文章编号: 1000_0887(2000) 11_1201_07

一类带非线性边界条件的拟线性抛物方程的第二初边值问题*

潘佳庆

(集美大学师范学院 数学系, 厦门 361021)

(林宗池推荐)

摘要: 利用先验估计的方法讨论具非线性第二边界条件的快扩散方程解的存在性、唯一性、稳定性和渐近性• 主要结果是: 1) 存在唯的整体广义解, 解连续依赖于初值; 2) 存在 T_0, $t < T_0$ 时解是无穷次可微的正则解; 3) 当 t 充分大时, 解一致收敛到零•

关 键 词: 快扩散; 拟线性; 非线性边界条件; 第二初边值问题
中图分类号: O175.26 文献标识码: A

引 言

形如

$$u_t = (a(u)u_x)_x + b(u)_x + c(u) \qquad (a(0) = +\infty) \tag{1}$$

的快扩散方程有其重要的物理背景[1]• 近年来, 国内外对它的研究已有了一些成果, 例如[2]和[3]等分别讨论了方程(1)和方程 $u_t = (u^{m-1}u_x)_x + (u^n)_x$, $(0 < m < 1,\ n > 1)$ 的Cauchy问题, 主要结果是, 存在唯一的整体光滑解且解在 L^1 范数意义下连续地依赖于初值•

本文讨论如下的第二初边值问题:

$$\left.\begin{aligned} & u_t = (u^{m-1}u_x)_x \qquad (0 < x < 1,\ t > 0), \\ & u_x|_{x=0} = u^{\alpha}, \quad u_x|_{x=1} = 0 \qquad (t > 0), \\ & u|_{t=0} = u_0 \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$0 < m < 1$, $\alpha > 2$• 我们证明: $t > 0$ 时问题(2) 存在唯一的非负的弱解 u, 它在 L^1 范数意义下连续地依赖于初值; 存在正数 T_0, $t < T_0$ 时 u 是(2) 的 C^{∞} 光滑的正则解; t 充分大时, $0 \leqslant u \leqslant Ct^{1/m-1}$

关于方程(1) 的第二边值问题的研究也已经有了一些成果, 例如[4] 讨论了如下的问题:

$$\left.\begin{aligned} & u_t = \Delta(u^{\frac{1}{m}}) \qquad (x \in \Omega,\ t > 0), \\ & \frac{\partial u}{\partial n} = mn^{\frac{m+\alpha-1}{m}} \qquad (x \in \partial\Omega,\ t > 0), \\ & u(x, 0) = u_0 \qquad (x \in \Omega)• \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

* 收稿日期: 1999_02_18; 修订日期: 2000_05_28
作者简介: 潘佳庆(1957—) , 男, 江苏人, 教授, 研究方向: 偏微分方程.

其主要结果是:如果 $m>1$, $2\alpha\leqslant m+1$, 在 Ω 上处处有 $u_0>0$, 则问题(3) 存在整体的弱解。这里,我们将问题(2) 和(3) 作一比较。记 u 表示温度,则条件 $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=mu^{\frac{m+\alpha-1}{m}}$ 意味着沿 Ω 边界 $\partial\Omega$ 的每一点,热量都是从外部流向内部的,因此,$t_2>t_1\geqslant 0$ 时, $\int_\Omega u(x,t_2)\mathrm{d}x\geqslant\int_\Omega u(x,t_1)\mathrm{d}x$;另一方面,由(2) 中的边界条件可知, $t_2>t_1\geqslant 0$ 时, $\int_0^1 u(x,t_2)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 u(x,t_1)\mathrm{d}x$,由 Bootstrap 理论可知,在 Q 中任一使 $u>0$ 的点的领域内都有 $u\in C^\infty$,并且 u 满足(2) 中的方程。虽然 t 增加时,(3) 中的 $\int_\Omega u(x,t)\mathrm{d}x$ 越来越大而(2) 中的 $\int_0^1 u(x,t)\mathrm{d}x$ 越来越小,但本文却不仅得到弱解的整体存在性,而且还得到 T_0,使得 $u\in C^\infty(Q_{T_0})$。也就是,本文在较弱的条件下得到了较强的结论。

