应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

文章编号: 1000_0887(2000) 11_1191_10

不变流形方法与非线性控制系统的能控制性*

杨 柳

(四川大学(西区) 化机系, 成都 610065)

(叶庆凯推荐)

摘要: 在 Kovalev 方法基础上运用不变流形研究非线性系统的能控制性问题, 得出了一类仿射非线性系统能控的必要条件, 讨论了必要条件的实现问题, 研究了带有两个陀螺的刚体运动, 证明了它满足能控性的必要条件•

关 键 词: 非线性控制系统; 能控性; 有向流形; 不变流形; 基系统; 刚体动力学系统

中图分类号: O23 文献标识码: A

1 引言及预备知识

近年来, 由于采用微分几何方法, 使得非线性系统控制理论获得了巨大的发展[1~8]• 乌克兰科学院 A.M.Kovalev 首次把刚体动力学中发展起来的有向流形方法运用于非线性控制系统, 得到了一系列深刻的结果, 并在不变中心引力场中的刚体运动控制中得到了应用[9] 由于寻找控制系统的有向流形是相当复杂的工作, 类似于稳定性理论中李雅普诺夫函数的构造问题• 本文在 Kovalev 方法的基础上用不变流形[9] 研究非线性控制系统的能控性, 使问题得到简化, 并且不变流形的构造较为容易, 将有利于在刚体动力学控制中的应用• 下面给出有关预备知识[9]:

给定非线性控制系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}), \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x} \in D$ 为状态向量, D 为R^n 中的区域; 允许控制 $\boldsymbol{u}$ 为有界可测函数, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(t) \in U \subseteq R^m$, $t \in T \subset [0, +\infty)$, 并假定对所有允许控制, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ 在 $D \times U$ 上连续可微, 且对任一允许控制, 系统(1) 满足解的存在唯一条件•

定义 1.1 如果对任意两点 $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1 \in D$, 存在允许控制 $\boldsymbol{u}(t)$, 使得系统(1) 相应的解 $\boldsymbol{x}(t)$ 对某个 $t_1 \geqslant t_0$ 满足: $\boldsymbol{x}(t) \in D,\ \forall t \in [t_0, t_1]$, 且

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \quad \boldsymbol{x}(t_1) = \boldsymbol{x}_1,$$

则称控制系统(1) 在区域 $D \subset R^n$ 中能控•

定义 1.2 对于点 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in D \subseteq R^n$, 若存在系统(1) 的轨线 $\boldsymbol{x}(t)$, 使得

---

* 收稿日期: 1999_01_14; 修订日期: 2000_05_20
作者简介: 杨柳(1971—), 男, 四川眉山人, 博士, 主研方向: 非线性系统的能控性、稳定性以及膜分离技术方面.

$$\boldsymbol{x}(t_1) = \boldsymbol{x}_1, \quad \boldsymbol{x}(t_2) = \boldsymbol{x}_2 \qquad (0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 < \infty),$$

则称点 $\boldsymbol{x}_2$ 为由点 $\boldsymbol{x}_1$ 可达的•

定义 1.3 由点 $\boldsymbol{x} \in D$ 可达的 D 中点的集合称为点 $\boldsymbol{x}$ 的正轨道, 记作 $\mathrm{Or}^+\ \boldsymbol{x}$; D 中可达 $\boldsymbol{x}$ 的所有点集称为点 $\boldsymbol{x}$ 的负轨道, 记作 $\mathrm{Or}^-\ \boldsymbol{x}$•

定义 1.4 集合 $K \subseteq D$ 的正轨道记作 $\mathrm{Or}^+\ K = \bigcup_{\boldsymbol{x}\in K}\mathrm{Or}^+\ \boldsymbol{x}$; 集合 $K \subseteq D$ 的负轨道记作 $\mathrm{Or}^-\ K = \bigcup_{\boldsymbol{x}\in K}\mathrm{Or}^-\ \boldsymbol{x}$•

定义 1.5 若流形 $M \subseteq D$ 具有下列性质之一:

1) $M = \mathrm{Or}^+\ M$;

2) $M = \mathrm{Or}^-\ M$;

则称 M 为系统(1) 的有向流形, 亦称定向流形 (Oriented Manifold)•

我们引用文献[9] 中的结论:

定理 1.1 任意点 $\boldsymbol{x} \in D$ 的正轨道 $\mathrm{Or}^+\ \boldsymbol{x}$ 包含系统(1) 的有向流形•

定理 1.2 系统(1) 能控的充分必要条件是 $\forall \boldsymbol{x} \in D$, 有 $\mathrm{Or}^+\ \boldsymbol{x} = D$•

