol{n}^-}\ w^{*}\ ]_{x^i} - [M^{*}_{\boldsymbol{n}^-}\ w]_{x^i}\right\}$, 但因　B_R 光滑不含有角点, 所以上式中的第一项积分为零　于是

$$I^1_R(w^{*}, \ln r) = - D \quad_{B_R}\left[\ w^{*}\ \frac{(\ln r)}{\boldsymbol{n}^-} - \frac{(\ w^{*}\ )}{\boldsymbol{n}^-}\ln r\right]\mathrm{d}\ \ {}_{\boldsymbol{x}}$$

由于当 R　　时, 在　B_R 上

$$w^{*}\ = - \frac{1}{2\ D}\ln R - \frac{1}{2\ D} + o\left(\frac{1}{R}\right), \frac{(\ln r)}{\boldsymbol{n}^-} = \frac{1}{R} + o\left(\frac{1}{R}\right),$$

$$\ln r = \ln R + o\left(\frac{1}{R}\right) \text{ 及 } \quad_{B_R}\frac{(\ w^{*}\ )}{\boldsymbol{n}^-}\mathrm{d}\ \ {}_{\boldsymbol{x}} = - \frac{1}{D},$$

所以当 R　　时, $I^1_R(w^{*}, \ln r)$　1

在区域 $B_R(O)$ 上, 将基本解 $w^{*}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 和多项式 $p_1(\boldsymbol{x})$ 函数应用 Betty 互等定理, 可得

$$I^2_R(w^{*}, p_1(\boldsymbol{x})) = p_1(\boldsymbol{y}) \tag{20}$$

将式(19) ~ (20) 代入式(16), 然后再将式(16) 代入式(14), 可得

$$S_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{y})w_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{y}) = - \quad [w^{*}\ R_{\boldsymbol{n}^+}(w_{\mathrm{c}}) - \ {}^{*}_{\boldsymbol{n}^+}M_{\boldsymbol{n}^+}(w_{\mathrm{c}}) + \ {}_{\boldsymbol{n}^+}(w_{\mathrm{c}})M^{*}_{\boldsymbol{n}^+} - w_{\mathrm{c}}R^{*}_{\boldsymbol{n}^+}]\mathrm{d}\ \ {}_{x} + p_1(\boldsymbol{y})\quad (\quad \boldsymbol{y}\qquad {}_{\mathrm{c}}) \tag{21}$$

将式(13)与(21)相加,可得

$$w(\boldsymbol{y}) = \left[q(\boldsymbol{x}) w^*(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - m(\boldsymbol{x}) \frac{w^*(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\boldsymbol{n}^-} \right] \mathrm{d}_{x} + p_1(\boldsymbol{y}) \qquad (\boldsymbol{y} \qquad {}_{c}) ,\tag{22}$$

其中 $q(\boldsymbol{x}) = R_{\boldsymbol{n}^-} w - R_{\boldsymbol{n}^+} w_c$, $m(\boldsymbol{x}) = M_{\boldsymbol{n}^-} w - M_{\boldsymbol{n}^+} w_c$

由定理1~定理3可知,$q(\boldsymbol{x})$, $m(\boldsymbol{x})$ 满足

$$\left\{ q(\boldsymbol{x}) \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ 1 \end{pmatrix} - m(\boldsymbol{x}) \frac{}{\boldsymbol{n}^-} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \mathrm{d} \quad = \quad 0 \tag{23}$$

对于 为复连通区域,即含有空洞的区域,上述证明仍然有效,只不过 是所有边界曲线的总和 对于无限区域 $_c$ 的情况,用同样的方法可证明(14)~(23)的正确性 因此可知公式(22)~(23)通用于单连通(不含空洞)和复连通(含空洞)、有限域和无限域等各种情形 (22)~(23)是双调和函数 $w(\boldsymbol{x})$ 的一种边界积分表示式,使得 $w(\boldsymbol{x})$ 与 q, m 及 a, b, c 之间存在一一对应关系:任给一个双调和函数 $w(\boldsymbol{x})$(或 $w_c(\boldsymbol{x})$),一定能且只能找到一组(q, m, a, b, c)使公式(22)~(23)成立,反之,任给一组(q, m, a, b, c),公式(22)给出一个双调和函数 上述结论的后半部分是显然的,只要将双调和算子 ^{4} 作用于方程(22)两边,即可得结论;至于结论的前半部,存在一组(q, m, a, b, c)使得表示式成立,我们已经证明,至于唯一性的证明,可由式(23)推得

