文章编号: 1000_0887(2000) 11_1133_08

ϕ_半压缩算子和 ϕ_强增殖算子方程的迭代*

丁协平,　张红琳

(四川师范大学 数学系, 成都 610066)

(我刊编委 丁协平来稿)

摘要: 设 E 是任意实 Banach 空间, K 是 E 的非空闭凸子集. $T: K \to K$ 是一致连续 ϕ_半压缩映像且值域有界. 设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{a_n'\}, \{b_n'\}$ 和 $\{c_n'\}$ 是 $[0, 1]$ 中的序列且满足条件: i) $a_n + b_n + c_n = a_n' + b_n' + c_n' = 1, \forall n \geqslant 0$; ii) $\lim b_n = \lim b_n' = \lim c_n' = 0$; iii) $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \infty$; iv) $c_n = o(b_n)$. 对任意给定的 $x_0, u_0, v_0 \in K$, 定义 Ishikawa 迭代 $\{x_n\}$ 如下:

$$\begin{cases} x_{n+1} = a_n x_n + b_n T y_n + c_n u_n, \\ y_n = a_n' x_n + b_n' T x_n + c_n' v_n \qquad (\forall n \geqslant 0), \end{cases}$$

其中 $\{u_n\}$ 和 $\{v_n\}$ 是 K 中两个有界序列. 则 $\{x_n\}$ 强收敛于 T 的唯一不动点. 最后研究了 ϕ_强增殖算子方程解的 Ishikawa 迭代收敛性.

关　键　词: ϕ_强增殖算子; ϕ_半压缩算子; Ishikawa 迭代序列; Banach 空间
中图分类号: O177.91　　　文献标识码: A

引　　言

设 E 是任意 Banach 空间, E^* 是其对偶空间. $\langle x, f^* \rangle$ 是 $x \in E$ 与 $f^* \in E^*$ 的广义对偶对. 称映像 $J: E \to 2^{E^*}$, $J(x) = \{f^* \in E^*: \langle x, f^* \rangle = \|f^*\| \|x\|, \|f^*\| = \|x\|\}$ 为正规对偶映像. 若 E 是严格凸的, 则 J 为单值, 我们记单值对偶映像为 j.

以下用 $D(A)$, $D(T)$ 和 $R(A)$, $R(T)$ 分别表示 A, T 的定义域和值域.

称算子 $A: D(A) \subset E \to E$ 为强增殖, 若对任意 $x, y \in D(A)$, 存在 $j(x-y) \in J(x-y)$ 及常数 $k > 0$ 使

$$\langle Ax - Ay, j(x-y) \rangle \geqslant k \|x - y\|^2. \tag{1}$$

A 称为 ϕ_强增殖, 若对任意 $x, y \in D(A)$, 存在 $j(x-y) \in J(x-y)$ 及严格增泛函 $\phi: [0, \infty) \to [0, \infty)$, $\phi(0) = 0$ 使

$$\langle Ax - Ay, j(x-y) \rangle \geqslant \phi(\|x - y\|) \|x - y\|. \tag{2}$$

我们知道(例如, 见[1]), 强增殖算子类是 ϕ_强增殖算子类的真子集. 与强增殖(ϕ_强增

* 收稿日期: 1999_06_21; 修订日期: 2000_09_20
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19871059)
作者简介: 丁协平(1938—), 男, 四川自贡人, 教授, 数学研究所所长.

殖)算子密切相关的是强伪压缩(ϕ_强伪压缩)算子•

称算子 $T: D(T) \subset E \to E$ 为强伪压缩,若对任意 $x, y \in D(T)$,存在 $j(x-y) \in J(x-y)$ 和常数 $t > 1$ 使

$$\langle Tx - Ty, j(x-y)\rangle \leqslant t^{-1}\|x-y\|^2 \cdot \tag{3}$$

T 称为 ϕ_强伪压缩,若对任意 $x, y \in D(T)$,存在 $j(x-y) \in J(x-y)$ 和严格增泛函 $\phi: [0, \infty) \to [0, \infty)$, $\phi(0) == 0$ 使

$$\langle Tx - Ty, j(x-y)\rangle \leqslant \|x-y\|^2 - \phi(\|x-y\|)\|x-y\| \cdot \tag{4}$$