定理 1.3 系统(1) 能控的充分必要条件是没有系统(1) 的非平凡有向流形 N, 即 $N \subset D$ 但 $N \neq \varnothing$, $N \neq D$•

2 能控性的必要条件

A. M. Kovale 在[9] 中给出了控制系统(1) 能控的必要条件, 然而, 由于寻找控制系统的定向流形工作十分复杂, 应用上较难• 下面, 我们讨论一类力学中大量存在的特殊的仿射非线性系统, 首先在文献[10] 的基础上提出下列的定义和定理•

定义 2.1 假设函数 $\varphi(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in D$, 连续可微, 若流形 $M = \{\boldsymbol{x} \in D,\ \varphi(\boldsymbol{x}) = 0\}$ 满足下列条件:

1) $\dim M = s < n$;

2) 对于任一允许控制 $\boldsymbol{u}(t)$ 及系统(1) 相应的轨道 $\boldsymbol{x}(t)$, 若存在 $t^* \in T$, 使得 $\varphi(\boldsymbol{x}(t^*)) = 0$, 则对任意 $t \in T$, 有 $\varphi(\boldsymbol{x}(t)) = 0$;

则称流形 M 为系统(1) 的不变流形 (invariant manifold)•

显然, 对于不变流形 M, 成立 $\mathrm{Or}^+\ M = \mathrm{Or}^-\ M = M$, 即不变流形是有向流形的特殊情形, 从而由定理 1.3 有:

定理 2.1 若系统(1) 能控, 则区域 D 中不存在系统(1) 的非平凡不变流形•

为了研究不变流形 M 的存在问题, 应当从分析系统(1) 在任一 $\boldsymbol{x} \in D$ 的速度向量场 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ 开始• 因为对任意 $\boldsymbol{p} \in M$, 向量 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{u})$ (对任意的 $\boldsymbol{u} \in U$) 都属于不变流形 M 在 $\boldsymbol{p}$ 点的切空间, 记为 $T_{\boldsymbol{p}}(M)$• 设 $\dim M = s$, 则 $\forall \boldsymbol{x} \in M$, 有[2]

$$\dim T_{\boldsymbol{x}}(M) = s,$$

从而由不变流形定义的条件 1) 可知, 要使不变流形存在, 必须成立 $\dim T_{\boldsymbol{x}}(M) = s < n$, $\forall \boldsymbol{x} \in M$• 下面, 我们给出向量场 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ 位于 s 维子空间的条件[11]•

引理 2.1 $\forall \boldsymbol{x} \in D$, 曲面 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ ($\boldsymbol{u} \in U \subseteq R^m$) 位于 s 维子空间 $R^s \subset R^n$ 中的充要条件为

$$\operatorname{rank} \Phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \leqslant s \qquad (\forall(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \in D \times U)\bullet$$

其中,

$$\Phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \left[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, 0), \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}_1}, \cdots, \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}_m}, \frac{\partial^2 \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}_1 \partial \boldsymbol{u}_2}, \cdots, \frac{\partial^n \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}_{m-1} \partial \boldsymbol{u}_m^{n-1}}, \frac{\partial^n \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}_m^n}\right]\bullet \tag{2}$$

定义 2.2 我们称式(2)中的 $\Phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ 为系统(1)在 D 上的矩阵特征函数•

这样,我们有如下定理:

定理 2.2 若系统(1)在 $Q \subset D$ 上的矩阵特征函数 $\Phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ 满足:

$$\operatorname{rank} \Phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = n \qquad (\forall \boldsymbol{u} \subset U),$$

则 Q 中不存在系统(1)的不变流形•

证明: 用反证法,若 Q 中存在系统(1)的不变流形 $M \subseteq Q$• 由定义 2.1 有 $\dim M = s < n$, 则 $\forall \boldsymbol{x} \in M$ 有 $\dim T_{\boldsymbol{x}}(M) = s$, 从而 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ 位于 s 维子空间 $R^s \subset R^n$ 中, 由引理 2.1 有 $\operatorname{rank} \Phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \leqslant s < n$, 与题设矛盾• 从而说明 Q 中不存在系统(1)的不变流形•

推论 2.1 若 D 中存在系统(1)的不变流形 M, 则必成立

$$\operatorname{rank} \Phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \leqslant s < n \quad (\boldsymbol{x} \in M \subset D)\bullet$$

为了讨论 D 中存在系统(1)的不变流形的条件, 我们在下列定理中认为流形 $M = \left\{\boldsymbol{x} \in D; \varphi(\boldsymbol{x}) = 0\right\}$, $\varphi(\boldsymbol{x})$ 在 D 上连续可微, 且 $\dim M = s < n$•