4 等价的间接变量边界积分方程

1 三种常用边界条件下等价的间接变量边界积分方程

由双调和函数等价的间接变量表示式

$$w(\boldsymbol{y}) = \left[q(\boldsymbol{x}) w^*(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - m(\boldsymbol{x}) \frac{w^*(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\boldsymbol{n}} \right] \mathrm{d}_{x} + a\boldsymbol{y}_1 + b\boldsymbol{y}_2 + c, \tag{24}$$

$$\frac{w(\boldsymbol{y})}{\boldsymbol{n}_y} = \left[q(\boldsymbol{x}) \frac{w^*(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\boldsymbol{n}_y} - m(\boldsymbol{x}) \frac{{}^2 w^*(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\boldsymbol{n}\ \boldsymbol{n}_y} \right] \mathrm{d}_{x} + \frac{(a\boldsymbol{y}_1 + b\boldsymbol{y}_2 + c)}{\boldsymbol{n}_y}, \tag{25}$$

$$M_{\boldsymbol{n}}(w(\boldsymbol{y})) = km(\boldsymbol{y}) + \left[q(\boldsymbol{x}) M_{\boldsymbol{n}}(w^*(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})) - m(\boldsymbol{x}) M_{\boldsymbol{n}} \left(\frac{w^*(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\boldsymbol{n}} \right) \right] \mathrm{d}_{x}, \tag{26}$$

$$R_{\boldsymbol{n}}(w(\boldsymbol{y})) = kq(\boldsymbol{y}) + \left[q(\boldsymbol{x}) R_{\boldsymbol{n}}(w^*(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})) - m(\boldsymbol{x}) R_{\boldsymbol{n}} \left(\frac{w^*(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\boldsymbol{n}} \right) \right] \mathrm{d}_{x} \tag{27}$$

方程(26)与(27)中的 $M_n\left(\frac{w^*}{\boldsymbol{n}}\right)$, $R_n(w^*)$ 具有 $O\left(\frac{1}{r}\right)$ 型的奇异性,而 $R_n\left(\frac{w^*}{\boldsymbol{n}}\right)$ 具有 $O\left(\frac{1}{r^2}\right)$ 型的奇异性,因此它们在 上的常规积分甚至柯西积分都不存在 所以在 # 上只能取它们发散积分的有限部分(当然柯西积分是发散积分的有限部分的一种最常见的情况)# 通常的三种典型边界条件下的等价边界积分方程列表如表1:

表1

名 称	边 界 条 件	边界积分方程
固 支	w, $H_n(w)$	(23), (24), (25)
简 支	w, $M_n(w)$	(23), (24), (26)
自 由	$M_n(w)$, $R_n(w)$	(23), (26), (27)

4.2 间接变量边界积分方程的解的存在唯一性

我们以固支边界条件为例，用变分法来证明以上所导出的间接变量边界积分方程解的存在唯一性。所考虑的边界积分方程为

$$\left.\begin{aligned} w(y) &= \int_\Gamma \left\{ q(x) w^*(x,y) - m(x)\frac{\partial w^*(x,y)}{\partial n} \right\} \mathrm{d}\Gamma_x + p(y) \quad (\forall y \in \Gamma), \\ \frac{\partial w(y)}{\partial n_y} &= \int_\Gamma \left\{ q(x)\frac{\partial w^*(x,y)}{\partial n_y} - m(x)\frac{\partial^2 w^*(x,y)}{\partial n \partial n_y} \right\} \mathrm{d}\Gamma_x + \frac{\partial p(y)}{\partial n_y} \quad (\forall y \in \Gamma), \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