进一步,称 T 为 ϕ_半压缩,若 T 的不动点集 $F(T) \neq \phi$ 且对任意 $x \in D(T)$, $x^* \in F(T)$,存在 $j(x-x^*) \in J(x-x^*)$ 和严格增泛函 $\phi: [0, \infty) \to [0, \infty)$, $\phi(0) = 0$ 使

$$\langle Tx - x^*, j(x-x^*)\rangle \leqslant \|x-x^*\|^2 - \phi(\|x-x^*\|)\|x-x^*\| \cdot \tag{5}$$

我们知道(见[1]),强伪压缩算子类是 ϕ_强伪压缩算子类的真子集• 文献[2]中的例子表明有不动点的 ϕ_强伪压缩算子类是 ϕ_半伪压缩算子类的真子集• 从不等式(1)~(4)易知 T 是强(ϕ_强)伪压缩算子当且仅当 $A = I - T$ 是强(ϕ_强)增殖算子(其中 I 是恒等算子)• 强伪压缩算子类和强增殖算子类已被许多作者广泛研究• 特别,De_imling[3, 定理 13.8]证明了若 $T: X \to X$ 是强增殖和次连续(即: $x_n \to x$ 蕴含 $Tx_n \to Tx$),则 T 是 X 到 X 的满射,即是说,对每一 $f \in X$,方程 $Tx = f$ 在 Z 中有一个解•

在各种不同的假设下,许多作者已证明(挠动)Mann 及 Ishikawa 迭代序列能用来逼近强伪压缩(ϕ_强伪压缩, ϕ_半伪压缩)算子的不动点和逼近强增殖(ϕ_强增殖)算子方程的唯一解• 例如,见[1~10]•

最近,Xu[11] 和 Chidume[12] 定义了一类新的带误差的 Mann 及 Ishikawa 迭代序列• 因为此定义与误差的随机性相容,所以更合理和令人满意• 使用新的带误差的迭代序列,他们在更弱的假设下证明了新的迭代序列强收敛于强伪压缩算子的唯一不动点和强增殖算子方程的唯一解• Chidume[12] 证明了下面结果•

定理 A 设 E 是任意 Banach 空间, K 是 E 的非空闭凸有界子集• 设 $T: K \to K$ 是一致连续强伪压缩映像• 定义 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 如下:取 $x_0, u_0, v_0 \in K$,

$$x_{n+1} = a_n x_n + b_n T y_n + c_n u_n,\ y_n = a_n' x_n + b_n' T x_n + c_n' v_n \quad (\forall n \geqslant 0),$$

其中 $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是 K 中任意序列; $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{a_n'\}$, $\{b_n'\}$ 和 $\{c_n'\}$ 是 $(0, 1)$ 中的实序列且满足下列条件: i) $a_n + b_n + c_n = 1 = a_n' + b_n' + c_n'$, $\forall n \geqslant 0$; ii) $\lim b_n = \lim b_n' = \lim c_n' = 0$; iii) $\sum b_n = \infty$; iv) $\sum c_n < \infty$,则 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 强收敛于 T 的唯一不动点•

对于 ϕ_半压缩算子, Zhou[13] 证明了下面结果•

定理 B 设 Z 为实光滑 Banach 空间, K 是 Z 的非空凸子集• 设 $T: K \to K$ 是一致光滑 ϕ_半压缩算子• $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ 和 $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是两个实数列满足: i) $0 < \alpha_n, \beta_n < 1$, $\forall n \geqslant \infty$; ii) $\alpha_n \to 0$, $\beta_n \to 0$, $n \to 0$; iii) $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$• 设 Ishikawa 迭代序列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 满足:

$$x_0 \in K, \quad x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n,\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T x_n \quad (\forall n \geqslant 0),$$

若 $\{x_n\}$ 有界,则 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 强收敛于 T 的唯一不动点•

关于 ϕ_强增殖算子方程和 ϕ_半压缩算子,参看[1, 2, 6, 8~10, 13]及其后的参考文献•

本文的目的是在更弱的条件下,把定理 A 和 B 推广到 Xu[11] 与 Chidume[12] 定义的带误差的

Mann 和 Ishikawa 迭代, 我们的结果推广和统一了近期许多重要结果•

1 预备知识

为了证明我们的主要定理, 我们还需下面的结果•

引理 1.1[14] 设 E 是 Banach 空间, J 是正规对偶映像, 则任取 $x, y \in E$,

$$\|x+y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2\langle y, j\rangle, \qquad \forall j \in J(x+y)•$$