定理 2.3 若 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 满足下面的偏微分方程

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{x}_i} = \lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \varphi, \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_n)^{\mathrm{T}}$, $\lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ 在 $D \times U$ 上连续, 则 $M \subset D$ 是系统(1)的不变流形•

证明: 将函数 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 沿轨线 $\boldsymbol{x}(t)$ 对 t 求导, 有

$$\frac{\mathrm{d} \varphi}{\mathrm{d} t} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{x}_i},$$

再由(3)可得 $\dfrac{\mathrm{d} \varphi}{\mathrm{d} t} = \lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \varphi$, 从而 $\varphi(\boldsymbol{x}(t))$ 有下列形式

$$\varphi(\boldsymbol{x}(t)) = C \exp\left(\int \lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \mathrm{d} t\right),$$

若存在 $t^* \in T$, 使 $\varphi(\boldsymbol{x}(t^*)) = 0$, 则可得 $C = 0$, 从而对 $\forall t \in T$, 有

$$\varphi(\boldsymbol{x}(t)) = 0\bullet$$

由定义 2.1, $M = \left\{\boldsymbol{x} \in D; \varphi(\boldsymbol{x}) = 0\right\}$ 是系统(1)的不变流形•

定理 2.4 给定系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = X(\boldsymbol{x}), \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{x} \in D \subset R^n$ 为状态向量• 若流形 M 是系统(4)的不变流形, 则存在 D 上的连续函数 $\lambda(\boldsymbol{x})$, 使 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 满足偏微分方程

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{x}_i} = \lambda \varphi\bullet \tag{5}$$

证明 参看文献[12]•

下面我们研究一类特殊的非线性系统的能控性问题•

考察系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}), \tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=\sum_{i=1}^{s}\alpha_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x})$, $\alpha_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$ 在 $D\times U$ 上连续, $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{u}$ 的假设见(1) 式•

我们称系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x})\qquad(i=1,2,\cdots,s),\tag{7}$$

为系统(6) 的基系统, 并有下面的定理:

定理 2.5 若流形 $M=\left\{\boldsymbol{x}\in D;\ \varphi(\boldsymbol{x})=0\right\}$ 为基系统(7) 中 s 个系统的公共不变流形, 则它必是系统(6) 的不变流形•

证明 因为 M 是 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x})(i=1,2,\cdots,s)$, 的公共不变流形,

所以由定理 2.4, 存在 D 上的连续函数 $\lambda_i(\boldsymbol{x})$, 使 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 满足下列偏微分方程组

$$\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{f}_{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{x}_j}=\lambda_i\varphi\qquad(i=1,2,\cdots,s),\tag{8}$$

其中, $\boldsymbol{f}_{ij}$ 为函数 $\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x})$ 的和 j 个分量, $(j=1,2,\cdots,n)$•

由于 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=\sum_{i=1}^{s}\alpha_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x})$, 将(8) 的 s 个方程两边分别乘以 $\alpha_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$, $i=1,2,\cdots,s$, 再把这所得的 s 个方程两边分别相加, 得

$$\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{f}_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{x}_j}=\lambda(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\varphi,\tag{9}$$

其中 $\lambda(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=\sum_{i=1}^{s}\alpha_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\lambda_i(\boldsymbol{x})$ 为 $D\times U$ 上的连续函数, 则由定理 2.3, $M\subset D$ 为系统(6) 的不变流形• 证毕•

这样, 我们有系统(6) 能控的必要条件•

定理 2.6(能控性必要条件) 存在某集 $K\subset D$ 使系统(6) 满足

$$\operatorname{rank}\Phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\leqslant s<n,\ \forall(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\in K\times U•\tag{10}$$

若该系统在 D 中可控, 则偏微分方程组(8) 不存在满足如下条件的解 $\varphi(\boldsymbol{x})$: 它使流形 $M=\left\{\boldsymbol{x}\in D;\ \varphi(\boldsymbol{x})=0\right\}$ 为 D 的非平凡子集•

证明 按照推论 2.1, 秩条件(10) 是 D 中不变流形存在的必要条件•

用反证法• 若满足定理条件的解 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 存在, 按定理 2.3, $M=\left\{\boldsymbol{x}\in D;\ \varphi(\boldsymbol{x})=0\right\}$ (按假设, 不妨认为在 M 上有 $\operatorname{rank}\Phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\leqslant s<n$) 为基系统(7) 的公共不变流形, 再由定理 2.5, M 是系统(6) 的不变流形• 最后, 由定理 2.1, 可推出与系统(6) 能控的假设相矛盾•

