

文章编号: 1000\_0887(2000) 11\_1151\_05

# 张拉结构初始几何形状确定的形函数方法<sup>\*</sup>

孙宗光, 赵俭斌

(沈阳建筑工程学院 土木系, 沈阳 110015)

(陈山林推荐)

摘要: 提出了一个确定张拉结构初始几何形状的形状函数。基于该形状函数, 通过对结构边界控制点的插值确定张拉结构的初始形状。该结构形状可随结构的双向张力比和边界控制点的坐标而进行自动调整。从而给出了几何上可行, 力学上合理的高精度张拉曲面。通过有限元方法检查, 大量例子表明该方法确定的初始形状对于实际常用边界及双向等拉或不等拉张结构均十分理想, 误差很小。

关键词: 张拉结构; 形状; 形状函数

中图分类号: O242.2 文献标识码: A

## 引 言

对于索网或膜之类的结构, 常常要在给定的边界上确定其初始几何形状。它是对结构进行分析的前提。然而, 精确的初始几何形状通常是难以获得的。

在初始张力作用下, 张拉结构的曲面形状是不能人为设计的。在给定条件下, 它必须是一个应力平衡体系。几何上, 曲面处处应具有负高斯曲率。本文根据张拉结构的特性提出了一个包含参数  $\beta_i$  的形状函数。通过边界形状和双向张力比来选择参数  $\beta_i$ , 进而控制形状函数以适应各种条件。通常情况下, 由该函数所确定的初始几何形状具有很好的精度。

## 1 形状函数

初始形状由下列参数方程定义:

$$\left. \begin{aligned} x(\xi, \eta) &= \sum N_i(\xi, \eta) x_i, \\ y(\xi, \eta) &= \sum N_i(\xi, \eta) y_i, \\ z(\xi, \eta) &= \sum N_i(\xi, \eta) z_i, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中:  $\xi, \eta$  为自然坐标,  $x_i, y_i, z_i$  为结构边界控制点的坐标,  $N_i(\xi, \eta)$  为插值函数, 此处称形状函数。具有如下性质:

$$N_i(\xi, \eta) = \begin{cases} 1 & (\text{在插值点 } i), \\ 0 & (\text{在其它插值点}). \end{cases} \quad (2)$$

\* 收稿日期: 1999\_04\_02

基金项目: 辽宁省科学技术基金资助项目(962121)

作者简介: 孙宗光(1960—), 男, 辽宁建平人, 教授;

赵俭斌(1960—), 男, 黑龙江呼兰县人, 副教授, 副系主任。

当在边界上取 8 个控制点时, 设计如下具有双曲性质的形状函数:

$$\left. \begin{aligned} N_i &= 0.25(1 + \xi\xi)(1 + \eta\eta) - \\ &0.5[\beta_i + (0.5 - \beta_i)\eta\eta](1 - \xi^2)(1 + \eta\eta) - \\ &0.5[\beta_i + (0.5 - \beta_i)\xi\xi](1 + \xi\xi)(1 - \eta^2) \quad (i = 1, 3, 5, 7), \\ N_i &= [\beta_i + (0.5 - \beta_i)\eta\eta](1 - \xi^2)(1 + \eta\eta) \quad (i = 2, 6), \\ N_i &= [\beta_i + (0.5 - \beta_i)\xi\xi](1 + \xi\xi)(1 - \eta^2) \quad (i = 4, 8), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中:  $\xi_j = -1, 0, 1, 1, 1, 0, -1, -1$ ;

$\eta_j = -1, -1, -1, 0, 1, 1, 1, 0$ ;

$\beta_j$  为参数;

1, 3, 5, 7 为角点, 2, 4, 6, 8 为中点.

形状函数  $N_i$  随  $\beta_i$  变化. 图 1 示出  $\beta_i = 0.2$  的情形 ( $i = 1, 2, \dots, 8$ ).

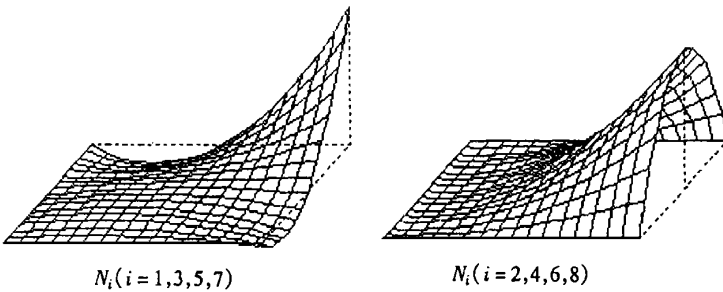


图 1 形状函数

式(3)中的  $\beta_i (i = 1, 2, 3, \dots)$  可根据初始张力及边界来选取. 不妨取初始荷载为零, 则横向平衡方程为<sup>[1]</sup>:

$$H_{10} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + H_{20} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \quad (4)$$

其中:  $H_{10}, H_{20}$  分别为单位长度上沿  $xy$  方向的初始张力.