记 $Q_T=(0,1)\times(0,T)$, $Q=(0,1)\times(0,+\infty)$, $Q^\tau=(0,1)\times(\tau,T)$。我们假定:

$$\mathrm{H}_0: 0\leqslant u_0(x)\leqslant M,\quad \int_0^1 u_0(x)\mathrm{d}x=\bar{u}_0>0.$$

我们称 u 是(2) 在 Q_T 中的解,如果 1) u 有界连续非负; 2) u^m 有有界的广义导数; 3) u 满足

$$\int_{Q_T}\left(\frac{1}{m}u_x^m\phi_x-u\phi_t\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_0^1 u_0\phi(x,0)\mathrm{d}x,$$

其中, $\phi\in C^1(Q_T)$, $\phi_x|_{x=0,1}=0$, $\phi|_{t=T}=0$; 4) $t\to 0$ 时,

$$\int_0^1 u(x,t)\mathrm{d}x\to\bar{u}_0.$$

1 先 验 估 计

为了证明主要定理,我们先给出如下的引理:

引理 1(梯度估计) 如果 u 是(2) 的光滑的正解,则

$$\left|\left(u^{\frac{m-1}{2}}\right)_x\right|\leqslant\sqrt{\frac{1-m}{2(1+m)t}},\tag{4}$$

$$\frac{-u}{(1+m)t}\leqslant u_t\leqslant\frac{u}{(1-m)t}.\tag{5}$$

证明 变换 $V=\frac{1}{m-1}u^{m-1}$,则(2) 中的方程变为

$$V_t=(m-1)VV_{xx}+V_x^2.\tag{6}$$

记 $=V_{xx}$,则有

$$p_t=(m-1)Vp_{xx}+2mV_xp_x+(m+1)p^2.\tag{7}$$

由于 $p_0=\frac{-1}{(1+m)t}$ 是(7) 在初值 $p_0(x,0)=-\infty$ 下的解,由比较原理:

$$p(x,t)\geqslant\frac{-1}{(1+m)t}\qquad(0\leqslant x\leqslant 1).\tag{8}$$

把(8) 代入(6) 得, $V_t\geqslant(m-1)V\frac{-1}{(1+m)t}$,于是有 $u_t\geqslant\frac{-u}{(1+m)t}$。再作 $q=\frac{u_t}{u}$,则由(2) 得

$$q_t=(m-1)Vq_{xx}+2mV_xq_x-(1-m)q^2.\tag{9}$$

因为 $q_0=\frac{1}{(1-m)t}$ 是(9) 当 $q_0(x,0)=+\infty$ 时的解,仍由比较原理, $q(x,t)\leqslant\frac{1}{(1-m)t}$,从

而

$$u_t \leqslant \frac{u}{(1-m)t} \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1)\cdot \tag{10}$$

把(8)和(10)代入(2)中的方程可得知(4)也成立• 引理证毕•

引理 2 如果 u 是问题(2) 足够光滑的正解, 则

$$u(x,t) \leqslant \frac{2}{m}\left|(u^m)_x\right|\cdot \tag{11}$$

证明 对任意的 $(x_0,t_0)\in Q$, 任意的正数 h, 作函数

$$f_h = \begin{cases} \dfrac{4}{3\pi h^6}\left[h^2-(x-x_0)^2-(t-t_0)^2\right](t-t_0)^3 & ((x,t)\in D_h), \\ 0 & ((x,t)\in Q-D_h), \end{cases}$$

这里, $D_h=\left\{(x,t)\in Q, (x-x_0)^2+(t-t_0)^2\leqslant h^2\right\}$, 因此当 h 是足够小时, 有 $D_h\subset Q$, 并且

A) $\displaystyle\int_{D_h} f_{ht}(x,t)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = 1$,

B) $\displaystyle\lim_{h\to 0} f_{ht}(x,t) = \begin{cases} \infty & (x,t)=(x_0,t_0), \\ 0 & (x,t)\neq(x_0,t_0)\cdot \end{cases}$

由于 $\displaystyle\int_{D_h} u f_{ht}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_{D_h}\frac{1}{m}u_x^m f_{hx}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$, 故由 A) 和 B) 可得

$$\left|\int_{D_h}\frac{1}{m}u_x^m f_{hx}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{2}{m}\left|u^x(x_0,t_0)\right| \qquad (h\to 0),$$

$$\int_{D_h} u f_{ht}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \to u(x_0,t_0) \qquad (h\to 0)\cdot$$