下面, 我们考虑一种仿射非线性系统的能控性问题• 设

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}),\tag{11}$$

其中

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x})+\cdots+\boldsymbol{f}_{n-m}(\boldsymbol{x})+u_1\boldsymbol{f}_{n-m+1}(\boldsymbol{x})+\cdots+\boldsymbol{u}_m\boldsymbol{f}_n(\boldsymbol{x}),$$ 且设 $m+1<n$,

为此, 先给出如下引理:

引理 2.2 假设函数 $\boldsymbol{f}_{ij}(\boldsymbol{x})$, $\lambda_i(\boldsymbol{x})$, $i,j=1,2,\cdots,n$, 在 D 上连续可微, 方程组

$$\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{f}_{ij}(\boldsymbol{x})\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{x}_j}=\lambda_i(\boldsymbol{x})\varphi\qquad(i=1,2,\cdots,n)•\tag{12}$$

相容且 $\det\|\boldsymbol{f}_{ij}(\boldsymbol{x})\|\neq0$, 则它的解有形式

$$\varphi=C\exp\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}),\tag{13}$$

其中 $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x})$ 是变量 $\boldsymbol{x}$ 的函数, C 为常数, $\det\|\boldsymbol{f}_{ij}(\boldsymbol{x})\|$ 表示方阵 $[\boldsymbol{f}_{ij}(\boldsymbol{x})]_{n\times n}$ 的行列式•

证明　由于(12)相容且 $\det\|f_{ij}(x)\|\neq 0$, 关于 $\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}$ 解方程组(12), 得相容方程组

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}=\mu_i(x)\varphi\qquad(i=1,2,\cdots,n)\cdot\tag{14}$$

方程组(14)相容意味着

$$\frac{\partial\mu_i}{\partial x_j}=\frac{\partial\mu_j}{\partial x_i}(i,j=1,\cdots,n),$$

于是有

$$\mu_i=\frac{\partial U}{\partial x_i},\tag{15}$$

其中 U 为变量 x 的函数, 代(15)入(14)再积分可得(13)的形式· 证毕·

定理 2.7　设系统(11)在 D 上满足 $\Delta_n(x)\triangleq\det\|f_{ij}(x)\|$ 不恒为0, 若它在 D 上能控, 则下列条件之一成立:

1) $\Delta_n(x)\neq 0,\ \forall x\in D$;

2) 当 $\Delta_n(x)=0$ 在 D 中的一个非平凡子集上成立时, 集合 $M=\{x\in D;\ \Delta_n(x)=0\}$ 不包含基系统

$$\dot{x}=f_i(x)\qquad(i=1,2,\cdots,n)\tag{16}$$

的公共不变流形·

证明　先计算(11)的矩阵特征函数, 由(2)式有

$$\Phi(x,u)=[f_1(x)+\cdots+f_{n-m}(x),f_{n-m+1}(x),\cdots,f_n(x)]\cdot$$

由系统(11)的假设知

$$\operatorname{rank}\Phi(x,u)\leqslant m+1<n(\forall(x,u)\in D\times U)\cdot$$

现考虑定理 2.6 的条件, 当 $\Delta_n(x)\neq 0,\ \forall x\in D$ 成立时, 由引理 2.2, 方程组(8)(或(12))的解 $\varphi(x)$ 或者恒为0, 或者恒不为0, 则 M 不可能成为 D 中系统(11)的非平凡不变流形·

当 $\Delta_n(x)=0$ 在 D 中非平凡子集上成立时, 则由定理 2.5, 因为基系统(16)的公共不变流形就是系统(11)的不变流形, 为保证系统(11)能控, 必然要求本定理中条件 2) 成立·

证毕·

评注　1° 仿射非线性系统(11)有其实际的物理背景, 因而研究它有现实意义· 由于非线性系统的复杂性, 我们仅考察了它能控的必要条件; 尽管条件不是充分的, 但它消除了实际系统设计中破坏系统能控性的一些因素, 因此仍然是有意义的·

2° 在函数 $f(x,u)$ 可分解的情况下, 即 $f(x,u)=\sum_{i=1}^{s}\alpha_i(x,u)f_i(x)$, 摆脱了控制变量 u 的任意性来研究能控性的必要条件, 从而使得这些条件易于验证·

3　能控性必要条件的实现

为了寻找定理 2.7 中流形 M 是否包含基系统(16)的不变流形, 可采用如下方法:

设函数 $f(x)$ 足够多次连续可微, 作流形

$$M=\{x\in D;f(x)=0\}\cdot$$

对于系统

$$\dot{x}=X(x),\tag{17}$$

作序列

$$\boldsymbol{f}^{(i)}(\boldsymbol{x}) \quad (i = 0, 1, 2, \cdots),$$

其中

$$\boldsymbol{f}^{(i)}(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} X_j(\boldsymbol{x}) \frac{\partial \boldsymbol{f}^{(i-1)}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}_j}, (\boldsymbol{f}^{(0)}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))\cdot$$

