

文章编号: 1000-0887(2000) 11-1179-06

带裂纹方形截面杆扭转问题的自然边界元与有限元耦合法*

赵慧明, 董正筑, 曹瓔珞

(中国矿业大学 数力系, 徐州 221008)

(皓江推荐)

摘要: 根据基于区域分解的自然边界元与有限元的耦合法, 研究了带裂纹的方形截面杆的扭转问题, 编制了耦合法计算程序, 计算了几种尺寸截面的抗扭刚度、截面各点的应力及裂纹的应力强度因子, 并绘出了裂纹尖端的应力分布图。计算中, 还探索了松弛因子对迭代收敛速度的影响。

从实践上证实了自然边界元与有限元的耦合法所具有的优点。

关键词: 自然边界元; 有限元; 耦合; 扭转

中图分类号: O242; O343 文献标识码: A

引 言

近二、三十年来, 有限元方法、边界元方法在科学和工程计算等众多领域获得了广泛的应用, 同时, 它们各自的局限性也逐步地暴露出来。但是, 有限元和边界元的优缺点正好有互补的特点。如果将这两种方法结合起来使用, 将具有极大的优越性。尤其是余德浩等人发展起来的自然边界元方法^[1]具有方程推导直观, 形式唯一, 计算量小, 且经边界归化能量泛函值保持不变等优点, 使得它与有限元的耦合更有着许多独特的优点。

自然边界元与有限元的耦合法^{[1][2][3]}吸取了有限元法能适应较任意区域的优点, 克服了自然边界归化对区域的限制, 大大拓宽了其应用范围。另一方面, 这一耦合也保持了自然边界归化适于处理无穷区域及某些断裂、凹角区域上的边值问题的优点, 克服了通常有限元法在处理此类问题时精度将大大降低的缺点, 从而能获得理想的计算结果。

有限元与自然边界元的耦合有几种不同的具体表现形式^[4], 一种较为常用的方法是基于有限元的耦合法, 它是将边界元部分看作有限元的一个特殊单元, 最后得到一个统一的方程。这样做的缺点在于最后形成的总刚度矩阵将失去原有的带状、稀疏的性质。另一种方法是基于区域分解的耦合法, 这种方法是把整个求解区域分成若干个子区域, 在这些子区域上分别应用有限元或边界元, 分别列方程, 并且应用迭代法来求解。这类算法将问题分解, 由大化小, 由复杂化简单, 其优越性是显而易见的。区域分解又分为有重叠的区域分解和无重叠的区域分解两种。有重叠的区域分解以 Schwarz 交替法为算法基础, 无重叠的区域分解则应用 D_N 交替

* 收稿日期: 1999_12_24; 修订日期: 2000_06_24

基金项目: 科学与工程计算国家重点实验室资助课题

作者简介: 赵慧明(1971—), 男, 汉族, 山东曲阜人, 讲师, 硕士。

法迭代求解。本文后面研究带裂纹的方形截面杆的扭转问题时,采用了 D_N 交替法。

1 带裂纹方形截面杆的扭转问题

设 Ω 是如图 1(a) 所示区域, 设 φ 为 Prandtl 扭转应力函数则可得此等截面直杆扭转的基本方程为:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \varphi &= -2G\kappa & (\Omega \text{ 内}), \\ \varphi &= 0 & (\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \text{ 上}). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

及

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (2)$$

这里 κ 为单位长度的扭转角, 由下式得出:

$$\kappa = \frac{M_t}{GJ}, \quad (3)$$

其中, M_t 为杆端扭矩, G 为抗剪模量,

$$J = 2 \iint_{\Omega} \varphi dx dy.$$

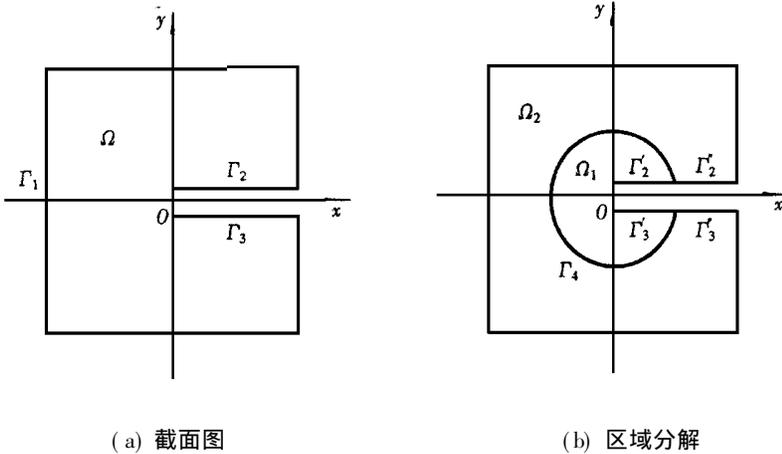


图 1

该弹性杆扭转时, 在裂纹尖端 O 点附近, 将出现应力集中。如果单独使用有限元方法, 那么, 裂纹尖端 O 点附近的应力值将难以获得理想的精度。而单独使用自然边界元方法, 则该求解区域的 Green 函数又难以求得。而应用耦合法则正好弥补了上述两个缺点。本文以单位圆周 Γ_4 为人工边界, 将区域 Ω 被分为不相重叠的子区域 Ω_1 、 Ω_2 (图 1(b)), 在 Ω_1 内应用自然边界元方法, 在 Ω_2 内应用有限元方法。这样, 有限元部分不涉及奇点问题。而且在裂纹尖端附近也可以得到精度较高的结果。

2 扇形域上的自然边界元方法

若令 $\varphi = G\kappa \left[\varphi_{\Gamma} - \frac{1}{2} r^2 \right]$, 其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, 则方程(1) 在 Ω_1 上可化为

$$\left. \begin{aligned} \Delta \varphi_1 &= 0 & (\Omega_1 \text{ 内}), \\ \varphi_1 &= \frac{1}{2} r^2 & (\Gamma_2' \cup \Gamma_3' \text{ 上}), \\ \varphi_1 &= \varphi_{10} & (\Gamma_4 \text{ 上}). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

由此易得 φ_1 的 Poisson 积分公式:

$$\varphi_1(p) = - \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n} G(p, p') \varphi_{10}(p') ds' \quad (p \in \Omega_1). \quad (5)$$

其中 $p = (x, y), p' = (x', y'), dp' = dx' dy'$. 对上式取法向导数并令 p 由 Ω_1 内部趋向边界 Γ_4 , 得到自然积分方程的表达式:

$$\frac{\partial \varphi_1(p)}{\partial n} = - \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial^2}{\partial n \partial n'} G(p, p') \right]^{(-0)} \varphi_{10}(p') ds' \quad (p \in \Gamma_4). \quad (6)$$

其中积分核的上标 (-0) 表示 p 由 Ω_1 内部趋向边界 Γ_4 时取极限.

已知保角映射

$$\omega = \left(\frac{z^{\pi/\alpha} + R^{\pi/\alpha}}{z^{\pi/\alpha} - R^{\pi/\alpha}} \right)^2$$

映半径为 R 、张角为 α 的扇形域到上半平面. 利用上半平面的 Green 函数和保角映射下 Green 函数间关系, 我们得到扇形域的如下结果:

$$G(z, z') = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|z^{\pi/\alpha} - z'^{\pi/\alpha}| |R^{2\pi/\alpha} - (zz')^{\pi/\alpha}|}{|z^{\pi/\alpha} - z'^{\pi/\alpha}| |R^{2\pi/\alpha} - (zz')^{\pi/\alpha}|} \quad (z, z' \in \Omega_1), \quad (7)$$

$$\frac{\partial G}{\partial n'} = \frac{|z'|^{\frac{\pi}{\alpha}-1} |R^{2\pi/\alpha} - z'^{2\pi/\alpha}| (R^{2\pi/\alpha} - |z|^{\pi/\alpha})}{\alpha |R^{2\pi/\alpha} - (zz')^{\pi/\alpha}| (z^{\pi/\alpha} - z')^{\pi/\alpha}|^2} \text{Im} z^{\pi/\alpha} \quad (z \in \Omega_1, z' \in \Gamma) \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial n \partial n'} G(p, p') = - \frac{\pi |z' z|^{\frac{\pi}{\alpha}-1} |R^{2\pi/\alpha} - z'^{2\pi/\alpha}| |R^{2\pi/\alpha} - z^{2\pi/\alpha}|}{\alpha^2 |R^{2\pi/\alpha} - (zz')^{\pi/\alpha}| (z^{\pi/\alpha} - z')^{\pi/\alpha}|^2} \quad (z, z' \in \Gamma), \quad (9)$$

其中, $\Gamma = \Gamma_2' \cup \Gamma_3' \cup \Gamma_4'$. 将式(8)、(9) 分别代入式(5)、(6), 可得此扇形域上扭转应力函数的 Poisson 积分公式及自然积分方程的表达式.