将式(1)第三式代入, 并注意对任意边界值  $z_i$  式(4) 均应成立, 故得:

$$H_{10} \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} + H_{20} \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} = 0. \quad (5)$$

设曲面在  $x, y$  面有矩形边界  $2a \times 2b$ , 则式(5) 在  $\xi\eta$  的正方形域上为:

$$\frac{\partial^2 N_i}{\partial \xi^2} + \alpha \frac{\partial^2 N_i}{\partial \eta^2} = 0, \quad (6)$$

其中  $\alpha = \frac{dH_{20}}{dH_{10}}$ , 此值为确定  $\beta_i (i = 1, 2, 3 \dots)$  的基本依据.

采用最小二乘加权残值法求  $\beta_i$  的近似值, 令:

$$\frac{\partial}{\partial \beta_i} \iint \left( \frac{\partial^2 N_i}{\partial \xi^2} + \alpha \frac{\partial^2 N_i}{\partial \eta^2} \right) d\xi d\eta = 0, \quad (7)$$

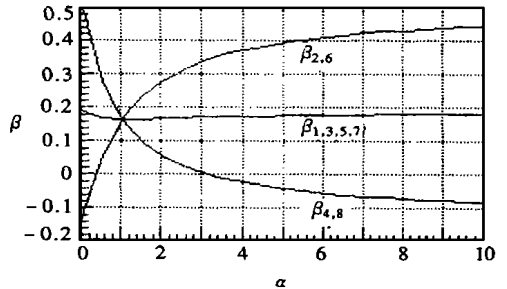


图 2  $\beta_\alpha$  曲线

将式(3)代入式(7),求得:

$$\left. \begin{aligned} \beta_{1,3,5,7} &= \frac{9\alpha^2 + 10\alpha + 9}{48\alpha^2 + 80\alpha + 48} \\ \beta_{2,6} &= \frac{12\alpha^2 + 5\alpha - 3}{24\alpha^2 + 40\alpha + 24} \\ \beta_{4,8} &= \frac{-3\alpha^2 + 5\alpha + 12}{24\alpha^2 + 40\alpha + 24} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$\beta \sim \alpha$  曲线如图2所示。由边界尺寸和双向初始张力确定一个  $\alpha$ , 代入式(8)便得到一组  $\beta$  值, 进而由式(1) 确定了一个近似的张拉曲面。

## 2 例 题

为检验由上述方法所确定的张拉结构初始几何形状的精度, 用有限元方法对由此确定的曲面进行计算, 考察曲面在初始张力作用下调整平衡后, 曲面几何形状的改变。发生的位移越小, 曲面的精度越高。计算结果列于表中。

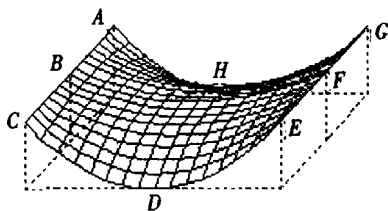


图3  $\alpha = 2$  曲面形状

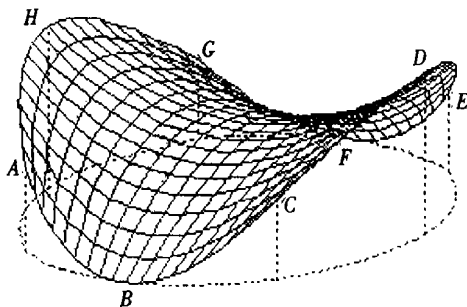


图4  $\alpha = 1.3846$  曲面形状

**例题 1** 张拉结构的边界为矩形(图3),  $a = 7.5, b = 5.0, H_{20} = 20, H_{10} = 15$ , 即  $\alpha = 2$ , 则  $\beta_{1,3,5,7} = 0.1625, \beta_{2,6} = 0.275, \beta_{4,8} = 0.05$ 。由此所确定的初始形状如图3示。数据列于表1。

表1 例题1 计算结果(1/4 曲面)