定理 3.1 若集合

$$N: \boldsymbol{f}^{(i)}(\boldsymbol{x}) = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \cdots),$$

非空，则在 M 中关于(17) 的不变流形由 N 定义[10]•

4 带有两个陀螺的刚体运动的能控性

4.1 运动方程

我们来研究受陀螺控制的刚体关于质心的运动• 设有一运动刚体 B，有两陀螺由其轴固定在刚体 B 上作无摩擦旋转[12](图 1)• 其运动可由如下方程来描述：

$$\left.\begin{aligned}
A_1\dot{w}_1 &= (A_2 - A_3)w_2w_3 + \xi_1(\alpha_2w_3 - \alpha_3w_2) + \\
&\quad \xi_2(\beta_2w_3 - \beta_3w_2) - \alpha_1\dot{\xi}_1 - \beta_1\dot{\xi}_2, \\
A_2\dot{w}_2 &= (A_3 - A_1)w_3w_1 + \xi_1(\alpha_3w_1 - \alpha_1w_3) + \\
&\quad \xi_2(\beta_3w_1 - \beta_1w_3) - \alpha_2\dot{\xi}_1 - \beta_2\dot{\xi}_2, \\
A_3\dot{w}_3 &= (A_1 - A_2)w_1w_2 + \xi_1(\alpha_1w_2 - \alpha_2w_1) + \\
&\quad \xi_2(\beta_1w_2 - \beta_2w_1) - \alpha_3\dot{\xi}_1 - \beta_3\dot{\xi}_2,
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

其中，w_i 和 α_i，$\beta_i (i = 1, 2, 3)$ 分别是刚体角速度向量在主轴上的投影以及两陀螺角动量方向的两单位向量；ξ_1，ξ_2 是两陀螺角动量的大小，它们可视为控制参数；$A_i (i = 1, 2, 3)$ 是刚体惯量主矩；$\dot{\xi}_1$，$\dot{\xi}_2$ 是施于两陀螺的力矩•

4.2 两陀螺转轴互相垂直时刚体能控性的讨论

当刚体两陀螺转轴互相垂直时，我们可根据

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 1), (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (0, 1, 0)$$

来建立坐标系(图 2)，并在方程(18) 中令 $\dot{\xi}_1 = u_1$，$\dot{\xi}_2 = u_2$，将方程(18) 化成如下形式：

$$\left.\begin{aligned}
A_1\dot{w}_1 &= (A_2 - A_3)w_2w_3 - \xi_1w_2 + \xi_2w_3, \\
A_2\dot{w}_2 &= (A_3 - A_1)w_3w_1 + \xi_1w_1 - u_2, \\
A_3\dot{w}_3 &= (A_1 - A_2)w_1w_2 - \xi_2w_1 - u_1, \\
\dot{\xi}_1 &= u_1, \\
\dot{\xi}_2 &= u_2\cdot
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

方程(19) 可写成仿射非线性系统(11) 的形式，

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{f}_3(\boldsymbol{x}) + u_1\boldsymbol{f}_4(\boldsymbol{x}) + u_2\boldsymbol{f}_5(\boldsymbol{x}), \tag{20}$$

其中

$$\boldsymbol{x} = (w_1, w_2, w_3, \xi_1, \xi_2)^{\mathrm{T}} \in R^5, \quad u = (u_1, u_2)^{\mathrm{T}} \in R^2,$$

$$\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}) = (a_1w_2w_3, a_2w_3w_1, a_3w_1w_2, 0, 0)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x}) = (-b_1\xi_1w_2, b_2\xi_1w_1, -b_3\xi_2w_1, 0, 0)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{f}_3(\boldsymbol{x}) = (b_1\xi_2w_2, 0, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{f}_4(\boldsymbol{x}) = (0, 0, -b_3, 1, 0)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{f}_5(\boldsymbol{x}) = (0, -b_2, 0, 0, 1)^{\mathrm{T}},$$