求得 φ 后, 就可以由式(3) 求得抗扭刚度和单位扭转角.

再对 φ 求关于 x, y 的偏导数, 得到 $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}$, 代入(2) 式, 即可直接计算出应力 τ_{xx} 和 τ_{yy} . 由裂纹尖端的应力又可求出该裂纹的应力强度因子 K_{III} .

本文应用 D_N 交替法对原问题进行迭代求解时, 只要求为 Ω_2 上的有限元提供人工边界上的法向导数值. 因此, 实际上不用解自然积分方程, 而只要应用自然积分公式求出法向导数. 自然积分公式中包含了强奇异积分, 可应用积分核级数展开法或奇异部分分离法来计算^{[1][4][5]}.

3 算法设计

根据 D_N 交替法的思想, 首先在人工边界上给定一个初值, 然后在 Ω_1 上用自然边界元方法算出人工边界上的外法向导数值, 由该外法向值在 Ω_2 上应用有限元方法又可求得人工边界上解的新近似值. 反复迭代, 便可得到要求精度的结果. 具体计算步骤如下:

第一步, 选 Γ_4 的初始值 λ^0

第二步, 应用自然边界元方法解如下方程

$$\left. \begin{aligned} \Delta \varphi^{2i+1} &= -2Gk \quad (\Omega_1 \text{ 内}), \\ \varphi^{2i+1} &= \lambda^i \quad (\Gamma_4 \text{ 上}), \\ \varphi^{2i+1} &= 0 \quad (\Gamma'_2 \cup \Gamma'_3 \text{ 上}), \end{aligned} \right\}$$

得边界 Γ_4 上的法向导数值

第三步, 在 Ω_2 上应用有限元方法解如下混合边界问题

$$\left. \begin{aligned} \Delta \varphi^{2(i+1)} &= -2Gk \quad (\Omega_2 \text{ 内}) \\ \frac{\partial \varphi^{2(i+1)}}{\partial n_2} &= -\frac{\partial \varphi^{2i+1}}{\partial n_1} \quad (\Gamma_4 \text{ 上}) \\ \varphi^{2(i+1)} &= 0 \quad (\Gamma_1 \cup \Gamma''_2 \cup \Gamma''_3 \text{ 上}) \end{aligned} \right\}$$

求得 Γ_4 上的函数值。

第四步, 适当选取权系数 ω , 计算 $\lambda^{i+1} = \omega \varphi^{2i+1} + (1-\omega) \varphi^{2(i+1)}$, 如果 Γ_4 上的函数值 λ^{i+1} 达到要求的精度, 则转为第五步, 否则转第二步

第五步, 求应力。

4 计算结果与数据分析

表 1 给出了几种截面尺寸情况下杆件的抗扭刚度(设 $Gk = 1$), 并与同截面尺寸的无裂纹的实心方形截面杆的抗扭刚度进行了比较。

表 1 带裂纹的方形截面直与实心方形截面杆的抗扭刚度比较

截面尺寸	杆型 刚度	带裂纹的方形截面杆	实心的方形截面杆
3×3		5.496	11.421
4×4		18.242	36.096
5×5		46.986	78.125

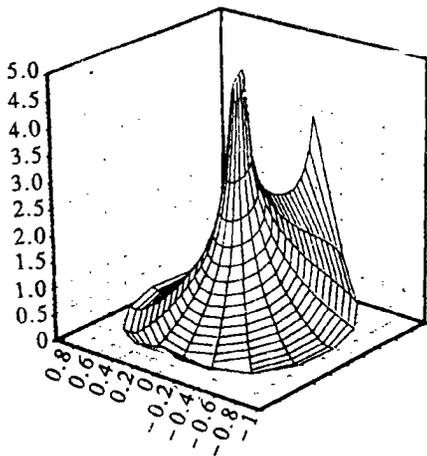
如图 2 所示, 在裂纹尖端附近产生很强的应力集中, 在距离裂纹尖端稍远的地方, 应力值急剧下降, 应力在达到一个极小值后, 又趋于增大。

应用本文方法求得裂纹尖端的应力后, 又可求出裂纹的应力强度因子。当 $Gk = 1$ 时, 对 4×4 截面的杆件, 裂纹长度为 2, 应力强度因子为 1.462; 对 5×5 截面的杆件, 裂纹长度为 2.5, 应力强度因子为 2.154。这些结果均与文献[10]的结果相符。