这里 $p(y)$ 是一次多项式，且 $q(x)$，$m(x)$ 满足式(23)。我们记

$$h = (q, m),\ h' = (q', m'),\ f = \left(w(y), \frac{\partial w(y)}{\partial n_y} \right)。$$

现在我们用变分法来证明：对 $\forall f \in H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$，方程(28)具有唯一确定的解对 $(q, m) \in V = H^{-3/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$。为此我们解下列变分方程，即求解 $(h, p) \in V \times P_1$ 使得

$$(R)\begin{cases} b(h, h') + c(p, h') = \langle f, h' \rangle, & \forall h' \in V, \\ c(p', h) = 0, & \forall p' \in P_1 \end{cases}$$

这里 P_1 是一次多项式的集合及 $\langle f, h' \rangle = -\langle q', w(y) \rangle + \langle m', \frac{\partial w(y)}{\partial n} \rangle$;

$$\begin{aligned} b(h, h') = & \int_\Gamma\int_\Gamma q(x) q'(y) w^*(x,y) \mathrm{d}\Gamma_x \mathrm{d}\Gamma_y - \int_\Gamma\int_\Gamma m(x) q'(y) \frac{\partial w^*(x,y)}{\partial n_y} \mathrm{d}\Gamma_x \mathrm{d}\Gamma_y - \\ & \int_\Gamma\int_\Gamma q(x) m'(y) \frac{\partial w^*(x,y)}{\partial n_y} \mathrm{d}\Gamma_x \mathrm{d}\Gamma_y + \int_\Gamma\int_\Gamma m(x) m'(y) \frac{\partial w^*(x,y)}{\partial n_x \partial n_y} \mathrm{d}\Gamma_x \mathrm{d}\Gamma_y, \end{aligned}$$

双线性形式 c 定义为

$$c(p', h) = -\int_\Gamma q'(y) p'(y) \mathrm{d}\Gamma_y + \int_\Gamma m'(y) \frac{\partial p'(y)}{\partial n} \mathrm{d}\Gamma_y, \tag{29}$$

它在 $V \times P_1$ 上是连续的，且可证得它满足 $\inf-\sup$ 条件，即存在一个正常数 γ，使得

$$\sup_{h' \in V} \frac{c(p', h')}{\| h' \|_V} \geq \gamma \| p' \|_{P_1} \tag{30}$$

事实上，由于 $p'(y) = Ay_1 + By_2 + C$ 为一次多项式，则

$$\frac{\partial p'}{\partial n} = A(n, y_1) + B(n, y_2) = An_1 + Bn_2,$$

这里 $n = (n_1, n_2)$ 为 Γ 的外法线。令 $h^* = \left(-p', \frac{\partial p'}{\partial n} \right) \in V$，则有

$$c(p'h^*) = \int_\Gamma | p' |^2 \mathrm{d}\Gamma + \int_\Gamma \left| \frac{\partial p'}{\partial n} \right|^2 \mathrm{d}\Gamma = A \| p' \|_{P_1} \qquad (A > 0),$$

P_1 为三维的一次多项式空间，它的所有范数是等价的。另一方面

$$\begin{aligned} \| h^* \|_V = \| h^* \|_{H^{-3/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)} = & \left\{ \| q' \|_{H^{3/2}(\Gamma)} + \| m' \|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \right\}^{1/2} \leq \\ & B\left\{ \| q' \|^2_{L_2} + \| m' \|^2_{L_2} \right\}^{1/2} = B \| h^* \|_{L_2} = B \| p' \|_{P_1} (B > 0), \end{aligned}$$

从而 $$\sup_{h' \in V} \frac{c(p', h')}{\| h' \|} \geq \frac{c(p', h^*)}{\| h^* \|_V} \geq \frac{A \| p' \|^2_{P_1}}{B \| p' \|_{P_1}} = \gamma \| p' \|_{P_1} \quad (\gamma = A/B),$$