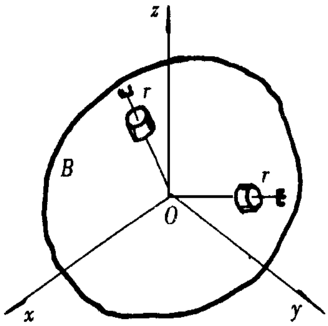

图 1 两陀螺转轴成任意角

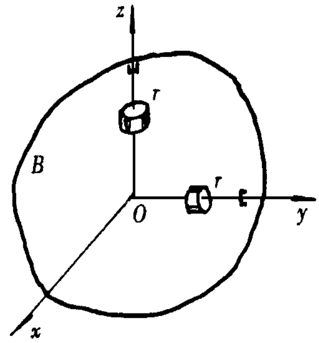

图 2 两陀螺转轴互相垂直

$$a_1 = (A_2 - A_3)/A_1,$$

$$a_2 = (A_3 - A_1)/A_2,$$

$$a_3 = (A_1 - A_2)/A_3,$$

$$b_1 = 1/A_1, \quad b_2 = 1/A_2, \quad b_3 = 1/A_3,$$

根据定理 2. 7, 我们计算 $\Delta_5 = \det \| \boldsymbol{f}_{ij} \| \,(i, j = 1, 2, \cdots, 5)$,

$$\Delta_5 = - b_1 w_2^2 w_3 \xi_2 (a_2 b_3 w_3 \xi_2 + a_3 b_2 w_2 \xi_1). \tag{21}$$

若 $\delta_5 \neq 0$, 则据定理 2. 7, 系统(20) 满足能控的必要条件;

若 $\Delta_5 = 0$, 则检验 $\Delta_5 = 0$ 定义的集合包含关于基系统(由 5 个子系统构成)

$$\dot w_1 = a_1 w_2 w_3, \quad \dot w_2 = a_2 w_3 w_1, \quad \dot w_3 = a_3 w_1 w_2,$$

$$\dot\xi_1 = 0, \quad \dot\xi_2 = 0, \tag{22}$$

$$\dot w_1 = - b_1 \xi_1 w_2, \quad \dot w_2 = b_2 \xi_1 w_1, \quad \dot w_3 = - b_3 \xi_2 w_1,$$

$$\dot\xi_1 = 0, \quad \dot\xi_2 = 0, \tag{23}$$

$$\dot w_1 = b_1 \xi_2 w_3, \quad \dot w_2 = \dot w_3 = \dot\xi_1 = \dot\xi_2 = 0, \tag{24}$$

$$\dot w_3 = - b_3, \quad \dot\xi_1 = 1, \quad \dot w_1 = \dot w_2 = \dot\xi_2 = 0, \tag{25}$$

$$\dot w_2 = - b_2, \quad \dot\xi_2 = 1, \quad \dot w_1 = \dot w_3 = \dot\xi_1 = 0, \tag{26}$$

的公共不变流形的条件.

我们根据定理 3. 1 进行检验. 为了研究方便, 首先从子系统(26) 入手, 按(26) 计算 Δ_5 的各阶导数(实际上也可以从其它子系统入手).

$$\dot\Delta_{5(26)} = \left(\frac{\partial \Delta_5}{\partial w_2} \dot w_2 + \frac{\partial \Delta_5}{\partial \xi_2} \dot\xi_2 \right) \bigg|_{(26)} =$$

$$- b_1 w_1^2 w_3 (- a_3 b_2^2 \xi_1 \xi_2 + 2 a_2 b_3 w_3 \xi_2 + a_3 b_2 w_2 \xi_1),$$

其中“$(\ )|_{(26)}$”表示在括号中的导数项 $\dot w_2$, $\dot\xi_2$ 分别用(26) 中的 $\dot w_2 = - b_2$ 和 $\dot\xi_2 = 1$ 来代换, 以下类同.

$$\ddot\Delta_{5(26)} = \left(\frac{\partial \dot\Delta_5}{\partial w_2} \dot w_2 + \frac{\partial \dot\Delta_5}{\partial \xi_2} \dot\xi_2 \right) \bigg|_{(26)} =$$

$$- 2 b_1 w_1^2 w_3 (a_2 b_3 w_3 - a_3 b_2^2 \xi_1),$$

$$\Delta_{5(26)}^{(3)} = \Delta_{5(26)}^{(4)} = 0.$$

令

$$\left.\begin{aligned} \Delta_5 &= 0, \\ \dot{\Delta}_{5(26)} &= 0, \\ \ddot{\Delta}_{5(26)} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

则系统(27)有下列3个本质上不同的解:

$$w_1 = 0, \tag{28}$$

$$w_3 = 0, \tag{29}$$

$$\begin{cases} a_2 b_3 w_3 - a_3 b_2^2 \xi_1 = 0, & (30\text{a}) \\ -a_3 b_2^2 \xi_1 \xi_2 + 2a_2 b_3 w_3 \xi_2 + a_2 b_2 w_2 \xi_1 = 0, & (30\text{b}) \\ a_2 b_3 w_3 \xi_2 + a_3 b_2 w_2 \xi_1 = 0. & (30\text{c}) \end{cases}$$

1° 对于由(28)定义的流形 $M_1 = \{(\boldsymbol{w}, \xi); w_1 = 0\}$, 要使 M_1 包含子系统(23)的不变流形的条件为 $\xi_1 = 0$ 或 $w_2 = 0$. 但流形 $M_1' = \{(\boldsymbol{w}, \xi); \xi_1 = 0\}$ 不包含系统(25)的不变流形(因为在(25)中 $\dot{\xi}_1 = 1$), 流形 $M_1'' = \{(\boldsymbol{w}, \xi); w_2 = 0\}$ 不包含系统(26)的不变流形(在(26)中 $\dot{w}_2 = -b_2$), 从而 M_1 中不可能含基系统(22)~(26)的公共不变流形.