方程(1) 确定的初始形状					平衡后形状改变		
No.	X	Y	Z	高斯曲率	U	V	W
1	0.00	0.00	2.25	-0.017600	0.0000	0.0000	-0.0153
2	3.00	0.00	2.69	-0.012534	0.0008	0.0000	-0.0120
3	6.00	0.00	4.01	-0.003507	-0.0078	-0.0000	0.0100
4	0.00	1.67	2.00	-0.016160	-0.0000	-0.0010	-0.0113
5	3.00	1.67	2.48	-0.012618	-0.0005	-0.0008	-0.0091
6	6.00	1.67	3.92	-0.005450	-0.0083	0.0009	0.0104
7	0.00	3.33	1.25	-0.012976	-0.0000	0.0008	-0.0030

续表 1

方程(1)确定的初始形状					平衡后形状改变		
No.	X	Y	Z	高斯曲率	U	V	W
8	3.00	3.33	1.85	-0.012 131	-0.000 1	0.0002	-0.002 8
9	6.00	3.33	3.65	-0.008 796	-0.008 1	0.001 5	0.009 2

例题 2 边界椭圆形,长短半轴为  $a = 15$ ,  $b = 13$ ,  $H_{20} = 12$ ,  $H_{10} = 10$ , 即  $\alpha = 1.384 6$ , 则  $\beta_{1,3,5,7} = 0.159 9$ ,  $\beta_{2,6} = 0.214 8$ ,  $\beta_{4,8} = 0.105 0$ 。由此所确定的初始形状如图 4 示。曲面几何形状改变的数据列于表 2。结果表明对于非矩形边界该方法仍具有较好精度。

表 2 例题 2 计算结果(1/4 曲面)

方程(1)确定的初始形状					平衡后形状改变		
No.	X	Y	Z	高斯曲率	U	V	W
1	0.00	0.00	3.90	-0.002 503	0.000 0	0.000 0	-0.005 1
2	3.75	0.00	4.28	-0.002 264	0.000 2	-0.000 4	-0.001 1
3	7.50	0.00	5.43	-0.001 682	0.001 2	-0.001 2	-0.003 3
4	11.25	0.00	7.33	-0.001 005	-0.003 5	-0.000 5	-0.005 4
5	0.00	3.25	3.66	-0.002 423	0.001 9	-0.000 9	-0.000 7
6	3.67	3.20	4.04	-0.002 212	0.001 8	-0.001 0	-0.003 5
7	11.02	2.83	7.05	-0.001 043	-0.004 4	0.000 5	0.006 9
8	0.00	6.50	2.93	-0.002 209	0.003 0	-0.003 5	-0.009 9
9	6.88	6.13	4.38	-0.001 706	-0.000 4	-0.000 3	-0.000 7
10	0.00	9.76	1.71	-0.001 920	0.001 3	-0.002 7	-0.006 5
11	3.05	9.61	2.05	-0.001 887	0.000 3	-0.000 8	-0.002 5
12	9.14	8.48	4.79	-0.001 518	-0.006 3	0.002 7	0.010 5

### 3 结 论

本文提出的确定张拉结构的初始几何形状的方法简明、有效。实例表明,该方法适用于大多数边界。所确定的初始几何形状与满足平衡条件的最终形状之间相差很小。大量例子均给出相同结论。

#### [参 考 文 献]

- [1] 金问鲁. 悬挂结构计算理论[M]. 杭州: 浙江科学技术出版社, 1981.
- [2] 郭璐, 蓝天. 张拉结构初始几何曲面的确定[A]. 全国第六届空间结构会议论文集[C]. 北京: 地震出版社, 1992, 586—593.
- [3] 孙宗光, 王正浩. 正交索网非线性单元的普遍形式[J]. 沈阳建筑工程学院学报, 1998, 14(4): 316—320.

# A Form Function Method for Form Finding of Tension Structure

SUN Zong\_guang, ZHAO Jian\_bin

(Department of Civil Engineering, Shenyang Architecture and Civil  
Engineering Institute, Shenyang 110015, P R China)

**Abstract:** A new form function involving parameters  $\beta_i$  is presented. On the basis of the form function, an initial form of tension structure was found by interpolating through the control points on boundary of the structure. The form function can be controlled by changing  $\beta_i$  according to the pre\_tension and the boundary of the structure.

The final form of a tension structure should be an equilibrium system under the pre\_tension. To axamine the nature of the initial form, the FEM was used. Many examples show that the initial form gives a very ideal result for equal or unequal pre\_tension in two directions of the structure. In general cases, there is little difference between the initial form and the final one.

**Key words:** tension structure; form finding; form function