从而, $u(x_0,t_0)\leqslant\dfrac{2}{m}\left|u_x^m(x_0,t_0)\right|\cdot$ 又因为(x_0,t_0) 是 Q 中的任意一点, 故知引理成立•

对任意的正数 δ, 令 $u_{0,\delta}(x)=\delta+\displaystyle\int_0^1 u_0(y)J_\delta(x-y)\mathrm{d}y\cdot$ 此处, J 是熟知的光滑算子• 因此, $\delta\leqslant u_{0,\delta}\leqslant\delta+M\cdot$

引理 3 若问题(2) 中的初始条件为: $u|_{t=0}=u_{0\delta}$, 则问题(2) 存在唯一的正解 $u_\delta\in C^\infty(Q)$

证明 对任意的 $T>0$, 令 $u^{1-\alpha}=w$, 在 Q_T 中考虑如下的问题:

$$(\mathrm{o})\begin{cases} w_t = w^{\frac{m-1}{1-\alpha}}w_{xx}+\dfrac{m-1+\alpha}{1-\alpha}w^{\frac{m-2+\alpha}{1-\alpha}}w_x^2 & (0<x<1, 0<t<T), \\ w_x|_{x=0}=1-\alpha, \quad w_x|_{x=0}=0 & (0<t<T), \\ w|_{t=0}=u_{0\delta}^{1-\alpha} & (0\leqslant x\leqslant 1)\cdot \end{cases}$$

记 $M_T=C_1\delta^{1-\alpha}\exp[C_2T]$, C_1 和 C_2 是待定的正数, 构造 $C^\infty(R)$ 函数 $F(r)$ 和 $H(r)$, 使得

$$F(r)=\begin{cases} \text{有界} & (r\geqslant M_T), \\ r^{\frac{m-1}{1-\alpha}} & ((\delta+M)^{1-\alpha}\leqslant r<M_T)), \\ \text{单调} & (0\leqslant r<(\delta+M)^{1-\alpha}), \\ 2\delta^{\frac{m-1}{1-\alpha}} & (r\leqslant 0)\cdot \end{cases}$$

$$
rH(r) = \begin{cases} \text{有界} & (r \geqslant M_T), \\ \dfrac{m-1+\alpha}{1-\alpha} r^{\frac{m-1}{1-\alpha}} & (r < M_T). \end{cases}
$$

考虑

$$
(\mathrm{p}) \begin{cases} E_t = F(E) E_{xx} + H(E) E_x^2 & (0 < x < 1, 0 < t < T), \\ E_x |_{x=0} = 1-\alpha, E_x |_{x=1} = 0 & (t > 0), \\ E|_{t=0} = u_{0\delta}^{1-\alpha} & (0 \leqslant x \leqslant 1). \end{cases}
$$

由[5]中定理7.4, 问题(p)存在唯一的解 E, $E \in C^{2+\beta, 1+\frac{\beta}{2}}(Q_T)$. 由极值原理, $E \geqslant (\delta + M)^{1-\alpha}$, 再由[5]中定理7.3, $E \leqslant \lambda_1 \exp[\lambda_2 T] \max | u_{0,\delta} |^{1-\alpha}$, λ_1、λ_2 是依赖于 m 和 α 的正数. 现在我们取 $C_1 = \lambda_1$, $C_2 = \lambda_2$, 由 F 和 H 的定义可知, E 是问题(o)的解. 记 $E = \omega_\delta$ 则由 Bootstrap 理论[6] 可知, $\omega_\delta \in C^\infty(Q_T)$. 因而, $u_\delta = w_\delta^{\frac{1}{1-\alpha}}$, u_δ 满足

$$
\delta(\lambda_1 \exp[\lambda_2 T])^{\frac{1}{1-\alpha}} \leqslant u_\delta(x, t) \leqslant \delta + M \qquad ((x, t) \in Q_T). \tag{12}
$$

u_δ 就是问题(2)在初始条件 $u_\delta |_{t=0} = u_{0\delta}$ 下的解, $u_\delta \in C^\infty(Q_T)$. 由于 T 是任意的, 故 $u_\delta \in C^\infty(Q)$.