2° 对于由(29)定义的流形 $M_2 = \{(\boldsymbol{w}, \xi); w_3 = 0\}$, 它不包含子系统(25)的不变流形(在(25)中 $\dot{w}_3 = -b_3$), 从而 M_2 不包含基系统(22)~(26)的公共不变流形.

3° 下面着重讨论由(30)定义的流形 $M_3 = \{(\boldsymbol{w}, \xi); (\boldsymbol{w}, \xi)$ 满足$(30)\}$ 是否包含基系统(22)~(26)的公共不变流形. 为此, 先将(30)等价变形:

当 $a_2 = 0$ 时, $\xi_1 = 0$ 是(30)的解, 但流形 $M_1' = \{(\boldsymbol{w}, \xi); \xi_1 = 0\}$ 不包含系统(25)的不变流形, (因为在(25)中 $\dot{\xi}_1 = 1$), 从而舍去这种情形的讨论.

当 $a_2 \neq 0$ 时, 由(30a)式得 $w_3 = \dfrac{a_3 b_2^2 \xi_1}{a_2 b_3}$, 代入(30c)得

$$a_3 b_2 \xi_1 (b_2 \xi_2 + w_2) = 0, \tag{30d}$$

再将 $w_3 = \dfrac{a_3 b_2^2 \xi_1}{a_2 b_3}$ 代入(30b)得

$$a_3 b_2 \xi_1 (b_2 \xi_2 + w_2) = 0. \tag{30e}$$

(30d)与(30e)是同一个方程, 从而(30)等价地化为:

$$\left.\begin{aligned} &a_2 b_3 w_3 = a_3 b_2^2 \xi_1 \qquad (a_2 \neq 0), \\ &a_3 b_2 \xi_1 (b_2 \xi_2 + w_2) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

又因为 $\xi_1 \neq 0$, $b_2 = 1/A_2 \neq 0$, 从而(31)化为

$$\left.\begin{aligned} &a_2 b_3 w_3 = a_3 b_2^2 \xi_1 \qquad (a_2 \neq 0), \\ &a_3 (b_2 \xi_2 + w_2) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

在(32)中, 当 $a_3 = 0$ 时, 由(32)中第一式可得 $w_3 = 0$, 但 $M_2 = \{(\boldsymbol{w}, \xi); w_3 = 0\}$ 不包含子系统(25)的不变流形, 从而, 当 $a_3 \neq 0$ 时, (32)又转化为

$$\left.\begin{aligned} &a_2 b_2 w_3 = a_3 b_2^2 \xi_1 \quad (a_2 \neq 0,\ a_3 \neq 0), \\ &b_2 \xi_2 + w_2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

下面讨论(33)是否包含(22)~(26)的公共不变流形.

将(33)按子系统(23)求导, 则

$$\left\{\begin{aligned} &a_2 b_3 \dot{w}_3 = a_3 b_2^2 \dot{\xi}_1 \\ &b_2 \dot{\xi}_2 + \dot{w}_2 = 0 \end{aligned}\right]_{(23)} \Rightarrow \begin{cases} -a_2 b_3^2 \xi_2 w_1 = 0 \\ b_2 \xi_1 w_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow w_1 = 0,$$

但 $M_1=\left\{(\boldsymbol{w},\xi);\ w_1=0\right\}$ 不包含基系统(22)~(26)的公共不变流形($1°$ 中已讨论)• 这样,(33) 就不包含基系统(22)~(26) 的公共不变流形•

从而由 $3°$ 的讨论过程可知,(30) 不包含(22)~(26) 的公共不变流形•

综合 $1°, 2°, 3°$ 的讨论可知,集合 $M=\left\{(\boldsymbol{w},\xi);\ \Delta_5=0\right\}$ 不包含基系统(22)~(26) 的公共不变流形,按定理 2.7,系统(19) 满足能控性必要条件•

