

文章编号: 1000-0887(2000) 10-1013-08

低模态下弱阻尼 KdV 方程约化形式的数值分析

田立新¹, 储志俊², 刘曾荣³, 蒋勇⁴

(1 江苏理工大学 数理系, 江苏 镇江, 212013; 2 无锡轻工大学 数学系, 江苏 无锡, 214036;
3 上海大学 嘉定校区 数学系, 上海 201800; 4 南京理工大学 数学系, 江苏 南京 210000)

(本刊编委刘曾荣来稿)

摘要: 给出了低模态下弱阻尼 KdV 方程近似惯性流形的约化形式, 并在五模态下作数值分析, 有关数值分析结果与非线性谱分析结果相类似

关键词: 周期边界条件; 偏微分方程; 动力系统; 孤立波/ 近似惯性流形

中图分类号: O175.29 文献标识码: A

引言

非线性科学中重要且引人注目的领域之一, 是对无穷维动力系统时空复杂性的研究. 在这方面的研究正沿着两个方向发展, Temam 及其合作者建立的关于在耗散偏微分方程中存在唯一整体紧吸引子和惯性流形的理论是一个重要方向^{[1],[2]}; 另一个方向是, 借助非线性动力学方法, 斑图动力学得到了显著发展^[3]. 本文用近似惯性流形(AIM)把两者连在一起, 研究弱阻尼 KdV 方程的长期动力学行为. 因为弱阻尼 KdV 方程中典型算子不是扇形算子且非自共轭, 所以研究它的近似惯性流形比较困难^[4]. 文献[4]获得了该类方程的 AIM 的存在性. 本文在[4]的基础上, 研究弱阻尼 KdV 方程的近似惯性流形的约化形式并作数值分析, 数值模拟的结果与文献[5]一致.

1 近似惯性流形的约化形式

考虑如下周期边界条件的弱阻尼 KdV 方程:

$$u_t + u_{xxx} - u_{xx} + u + uu_x = f, \quad (1)$$

$$u(x+2, t) = u(x, t), \quad x \in \mathbf{R}, t \geq 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \in H^2_{\perp}, \quad (3)$$

$$f \in H^3_{\perp} \quad (f \text{ 与 } t \text{ 无关}), \quad \nu > 0, \quad \mu > 0 \quad (4)$$

收稿日期: 1999_05_17; 修订日期: 2000_05_10

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19601020, 19872044); 江苏省青年科技基金资助项目(BK97119, BQ98023); 江苏省青蓝工程基金资助项目

作者简介: 田立新(1963), 男, 江苏姜堰人, 教授, 博士, 江苏理工大学非线性科学研究中心主任(E-mail: tianlx@jsust.edu.cn).

设 $H = L^2[0, 2], V = H^2_2, \Delta = [0, 2]$ 作带扰动的有相同条件的如下方程:

$$u_t + u_{xxxx} + A_0 u = R(u), \quad x \in \Delta, t \geq 0, \tag{5}$$

其中, $A_0 u = u_{xxx} - u_{xx} + u$ 当 $\mu > 0$ 时, 定义:

$$A u = u_{xxxx} + A_0 u, B u = u_{xxxx}, R(u) = f - u u_x,$$

则 $D(A) = H^4_2$ 容易求得 A_0 的特征值如下:

$$\lambda_n = (\mu^2 + \frac{1}{4}) + i n^3, \quad n \in \mathbf{Z}, i = \sqrt{-1}$$

相应的特征向量是

$$e_n(x) = (2)^{-1/2} e^{i n x}, \quad n \in \mathbf{Z}$$

集合 $\{e_n\}_{n \in \mathbf{Z}}$ 构成 H 的一组正交基 对每一个固定的 $\mu > 0, A$ 是一个扇形算子且有紧预解式 如果 $f \in H^3_2$, 那么 $R(u) = f - u u_x: H^4_2 \rightarrow H^3_2$ (见[4])

对于任意给定 $\mu > 0$, 用[4]中同样的方法构造围道 Γ , 且 $0 \in \text{int}(\Gamma)$, 设

$$P_\mu = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma R(\lambda, A) d\lambda, \quad Q_\mu = I - P_\mu,$$

其中我们假设在实直线 $\text{Re } \lambda = a$ 上没有点谱, 则 $(A - \lambda I)$ 的特征值仅有有限个被 Γ 包围 记特征值集为 $\{\lambda_n : |\lambda_n| \leq \mu\}$, 那么 P_μ, H 的维数是 $2n + 1$, 且

$$P_\mu H = \text{span}\{e_n : |\lambda_n| \leq \mu\}, Q_\mu H = \text{span}\{e_n : |\lambda_n| > \mu\}$$