引理 1.2[15] 设 $\{\rho_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是非负实数列满足

$$\rho_{n+1} \leqslant (1-\lambda_n)\rho_n + o(\lambda_n), \qquad \forall n \geqslant 0,$$

其中 $\lambda_n \in [0,1]$, $\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n = \infty$• 则 $\rho_n \to 0(n\to\infty)$•

引理 1.3 设 E 是实Banach 空间• $A: E\to E$ 为连续ϕ_强增殖算子且值域有界• 设 $\phi(r) \to \infty(r\to\infty)$• 则任给 $f \in E$, 方程 $Ax = f$ 有唯一解•

证明 取定数列 $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ 满足 $c_n > 0$, $c_n \to 0(n\to\infty)$, 对每一 $n = 0, 1, \cdots$, 定义算子 $A_n: E\to E$• $A_n(x) = c_n x + Ax$, $\forall x \in E$• 则每个 A_n 连续强增殖• 由Deimling[3, 定理13.8] 知, 任给 $f \in E$, 方程 $A_n x = f$ 有唯一解 $x_n \in E$, 即 $c_n x_n + Ax_n = f$, $\forall n = 0, 1, \cdots$• 因为 A 值域有界, 所以存在 $M > 0$ 使 $\phi(\|x_n - x_0\|) \leqslant \|Ax_n - Ax_0\| \leqslant M$• 注意当 $r\to\infty$ 时 $\phi(r)\to\infty$• 我们有 $\{\|x_n\|\}$ 有界• 因此 $Ax_n \to f(n\to\infty)$, 对任意 $n, m > 0$, 由 $\phi(\|x_n - x_m\|) \leqslant \|Ax_n - Ax_m\|$ 和 ϕ 为严格递增知 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 序列• 假设 $x_n \to x$, 则 A 的连续性蕴含着 $Ax_n \to Ax$• 所有必有 $Ax = f$, 现在我们证明方程 $Ax = f$ 解的唯一性• 设还存在 $x^* \in E$ 使 $Ax^* = f$, 则存在 $j(x-x^*) \in J(x-x^*)$ 使

$$0 = \langle Ax - Ax^*, j(x-x^*)\rangle \geqslant \phi(\|x-x^*\|)\|x-x^*\|,$$

从而 $\phi(\|x-x^*\|)\|x-x^*\| = 0$, 这推出 $x = x^*$• 所以方程 $Ax = f$ 的解唯一•

2 主要结果

定理 2.1 设 E 是任意实Banach 空间, K 是 E 的非空闭凸子集• $T: K\to K$ 是一致连续ϕ_半压缩算子且值域有界• 定义序列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 如下:

$$\left.\begin{aligned} & x_0, u_0, v_0 \in K,\ x_{n+1} = a_n x_n + b_n T y_n + c_n u_n, \\ & y_n = a_n' x_n + b_n' T x_n + c_n' v_n \quad (\forall n \geqslant 0), \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

其中 $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是 K 中的有界序列; $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{a_n'\}$, $\{b_n'\}$ 和 $\{c_n'\}$ 是 $[0,1]$ 中的实数列满足下面条件:

i) $a_n + b_n + c_n = 1 = a_n' + b_n' + c_n'$, $\forall n \geqslant 0$; ii) $\lim b_n = \lim b_n' = \lim c_n' = 0$; iii) $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \infty$• iv) $c_n = o(b_n)$•

则 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 强收敛于 T 的唯一不动点•

证明 因为 T 是ϕ_半压缩算子, 所以 T 的不动点集 $F(T)$ 非空• 设 $q, q^* \in F(T)$ 且 $q \neq q^*$, 则存在 $j(q-q^*) \in J(q-q^*)$ 使

$$\|q-q^*\|^2 = \langle Tq - q^*, j(q-q^*)\rangle \leqslant \|q-q^*\|^2 - \phi(\|q-q^*\|)\|q-q^*\|,$$

所以 $\phi(\|q-q^*\|) = 0$• 因为 ϕ 是严格增的而且 $q \neq q^*$, 我们有 $\phi(\|q-q^*\|) > 0$, 这是