根据 Vocirault 和 P_A. Raviart 的定理[3]，变分问题(R)的解是存在唯一的。

5 对旧间接变量边界积分方程的讨论

我们在无限区域 Ω_c（是以 Γ 为边界的有界区域 Ω 的补域）上对以往文献中出现的三种间

接变量边界积分方程进行讨论# 它们是不普遍适用的, 有时无解和解不唯一#

传统的流行的间接变量边界积分方程是从有限区域上的直接移植过来, 即基于 8_c 上的 $w_c(\boldsymbol{x})$ 可表示为[2]

$$w_c(\boldsymbol{y}) = \underset{Q\#}{}\left[q(\boldsymbol{x}) w^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - m(\boldsymbol{x}) \frac{5w^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{5\boldsymbol{n}} \right] \mathrm{d}\#_{\boldsymbol{x}\#} \tag{31}$$

现在我们如果能够证明对 8_c 上的一些特殊的双调和函数 $w_c(\boldsymbol{x})$, 找不到相应的 $q(\boldsymbol{x})$, $m(\boldsymbol{x})$ 使(31) 式成立, 那就解决问题#

事实上, 对于双调和函数 $w_c(\boldsymbol{x})$ S C(不为零的常数), 就找不到 $q(\boldsymbol{y})$, $m(\boldsymbol{y})$ 使得

$$\underset{Q\#}{}\left[q(\boldsymbol{x}) w^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - m(\boldsymbol{x}) \frac{5w^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{5\boldsymbol{n}} \right] \mathrm{d}\#_{\boldsymbol{x}} \; s \; C\# \tag{32}$$

当 $q(\boldsymbol{x})$, $m(\boldsymbol{x})$ 满足条件(23), 且两者不全为零时, 当 $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{y}$] 时有

$$\underset{Q\#}{}\left[q(\boldsymbol{x}) w^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + m(\boldsymbol{x}) \frac{5w^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{5\boldsymbol{n}} \right] \mathrm{d}\#_{\boldsymbol{x}} \; s \; O(\ln r)\#$$

当 $q(\boldsymbol{x})$, $m(\boldsymbol{x})$ 不满足条件(23) 时, (32) 具有更高阶的无穷大# 同样对于任一一次多项式 $p(\boldsymbol{y}) = a\boldsymbol{y}_1 + b\boldsymbol{y}_2 + c$, 可证得找不到相应的 $q(\boldsymbol{x})$, $m(\boldsymbol{x})$ 使(32) 式成立#

对于另一类间接变量边界积分方程[1]是基于 8_c 上的双调和函数 $w_c(\boldsymbol{y})$ 可以表示为

$$w_c(\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}_1^2 + \boldsymbol{y}_2^2) \underset{Q\#}{} R(\boldsymbol{x}) \ln r \, \mathrm{d}\#_{\boldsymbol{x}} + \underset{Q\#}{} G(\boldsymbol{x}) \ln r \, \mathrm{d}\#_{\boldsymbol{x}}, \tag{33}$$

显然对不全为零的 $R(\boldsymbol{x})$, $G(\boldsymbol{x})$, 当 $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{y}$] 时, 总有

$$(\boldsymbol{y}_1^2 + \boldsymbol{y}_2^2) \underset{Q\#}{} R(\boldsymbol{x}) \ln r \, \mathrm{d}\#_{\boldsymbol{x}} + \underset{Q\#}{} G(\boldsymbol{x}) \ln r \, \mathrm{d}\#_{\boldsymbol{x}} \; \boldsymbol{y} \;\;] \; \#$$

还有一类间接变量边界积分方程是基于 8_c 上的双调和函数 $w_c(\boldsymbol{y})$ 可以表示为

$$w_c(\boldsymbol{y}) = \underset{Q\#}{}\left[q(\boldsymbol{x}) w^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + m(\boldsymbol{x}) \frac{5w^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{5\boldsymbol{n}} \right] \mathrm{d}\#_{\boldsymbol{x}} + a(\boldsymbol{y}_1^2 + \boldsymbol{y}_2^2) + b\boldsymbol{y}_1 + c\boldsymbol{y}_2 + d\# \tag{34}$$