2 主要结论

在作了上面的准备以后, 我们来证明本文的主要结论.

定理1(存在性, 唯一性, 稳定性) 问题(2)在 Q 中存在唯一的弱解, 解在 L^1 范数意义下连续依赖于初值 $u_0(x)$.

证明 对于 $T > 0$ 和任意的 $\delta > 0$, 我们有序列 $\{u_\delta\}$. 由引理1和(12)式知, 对任意的 $\tau > 0$, $\{u_\delta\}$ 在 Q^τ 中等度连续且一致有界. 因而由 Arzela 定理, 存在函数 $u(x, t)$, 当 $\delta \to 0$ 时 $u_\delta \to u$, u 在 Q^τ 中连续并且 $u \geqslant 0$. 由 τ 的任意性, $u \in C(Q_T)$. 对于试验函数 ϕ, 我们有

$$
\int_{Q_T} \left[\frac{1}{m} (u_\delta^m)_x \phi_x - u_\delta \phi_t \right] \mathrm{d}x \mathrm{d}t = \int_0^1 u_{0\delta}(x) \phi(x, 0) \mathrm{d}x.
$$

令 $\delta \to 0$, 则由引理1, $(u_\delta^m)_x$ 弱收敛于 $(u^m)_x$, 故广义导数 $(u^m)_x$ 在 Q_T 中存在且有界. 于是

$$
\int_{Q_T} \left[\frac{1}{m} (u^m)_x \phi_x - u \phi_t \right] \mathrm{d}x \mathrm{d}t = \int_0^1 u_0(x) \phi(x, 0) \mathrm{d}x. \tag{13}
$$

因为 u_δ 满足(2), 故在 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 上积分(2)式再令 $\delta \to 0$, 则得到, 当 $t \to 0$ 时, $\int_0^1 u(x, t) \mathrm{d}x \to u_0$. 由于 T 是任意的, 故知 u 是问题(2)在 Q 上的弱解. 定理证毕.

为了讨论解的唯一性与稳定性, 我们取函数

$$
p(x) = \begin{cases} \exp\left[\dfrac{-1}{x^2} \exp \dfrac{-1}{(1-x)^2} \right] & (0 < x < 1), \\ 0 & (x \leqslant 0), \\ 1 & (x \geqslant 1), \end{cases}
$$

显然, $p(x) \in C^\infty(R^1)$, 并且 $p'(x) \geqslant 0$. 对正数 ε, 令 $p_\varepsilon(x) = p\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$. 如果 $u_{1\delta}(x, t)$ 和 $u_{2\delta}(x, t)$ 是相应于初值 $u_{10,\delta}$ 和 $u_{20,\delta}$ 的两个解, 作 $S = \dfrac{1}{m}(u_{1\delta}^m u_{2\delta}^m)$, 则有

$$\int_0^1 (u_{1\delta}-u_{2\delta})_t p_\varepsilon(s)\,\mathrm{d}x \leqslant -(u_{1\delta}^{m-1+\alpha}-u_{2\delta}^{m-1+\alpha})p_\varepsilon|_{x=0}\text{。}$$

由 $p_\varepsilon(s)$ 的定义可知, 在 $x=0$ 处, 若 $u_{1\delta}\leqslant u_{2\delta}$, 则 $p_\varepsilon=0$, 若 $u_{1\delta}>u_{2\delta}$, 则 $p_\varepsilon>0$。因此, 总有 $\int_0^1 (u_{1\delta}-u_{2\delta})_t p_\varepsilon(s)\,\mathrm{d}x\leqslant 0$。令 $\varepsilon\to 0$, 则 $p_\varepsilon(s)\to \operatorname{sing}(s)$, 因此对 $0\leqslant t\leqslant T$, 我们有

$$\int_0^1 [u_{1\delta}(x,t)-u_{2\delta}(x,t)]_+\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 [u_{10,\delta}(x)-u_{20,\delta}(x)]_+\,\mathrm{d}x\text{。}$$