个矛盾• 因此 $q = q^*$, $F(T)$ 是单点集•

由(6)和引理1.1, 对任意 $n \geqslant 0$, 存在 $j(x_{n+1} - q) \in J(x_{n+1} - q)$ 使

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - q\|^2 = {} & \|a_n(x_n - q) + b_n(Ty_n - q) + c_n(u_n - q)\|^2 \leqslant \\ & a_n^2\|x_n - q\|^2 + 2b_n\langle Tx_{n+1} - q, j(x_{n+1} - q)\rangle + \\ & 2b_n\langle Ty_n - q - (Tx_{n+1} - q), j(x_{n+1} - q)\rangle + 2c_n\langle u_n - q, j(x_{n+1} - q)\rangle \leqslant \\ & a_n^2\|x_n - q\|^2 + 2b_n[\|x_{n+1} - q\|^2 - \Phi(\|x_{n+1} - q\|)\|x_{n+1} - q\|] + \\ & 2b_n\rho_n + 2c_n\langle u_n - q, j(x_{n+1} - q)\rangle,\end{aligned} \tag{7}$$

其中 $\rho_n = \langle Ty_n - q - (Tx_{n+1} - q), j(x_{n+1} - q)\rangle$•

因为 T 的值域, $\{u_n\}$ 和 $\{v_n\}$ 都是有界的, 由(6) 易知 $\{x_n\}$ 也是有界的• 根据条件 i), ii) 和 iv), 我们有

$$\begin{aligned}x_{n+1} - y_n = {} & (a_n - a_n')x_n + b_nTy_n - b_n'Tx_n + c_nu_n - c_n'v_n = \\ & (b_n' + c_n' - b_n - c_n)x_n + b_nTy_n - b_n'Tx_n + c_nu_n - c_n'v_n \to 0•\end{aligned}$$

由 T 的一致连续性有 $Tx_{n+1} - Ty_n \to 0$, 因此 $\rho_n \to 0 (n \to \infty)$• 令 $M_1 = \sup_{x \in K} Tx$ 和 $d = \max\left\{\sup_{n \geqslant 0}\|u_n - q\| + M_1, 2M_1, \|x_0 - q\|\right\}$, 则由(6) 有 $\|x_n - q\| \leqslant d (\forall n \geqslant 0)$• 从(7) 我们得到

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - q\|^2 \leqslant {} & a_n^2\|x_n - q\|^2 + 2b_n\|x_{n+1} - q\|^2 - \\ & 2b_n\Phi(\|x_{n+1} - q\|)\|x_{n+1} - q\| + 2b_n\rho_n + 2c_nd^2 \leqslant \\ & a_n^2\|x_n - q\|^2 + 2b_n\|x_{n+1} - q\|^2 - \\ & 2b_n\frac{\Phi(\|x_{n+1} - q\|)}{1 + \|x_{n+1} - q\|}\|x_{n+1} - q\|^2 + 2b_n\rho_n + 2c_nd^2•\end{aligned} \tag{8}$$

下面我们考虑两种可能情况•

情形 1 $\inf_{n \geqslant 0}\frac{\Phi(\|x_{n+1} - q\|)}{1 + \|x_{n+1} - q\|} = m > 0$• 不失一般性, 我们假设 $m \in (0, 1)$• 由(8) 有

$$\|x_{n+1} - q\|^2 \leqslant \frac{(1 - b_n - c_n)^2}{1 - 2b_n + 2b_nm}\|x_n - q\|^2 + \frac{2b_n\rho_n}{1 - 2b_n + 2b_nm} + \frac{2c_nd^2}{1 - 2b_n + 2b_nm}•$$

由条件(iv), 我们可假设 $c_n = \sigma_nb_n (\sigma_n \to 0)$• 因此存在 $N_1 > 0$ 使 $b_n \geqslant c_n$, $\forall n \geqslant N_1$• 所以有

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - q\|^2 \leqslant {} & \left[1 - \frac{2b_nm + 2c_n - (b_n + c_n)^2}{1 - 2b_n(1 - m)}\right]\|x_n - q\|^2 + \frac{2b_n}{1 - 2b_n(1 - m)}[\rho_n + \sigma_nd^2] \leqslant \\ & \left[1 - \frac{2b_nm - 4b_n}{1 - 2b_n(1 - m)}\right]\|x_n - q\|^2 + \frac{2b_n}{1 - 2b_n(1 - m)}[\rho_n + \sigma_nd^2]•\end{aligned} \tag{9}$$