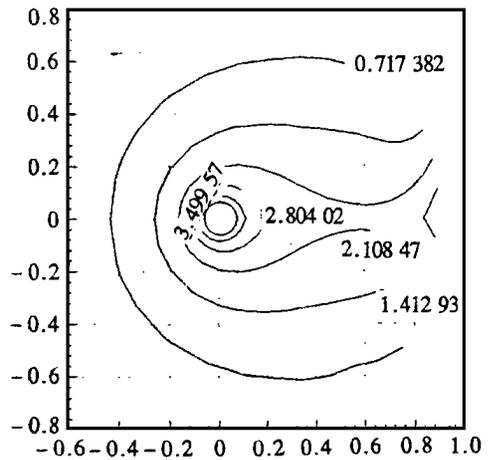
4 结束语

1) 自然边界元方法对于一些带裂缝的典型区域有着独特的优越性, 它可以通过 Green 函数和复变函数论中的保形映射求得解的解析表达式。有限元方法则由于其网格剖分比较自由而适合于不规则区域的问题。应用自然边界元与有限元的耦合法则充分利用了它们各自的优点, 取长补短, 使得在带有裂缝的不规则区域中, 仍可以较好的求得原问题的解。

2) 自然边界元与有限元的耦合法简单直接。在自然边界元部分, 并不需要求解自然边界积分方程, 而只要按照式(6)求出弧边界的法向导数, 即可提供 Ω_2 域中的混合边值问题所需的



(a) 应力



(b) 应力等值线

图2 Ω_1 内的应力及其等值线

自然边界条件。在 Ω_2 中应用有限元求解混合边值问题也很简单。

3) 松弛因子的选取对迭代收敛速度的影响很大。在此有界区域的情况下, 松弛因子减小, 收敛速度加快。当松弛因子取 0.2 时, 迭代收敛速度最快。这与在无界区域的情况下松弛因子取 0.5 时收敛速度最快有所不同。

4) 标准有限元难以计算应力集中附近的应力, 而只能给以近似的描述, 应用本耦合法则可以得到理想的结果, 在应力集中附近也可得到光滑的应力值。

5) 本文所述耦合法在适用范围上有一定的普遍性。它不仅求解带裂纹方形截面杆的扭转问题, 还可以求解一般多角形截面(带裂纹)杆扭转问题, 或更一般截面杆的扭转问题。根据区域分解法原理, 该耦合法还可用于多裂纹杆的扭转问题。

致谢 在完成论文的过程中, 余德浩教授给予了许多帮助, 深表感谢!

[参 考 文 献]

- [1] 余德浩. 自然边界元方法的数学理论[M]. 北京: 科学出版社, 1993.
- [2] 余德浩. 无界区域非重叠区域分解算法的离散化及其收敛性[J]. 计算数学, 1996, 18(3): 328—336.
- [3] 余德浩. 无界区域上基于自然边界元归化的一种区域分解算法[J]. 计算数学, 1994, 16(4): 448—459.
- [4] 董正筑, 赵慧明, 曹瓔珞. 扇形截面杆扭转问题研究[J]. 中国矿业大学学报, 1997, 26(3): 105—109.
- [5] 赵慧明. 自然边界元方法及其在力学中的应用[D]. 硕士论文. 徐州: 中国矿业大学, 1997.
- [6] 汤任基. 裂纹柱的扭转理论[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 1996.
- [7] 徐芝纶. 弹性力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1994.
- [8] 吕涛, 石济民, 林振宝. 区域分解算法[M]. 北京: 科学出版社, 1992.
- [9] 卓家寿. 弹性力学中的有限元法[M]. 北京: 高等教育出版社, 1984.
- [10] 崔振源, 陈宜周. 用边界配置法计算扭转杆的抗扭刚度和第三型应力强度因子[J]. 固体力学学

报, 1981, 2(4): 503—511.

The Coupling Method for Torsion Problem of the Square Cross Section Bar With Cracks

ZHAO Hui_ming, DONG Zheng_zhu, CAO Ying_luo

(Department of Mathematics and Mechanics, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221008, P R China)

Abstract: By coupling natural boundary element method (NBEM) with FEM based on domain decomposition, the torsion problem of the square cross sections bar with cracks have been studied, the stresses of the nodes of the cross sections and the stress intensity factors have been calculated, and some distribution pictures of the stresses have been drawn. During computing, the effect of the relaxed factors to the convergence speed of the iterative method has been discussed. The results of the computation have confirmed the advantages of the NBEM and its coupling with the FEM.

Key words: natural boundary element method (NBEM); finite element method (FEM); couple; torsion