4.3 两陀螺转轴成任意角时刚体能控性的讨论

当两陀螺转轴成任意 $\alpha(0<\alpha<\pi)$ 角时,我们可根据条件

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(0,0,1),$$
$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(0,\beta_1,\beta_2),$$
$$\beta_2^2+\beta_3^2=1$$

来建立坐标系,并按定理 2.7 来讨论系统能控性必要条件• 讨论方法同 4.2 节,为节省篇幅起见,此处略去• 讨论的结果为系统仍然满足能控性必要条件•

当两陀螺转轴平行时,相当于刚体内只含一个陀螺转动的情况,由 A. M. Kovalev 在文[9]中的结论,含有一个陀螺的刚体运动不可控,故两陀螺转轴平行时刚体运动不可控•

[参 考 文 献]

[1] Isidori A. Nonlinear Control Systems, An Introduction[M]. Vol **72**. Berlin: Springer_Verlag, 1985.

[2] 程代展. 非线性系统的几何理论[M]. 北京:科学出版社, 1988.

[3] 程代展,等. 非线性系统研究动态与展望[J]. 控制与决策, 1991, **6**(5): 394—400.

[4] Hermann R, Krener A J. Nonlinear controllability and observability[J]. IEEE Transactions Automatic Control, 1977, AC_**22**(5): 728—740.

[5] Sussmann H J, Jurdjevic V. Controllability of nonlinear systems[J]. J Differential Equations, 1972, **12**(3): 313—329.

[6] Sussmann H J. A general theorem on local controllability[J]. SIAM J Contr & Opt, 1987, **25**(1): 158—194.

[7] Cao L, Zheng Y F. Some toplogical properties of reachable semigroup of the systems on Lie group[A]. In: C I Byrnes, et al Eds. Analysis and Control of Nonlinear Systems[C]. Amsterdam: North_Holland, 1988, 149—154.

[8] ¶¾¶Â¿À³ . º¿±ß¼ºÉ¶Ã½º¶ ÃºÃÄ¶¾Í ÅÁÂ±ß½¶¿Ñ ¿±´½±µ¼ºÇ ¾¿À´ÀÀ²Â±ºÑÇ[A]. º²¶Â¿¶Äº¼±º ÍÉºÃ½[M]. Áº, **31**, ÀÃ¼³±¶Ç¿º¼±, 1976.

[9] À³±½¶ß . ÁÂ±ß½Ñ¶¾ÀÃÄÎ, ±½Ðµ±ß¾ÀÃÄÎ, µ¶¿ÄºÆºÈºÂÅ¶¾ÀÃÄÎ º¿±ß¼ºÉ¶Ã½¼ºÇ ºÃÄ¶¾[M]. º¶ß: ±Å¼, дА а, 1993.

[10] ±Â½±ß¼À³ . ² º¿³±Âº±¿Ä¿ÍÇ ÃÀÀÄ¿ÀÊ¶¿ºÑÇ ÃºÃÄ¶¾Í µºÆÆ¶Â¶¿Éº±½Î¿ÍÇ ÅÂ±¿¶¿º»[J]. ¶Ç±¿º¼± ³¶ÂÄÀ´À ¶½±, 1974, **6**: 15—24.

[11] À³±½¶³ . ¶½º¿¶»¿Í¶ ±±Éº ÁÂ±ß½¶¿ºÑ ±½Ðµ¶¿ºÑ ³ ¶ÀÂºº º¿±ß¼ºÉ¶Ã¼ºÇ ºÃÄ¶¾[M]. º¶ß: ±Å¼ µÅ¾¼±, 1980.

[12] ¶ßº_ º³ºÄ± , ¾±½Îµº . ÅÂÃ ¶ÀÂ¶ÑºÉ¶Ã¼À» ¶Ç±¿º¼º[M]. Vol **2**. ÀÃ¼³±: ¹µ_³Àº¿ÀÃÄÂ ºÄ 1951.

The Invariant Manifold Method and the Controllability of Nonlinear Control System

YANG Liu
(1. Department of Chemical Processing Machinery, Sichuan University, Chengdu 610065, P R China)

Abstract: The problem of controllability of nonlinear control system is a significant field which has an extensive prospect of application. A. M. Kovalev of Ukraine Academy of Science applied the oriented manifold method developed in dynamics of rigid body to nonlinear control system for the first time and obtained a series of efficient results. Based on Kovalev's oriented manifold method, firstly, by invariant manifold method the problem of controllability of nonlinear control system was studied and the necessary condition of the controllability of a kind of affine nonlinear system was given out. Then the realization of the necessary condition was discussed. At last, the motion of a rigid body with two rotors was investigated and the necessary condition which is satisfied by this system was proved.

Key words: nonlinear control system; controllability; oriented manifold; invariant manifold; basic system; dynamics of rigid body