因为 $b_n \to 0$, 所以存在 $N_2 > 0$ 使 $b_n \leqslant m/4$, $\forall n \geqslant N_2$• 令 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则有 $\forall n \geqslant N$,

$$2b_nm - 4b_n^2 = 2b_n(m - 2b_n) \geqslant 2b_n\left(m - m/2\right) = mb_n,$$

$$(2b_nm - 4b_n^2)/(1 - 2b_n(1 - m)) \geqslant mb_n•$$

令 $\lambda_n = 2b_n(m - 2b_n)/(1 - 2b_n(1 - m)) \geqslant mb_n$ 和 $t_n = 2b_n(\rho_n + \sigma_nd^2)/(1 - 2b_n(1 - m))$, 由(9) 有

$$\|x_{n+1} - q\|^2 \leqslant (1 - \lambda_n)\|x_n - q\|^2 + t_n•$$

其中 $\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n = \infty$(由 iii) 可知) 和 $t_n = 0(\lambda_n)$• 根据引理1.2有 $\|x_{n+1} - q\|^2 \to 0$• 因此 x_n

$\to q(n\to\infty)$.

情形 2 $\inf_{n\geqslant 0}\left\{\phi(\|x_{n+1}-q\|)/(1+\|x_{n+1}-q\|\right\}=0$. 因为$\phi:[0,\infty)\to[0,\infty)$严格增加,所以存在某个子序列$\left\{x_{n_j}\right\}$强收敛于$q(j\to\infty)$,下面我们证明$x_n\to q(n\to\infty)$.

因为$x_{n_j}\to q(j\to\infty)$和$b_n\to 0,\rho_n\to 0,\sigma_n\to 0(n\to\infty)$,所以对任给的$\varepsilon>0$,存在某个固定$j\geqslant 1$使

$$\|x_{n_j}-q\|<\varepsilon\text{和}b_{n_j}(1+\sigma_{n_j})^2d^2+2\rho_{n_j}+2\sigma_{n_j}d^2\leqslant 2\varphi(\varepsilon)\varepsilon. \tag{10}$$

首先,我们证明$\|x_{n_j+1}-q\|<\varepsilon$. 假设此结论不真,则我们有

$$\|x_{n_j+1}-q\|\geqslant\varepsilon\text{和}\phi(\|x_{n_j+1}-q\|)\geqslant\phi(\varepsilon).$$

由(8)有

$$\|x_{n_j+1}-q\|^2\leqslant a_{n_j}^2\|x_{n_j}-q\|^2+2b_{n_j}\|x_{n_j+1}-q\|^2-2b_{n_j}\phi(\varepsilon)\varepsilon+2b_{n_j}\rho_{n_j}+2c_{n_j}d^2.$$

所以我们可得

$$\|x_{n_j+1}-q\|^2\leqslant\frac{1-2b_{n_j}-2c_{n_j}+(b_{n_j}+c_{n_j})^2}{1-2b_{n_j}}\|x_{n_j}-q\|^2+$$
$$\frac{1}{1-2b_{n_j}}[2b_{n_j}\rho_{n_j}+2c_{n_j}d^2-2b_{n_j}\phi(\varepsilon)\varepsilon\leqslant$$
$$\|x_{n_j}-q\|^2-\frac{1}{1-2b_{n_j}}[2b_{n_j}\phi(\varepsilon)\varepsilon-(b_{n_j}+c_{n_j})^2d^2-2b_{n_j}\rho_{n_j}-2c_{n_j}d^2]\leqslant$$
$$\|x_{n_j}-q\|^2-\frac{b_{n_j}}{1-2b_{n_j}}[2\phi(\varepsilon)\varepsilon-b_{n_j}(1+\sigma_{n_j})^2d^2-2\rho_{n_j}-2\sigma_{n_j}d^2].$$

由(10)及上面的不等式可得

$$\|x_{n_j+1}-q\|\leqslant\|x_{n_j}-q\|<\varepsilon.$$

这是一个矛盾. 所以必有$\|x_{n_j+1}-q\|<\varepsilon$. 用同样的方法我们可证明$\|x_{n_j+m}-q\|<\varepsilon$, $\forall m\geqslant 1$. 所以,定理得证.

注 2.1 定理2.1从下面几方面推广了定理A(Chidume[12]的定理1):(1) T的定义域K可以是无界的;(2)把一致连续强伪压缩算子推广到一致连续ϕ_半压缩算子;(3) 根据Chidume和Moore[16 p143]引理1知,条件$c_n=0(b_n)$弱于条件$\sum_{n=0}^{\infty}c_n<\infty$. 定理2.1还推广了Xu[11]定理3.3, Ding[1]推论3.2以及许多已知的结论,参见Xu[11]注4.