令 $\delta\to 0$, $\int_0^1 [u_1(x,t)-u_2(x,t)]_+\,\mathrm{d}x\leqslant \int_0^1 [u_{10}(x)-u_{20}(x)]_+\,\mathrm{d}x$。这里函数 $[f(x)]_+$ 的定义是

$$[f(x)]_+=\begin{cases} f(x) & (f(x)\geqslant 0),\\ 0 & (f(x)<0)\text{。}\end{cases}$$

同理 $\int_0^1 [u_1(x,t)-u_2(x,t)]_-\,\mathrm{d}x\leqslant \int_0^1 [u_{10}(x)-u_{20}(x)]_-\,\mathrm{d}x$。因此我们有

$$\int_0^1 |u_1(x,t)-u_2(x,t)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 |u_{10}(x)-u_{20}(x)|\,\mathrm{d}x\text{。}\tag{14}$$

由(14)我们得知定理结论成立。

定理 2(正则性) 如果 $u(x,t)$ 是问题(2)的弱解, 则存在正数 T_0, $u\in C^\infty(Q_{T_0})$。其中

$$T_0=\left[\frac{(\alpha-2)u_0}{m-3+2\alpha}\left(\frac{1-m^2}{2}\right)^{\frac{m-1+\alpha}{m-3+2\alpha}}\right]^{\frac{m-3+2\alpha}{\alpha-2}}\text{。}\tag{15}$$

证明 由(4)可知, 对任意的 δ, $u_\delta^{\frac{m-3}{2}}u_{\delta x}\leqslant\sqrt{\dfrac{2}{(1-m^2)t}}$, 故 $u_\delta(0,t)\leqslant\left[\dfrac{2}{(1-m^2)t}\right]^{\frac{1}{m-3+2\alpha}}$。因此

$$\int_0^1 u_\delta(x,t)\,\mathrm{d}x = u_{0\delta}-\int_0^t u_\delta^{m-1+\alpha}(0,\tau)\,\mathrm{d}t \geqslant$$

$$u_{0\delta}-\frac{m-3+2\alpha}{\alpha-2}\left(\frac{2}{1-m^2}\right)^{\frac{m-1+\alpha}{m-3+2\alpha}}t^{\frac{\alpha-2}{m-3+2\alpha}}\text{。}$$

令 $\delta\to 0$, 取 T_0 如(15), 则

$$\int_0^1 u(x,t)\,\mathrm{d}x>0\qquad (0<t<T_0)\text{。}\tag{16}$$

由(16), 必有 x_1, $0\leqslant x_1\leqslant 1$, 使得 $u(x_1,t)>0$。由(4), $u_\delta^{\frac{m-1}{2}}(x,t)\leqslant u_\delta^{\frac{m-1}{2}}(x_1,t)+\sqrt{\dfrac{1-m}{2(1+m)t}}$, 从而 $u_\delta(x,t)\geqslant\left[u_\delta^{\frac{m-1}{2}}(x_1,t)+\sqrt{\dfrac{1-m}{2(1+m)t}}\right]^{\frac{2}{m-1}}$, $0\leqslant x\leqslant 1$, $0<t<T_0$。令 $\delta\to 0$, 则有

$$u(x,t)\geqslant\left[u^{\frac{m-1}{2}}(x_1,t)+\sqrt{\frac{1-m}{2(1+m)t}}\right]^{\frac{2}{m-1}}\geqslant 0\qquad (0\leqslant x\leqslant 1,\ 0<t<T_0)\text{。}\tag{17}$$

由[6]中定理3, $u(x,t)$ 在 Q 中大于零处无限次连续可微且满足(2)中的方程, 因此由(17)式, $u\in C^\infty(Q_{T_0})$, u 在 Q_{T_0} 中是(2)的正则解。

由(17), 我们有

推论 1 设 $u(x,t)$ 是问题(2)的弱解, 则对于 $0\leqslant x\leqslant 1$, $u(x,t)>0$ 的充要条件是存在 $x_1\in[0,1]$, $u(x,t)>0$。

由于 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 u_\delta \mathrm{d}x \leqslant 0$, 因此 $t_1 \leqslant t_2$ 时 $\int_0^1 u(x, t_2)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 u(x, t_1)\mathrm{d}x$• 因而由推论 1 又有:

推论 2 如果存在 $(x_0, t_0) \in Q$, $u(x_0, t_0) = 0$, 则当 $(x, t) \in Q - Q_{t_0}$ 时 $u(x, t) = 0$•

关于对抛物方程解的大时间性态的研究已有了许多结论, 所使用的方法也各不相同, 这些结论常用 L^p 范数的形式给出, 如 $\| u \|_{L^p} \leqslant Ct^{-\sigma}$, $\sigma > 0$• 本文中, 我们使用引理 1 和引理 2 可以简洁地用一致范数给出解 $u(x, t)$ 的大时间性态的结论•

事实上, 如果 u 是问题(2) 的弱解, 则 $u \geqslant 0$• 对任意的 $(x_1, t_1) \in Q$, 如果 $u(x_1, t_1) > 0$, 则由 Bootstrap 理论可知, 在 (x_1, t_1) 的某邻域内 $u \in C^\infty$, 故由 (4) 和 (11), $u \leqslant \left[\frac{18}{(1-m^2)t}\right]^{\frac{1}{1-m}}$• 即有

定理 3(渐近性) 设 u 是(2) 的弱解, 则

$$u \leqslant \left[\frac{18}{(1-m^2)t}\right]^{\frac{1}{1-m}} \qquad (t > 0)•$$

最后, 我们归纳本文的主要结论如下:

1) 存在唯一的非负弱解 u, 并且 $u \in C^\infty(Q_{T_0})$, u 在 L^1 范数意义下连续依赖于处值 $u_0(x)$

2) $$\left| \left(u^{\frac{m-1}{2}}\right)_x \right| \leqslant \sqrt{\frac{1-m}{2(1+m)t}};\ \left(\frac{1}{m-1}u^{m-1}\right)_{xx} \geqslant \frac{-1}{(1+m)t};\ \frac{-u}{(1+m)t} \leqslant u_t \leqslant \frac{u}{(1-m)t};$$

3) 如果 u_1, u_2 是相应于初值 u_{10}, u_{20} 的两个解, 则

$$\int_0^1 | u_1(x, t) - u_2(x, t) | \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 | u_{10}(x) - u_{20}(x) | \mathrm{d}x;$$

4) $$u \leqslant \left[\frac{18}{(1-m^2)t}\right]^{\frac{1}{1-m}} \qquad (t > 0)•$$

[参 考 文 献]

[1] Esteban J R, Rodriguez A, Vazquez J L. A nonlinear heat equation with singular diffursivity[J]. Commun In Patial Differential Equations, 1988, **13**(8): 895—1039.

[2] 潘佳庆. 非线性奇异扩散方程解的存在性与唯一性[J]. 数学学报, 1999, **42**(3): 537—544.

[3] 潘佳庆, 白宣怀. 具奇扩散的非线性热方程的 Cauchy 问题[J]. 数学物理学报, 1992, **12** 增刊: 117—118.

[4] 王明新. 一类带有非线性边界条件的拟线性抛物形方程的大时间性态[J]. 数学学报, 1996, **39**(1): 118—124.

[5] Ladyzenskaa O A, Solonnikov V A, Uralceva N N. Linear and quasilinear equations of parabolic type [J]. Trnasl Math Monographs. Providence R I: Amer Math Soc, 1968, **23**: 475—492.

[6] Gilding B H, Peletier L A. The Cauchy problem for an equation in the theory of infiltration[J]. Arch Rat Mech Anal, 1976, **61**(2): 127—140.

The Second Initial_Boundary Value Problem for a Quasilinear Prabolic Equations With Nonlinear Boundary Conditions

Pan Jia_qing

(Department of Mathematics, Jimei University, Jimei, Xiamen 361021, P R China)

Abstract: With prior estimate method, the existence, uniqueness, stability and large time behavior of the solution of second initial_boundary value problem for a fast diffusion equation with nonlinear boundary conditions are investigated. The main results are: 1) there exists only one global weak solution which continuously depends on initial value; 2) when $t < T_0$, the solution is infinitely continuously differentiable and is a classical solution; 3) the solution converges to zero uniformly as t is large enough.

Key words: fast_diffusion; quasilinear; nonlinear boundary conditions; second initial_boundary value problem