且 $q(\boldsymbol{x})$, $m(\boldsymbol{x})$ 满足条件

$$\underset{Q\#}{}\left\{ q(\boldsymbol{x}) \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1^2 + \boldsymbol{x}_2^2 \\ \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ 1 \end{pmatrix} - m(\boldsymbol{x}) \frac{5}{5\boldsymbol{n}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1^2 + \boldsymbol{x}_2^2 \\ \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \mathrm{d}\#_{\boldsymbol{x}} = 0\# \tag{35}$$

现在我们考虑一个外边值问题(或者内外边值问题的结合)# 设 8 是单位圆域, 其边界为 #(单位圆周), 它的补域为 $8_c = R^2 - 8$ G ## 假设(34) ~ (35) 是成立的, 那么对于任一组 (q, m, a, b, c, d), 由(34) 式所确定的双调和函数 $w_c(\boldsymbol{y})$, 所对应的原边值问题应该不再存在比 $w_c(\boldsymbol{y})$ 低阶的双调和函数#

现在我们考虑如下外边值问题

$$\text{在 } 8_c \text{ 上}: \; {}^4 w_c = 0, \quad \text{在 } \# \text{ 上}: w_c = 1, \; \frac{5w_c}{5\boldsymbol{n}} = -1\# \tag{36}$$

当 $a = -1$, $q = m = b = c = 0$ 时, 式(34) 所确定的双调和函数为 $w_c(\boldsymbol{y}) = -(\boldsymbol{y}_1^2 + \boldsymbol{y}_2^2)$, 它是边值问题(36) 的解, 但显然 $w_c^c(\boldsymbol{y}) = 1 - \ln(\boldsymbol{y}_1^2 + \boldsymbol{y}_2^2)$ 也是边值问题(36) 的解, 并且在无穷远处比 $w_c(\boldsymbol{y}) = -(\boldsymbol{y}_1^2 + \boldsymbol{y}_2^2)$ 低阶# 另一方面, 方程(34) 含有二次项, 在无穷远处的弯矩不为零, 从力学的观点, 这显然是荒谬的#

[参 考 文 献]

[1] Jawson M A, Symm G T. Integral Equation Methods in Potential and Elastics[M]. London: Academic Press, 1977.
[2] Hartman F. Introduction to Boundary Element: Theory and Applications[M]. Berlin: Springer_Verlag, 1989.
[3] Giranlt V, Raviart P A. Finite Element Approximation of the Navier_Stokes Equations[M]. Berlin: Springer_Verlag, 1986.
[4] 张耀明. 充要的无奇异边界积分方程[D]. 博士学位论文. 大连:大连理工大学,1996.
[5] 孙焕纯,张耀明. 无奇异边界元法[M]. 大连:大连理工大学出版社,1999.
[6] Venturini W S, Paiva J B. Boundary element for plate bending analysis[J]. Eng Anal Boundary Element, 1993, 11(2): 1) 8.

Equivalent Boundary Integral Equations With Indirect Unknowns for Thin Elastic Plate Bending Theory

ZHANG Yao_ming, SUN Huan_chun, YANG Jia_xin
(1. Department of Mathematics and Physics, Shandong Institute of Engineering, Zibo, Shandong 255012, P R China;
2. Department of Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian 116023, P R China)

Abstract: Equivalent Boundary Integral Equations (EBIE) with indirect unknowns for thin elastic plate bending theory, which is equivalent to the original boundary value problem, is established rigorously by mathematical technique of non_analytic continuation and is fully proved by means of the variational principle. The previous three kinds of boundary integral equations with indirect unknowns are discussed thoroughly and it is shown that all previous results are not EBIE.

Key words: thin plate bending theory; boundary element method; equivalent boundary integral equations