注 2.2 我们易证:当T的值域有界的假设换成序列$\left\{x_n\right\}$有界,定理2.1的结论仍然成立. 因此,定理2.1也把定理B(Zhou[13]定理2.2)推广到一般Banach空间和带随机误差的Ishikawa迭代.

定理 2.2 设E是任意实Banach空间,$A:E\to E$是一致连续ϕ_强增殖算子. 设$(I-A)$值域有界和$\phi(r)\to\infty(r\to\infty)$. 给定$f\in E$,定义$S:E\to E$, $Sx=f+x-Ax(\forall x\in E)$. 定义序列$\left\{x_n\right\}_{n=0}^{\infty}$如下:

$$x_0,u_0,v_0\in E,\ x_{n+1}=a_nx_n+b_nSy_n+c_nu_n,\ y_n=a_n'x_n+b_n'Sx_n+c_n'v_n\quad(\forall n\geqslant 0),$$

其中$\left\{u_n\right\}$和$\left\{v_n\right\}$是E中任意有界序列,$\left\{a_n\right\}$,$\left\{b_n\right\}$,$\left\{c_n\right\}$,$\left\{a_n'\right\}$,$\left\{b_n'\right\}$和$\left\{c_n'\right\}$是$[0,1]$中的实数列且满足定理2.1的条件 i)~ iv),则序列$\left\{x_n\right\}_{n=0}^{\infty}$强收敛于方程$Ax=f$的唯一解.

证明 根据引理1.3可得方程$Ax=f$解的存在性和唯一性. 设q是它的唯一解,则q是

S 的唯一不动点• 而且我们有

$$\begin{aligned}\langle Sx-q,j(x-q)\rangle &= \langle f-Ax+x-f+q-q,j(x-q)\rangle = \\ &\langle x-q,j(x-q)\rangle-\langle Ax-q,j(x-q)\rangle \leqslant \\ &\|x-q\|^2-\phi(\|x-q\|)\|x-q\|\bullet\end{aligned}$$

因此 S 是 ϕ_半压缩算子且 S 也是值域有界• 由定理 2.1 知 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 强收敛于 S 的唯一不动点 q, 即 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 强收敛于方程 $Ax=f$ 的唯一解 q•

注 2.3 定理 2.2 从下面几方面推广了 Chidume[12] 定理 2: (1) 把强增殖算子推广到 ϕ_ 强增殖算子; (2) 条件 $c_n=o(b_n)$ 比 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n<\infty$ 更弱• 因此, 定理 2.2 也推广了 Xu[11] 定理 3.1, Osilike[10] 定理 1 及许多已知结果•

定理 2.3 设 E 是任意实 Banach 空间, $A^*: E\to E$ 是一致连续增殖算子且值域有界, 给定 $f\in E$, 定义 $S^*: E\to E$, $S^*x=f-A^*x\ (\forall x\in E)$• 定义迭代序列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 如下:

$$x_0,u_0,v_0\in E,\ x_{n+1}=a_nx_n+b_nS^*y_n+c_nu_n,\ y_n=a'_nx_n+b'_nS^*x_n+c'_nv_n\quad(\forall n\geqslant 0),$$

其中 $\{u_n\}$ 和 $\{v_n\}$ 是 E 中任意有界序列, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{a'_n\}$, $\{b'_n\}$ 和 $\{c'_n\}$ 同定理 2.2, 则 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 强收敛于方程 $x+A^*x=f$ 的唯一解•

证明 定义 $A=I+A^*$, 其中 I 是 E 上的恒等算子, 则 $x+A^*x=f$ 化为 $Ax=f$, 这里 $A: E\to E$ 是一致连续强增殖算子, 因此 A 也是一致连续 ϕ_强增殖算子• 方程 $x+A^*x=f$ 解的存在性和唯一性由定理 2.2 就可得知• 显然, I_T 值域有界• 注意到 $S^*x=f-(A-I)x=f+(I-A)x=Sx$, 这里 S 同定理 2.1 中所定义• 则定理 2.3 可由定理 2.2 得出•

注 2.3 定理 2.3 从以下方面推广了 Chidume[12] 定理 3: 把条件 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n<\infty$ 削弱为 $c_n=o(b_n)$•

[参 考 文 献]

[1] Osilike M O. Iterative solution of nonlinear equations of ϕ_ strongly accretive type[J]. J Math Anal Appl, 1996, **200**(2): 259—271.

[2] Chidume C E, Osilike M O. Fixed point iterations for strictly hemi_contractive maps in uniformly smooth Banach spaces[J]. Numer Func Anal Optim, 1994, **15**(4): 779—790.

[3] Deimling K. Nonlinear Functional Analysis[M]. Berlin: Springer_Verlag, 1985.

[4] Deng L, DING Xie_ping. Iterative approximation of Lipschitz strictly pseudo_contractive mappings in uniformly smooth Banach spaces[J]. Nonlinear Anal, 1995, **24**(7): 981—987.

[5] DING Xie_ping. Iterative process with errors to locally strictly pseudocontractive maps in Banach spaces[J]. Computers Math Applic, 1996, **32**(10): 91—97.

[6] DING Xie_ping. Iterative process with errors to nonlinear Φ_strongly accretive operator equations in arbitrary Banach spaces[J]. Computers Math Applic, 1997, **33**(8): 75—82.

[7] DING Xie_ping. Iteration process with errors to nonlinear equations in arbitrary Banach spaces[J]. Acta Math Sinica, New Series, 1998, **14**(supplement): 577—584.

[8] Osilike M O. Stability of the Mann and Ishikawa iteration processes for ϕ_ strongly pseudocontractions and nonlinear equations of ϕ_strongly accretive type[J]. J Math Anal Appl, 1998, **227**(2): 319—334.

[9] Huang Z Y. Approximating fixed points of Φ_hemicontractive mappings by the Ishikawa iteration process with errors in uniformly smooth Banach spaces[J]. Computers Math Applic, 1998, **36**(2): 13—21.

[10] Osilike M O. Iterative solutions of nonlinear ϕ_strongly accretive operator equations in arbitrary Banach spaces[J]. Nonlinear Anal, 1999, **36**(1): 1—9.

[11] Xu Y G. Iskikawa and Mann iterative process with errors for nonlinear strongly accretive operator equations[J]. J Math Anal Appl, 1998, **224**(1): 91—101.

[12] Chidume C E. Convergence theorems for strongly pseudo_contractive and strongly accretive maps [J]. J Math Anal Appl, 1998, **228**(2): 254—264.

[13] 周海云. Banach 空间中含强增生算子的非线性方程的迭代解[J]. 应用数学和力学, 1999, **20**(3): 269—276.

[14] Chang S S. On Chidume's open questions and approximate solutions of multivalued strongly accretive mapping equations in Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 1997, **216**(1): 94—111.

[15] Weng X L. Fixed point iteration for local strictly pseudo_contractive mapping[J]. Proc Amer Math Soc, 1991, **113**(3): 727—731.

[16] Chidume C E, Moore G. The solution by iteration of nonlinear equations in uniformly smooth Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 1997, **215**(1): 132—146.

Iterative Process to ϕ_Hemicontractive Operator and ϕ_Strongly Accretive Operator Equations

DING Xie_ping, ZHANG Hong_lin

(Department of Mathematics, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, P R China)

Abstract: Let E be an arbitrary real Banach space and K be a nonempty closed convex subsets of E. Let $T: K \to K$ be a uniformly continuous ϕ_hemicontractive operator with bounded range and $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{a_n'\}$, $\{b_n'\}$, $\{c_n'\}$ be sequences in $[0,1]$ satisfying: i) $a_n + b_n + c_n = a_n' + b_n' + c_n' = 1$, $\forall n \geqslant 0$; ii) $\lim b_n = \lim b_n' = \lim c_n' = 0$; iii) $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \infty$; iv) $c_n = o(b_n)$. For any given $x_0, u_0, v_0 \in K$, define the Ishikawa type iterative sequence $\{x_n\}$ as follows:

$$\begin{cases} x_{n+1} = a_n x_n + b_n T y_n + c_n u_n, \\ y_n = a_n' x_n + b_n' T x_n + c_n' v_n \quad (\forall n \geqslant 0), \end{cases}$$

where $\{u_n\}$ and $\{v_n\}$ are bounded sequences in K. Then $\{x_n\}$ converges strongly to the unique fixed point of T. Related result deals with the convergence of Ishikawa type iterative sequence to the solution of ϕ_strongly accretive operator equations.

Key words: ϕ_strongly accretive operator; ϕ_hemicontrictive operator; Ishikawa type iterative sequence; Banach space