容易证得 $P_\mu^2 = P_\mu, Q_\mu^2 = Q_\mu, P_\mu Q_\mu = 0$ 设 P 是到 $\text{span}\{e_n : |\lambda_n| \leq \mu\}$ 上的投影, $Q = I - P$, 则有下面的命题 1 成立(见[4])

命题 1 当 $\mu > 0$ 时, 在方程(2)、(3)、(4)、(5) 中存在级数为 $\mu^{5/2}$ 的近似惯性流形:

$$M = \{(p, q) \mid u = p + q \text{ 是 (2) ~ (5) 的解}\},$$

其中 $(p, q) \in H_p \times H_q, N$ 为约化空间的维数, p, q 满足如下方程:

$$\begin{cases} p_t + A p + P(p + q)(p + q)_x = f(x), & (6) \\ A q + Q p p_x = 0 & (7) \end{cases}$$

定理 2 方程(1)~(4)的近似惯性流形 M , 对应的近似惯性形式是下述常微分方程组:

$$\begin{cases} p_t + A_0 p + P(p + q)(p + q)_x = f(x), & (8) \\ A_0 q + Q p p_x = 0, & (9) \end{cases}$$

其中 $p \in H_p, \dim H_p = 2N + 1, q \in H_q, p = a_0(t) + \sum_{n=1}^N a_n(t) \cos nx + b_n(t) \sin nx$,

系数 $a_0, \dots, a_N, b_0, \dots, b_N$ 可由 $2N + 1$ 个常微分方程组解得

证明 由文献[4]及命题 1 知: 方程(1)~(4)的近似惯性流形 M , 就是 $\mu \rightarrow 0$ 时 M 的极限

令
$$p = a_0(t) + \sum_{n=1}^N a_n(t) \cos nx + b_n(t) \sin nx,$$

则:

$$\begin{aligned} p p_x &= \left[a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos nx + b_n \sin nx \right] \left[- \sum_{n=1}^N n a_n \sin nx + \sum_{n=1}^N n b_n \cos nx \right] = \\ &= a_0 \left[- \sum_{n=1}^N n a_n \sin nx + \sum_{n=1}^N n b_n \cos nx \right] + \left[\sum_{n=1}^N a_i \cos ix \right] \left[\sum_{j=1}^N j b_j \cos jx \right] - \\ &= \left[\sum_{j=1}^N a_j \cos jx \right] \left[\sum_{i=1}^N i a_i \sin ix \right] - \left[\sum_{j=1}^N b_j \sin jx \right] \left[\sum_{i=1}^N i a_i \sin ix \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{matrix} N \\ j=1 \end{matrix} b_j \sin jx \right) \left(\begin{matrix} N \\ i=1 \end{matrix} i b_i \cos ix \right); \\
 Q_{ppx} = & Q \left[\begin{matrix} N \\ i,j=1 \end{matrix} \frac{j a_i b_j}{2} (\cos(i+j)x + \cos(i-j)x) - \right. \\
 & \left. \begin{matrix} N \\ i,j=1 \end{matrix} \frac{i a_i a_j}{2} (\sin(i+j)x - \sin(i-j)x) \right] + \\
 & Q \left[\begin{matrix} N \\ i,j=1 \end{matrix} \frac{i a_i b_j}{2} (\cos(i+j)x - \cos(i-j)x) + \right. \\
 & \left. \begin{matrix} N \\ i,j=1 \end{matrix} \frac{i b_i b_j}{2} (\sin(i+j)x + \sin(i-j)x) \right] = \\
 & \sum_{i,j=1, i+j > N}^{2N} \frac{j+i}{2} a_i b_j \cos(i+j)x + \sum_{i,j=1, i+j > N}^N \frac{i(b_i b_j - a_i a_j)}{2} \sin(i+j)x
 \end{aligned}$$

$$\text{设 } q = \sum_{n=N+1}^{2N} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

则:

$$\begin{aligned}
 A q = & \sum_{n=N+1}^{2N} (n^4 a_n - n^3 b_n + n^2 a_n + a_n) \cos nx + \\
 & (n^4 b_n + n^3 a_n + n^2 b_n + b_n) \sin nx
 \end{aligned}$$

将 $A q$ 及 Q_{ppx} 代入(7) 式得:

$$\left\{ \begin{aligned}
 & (N+1)^4 a_{N+1} - (N+1)^3 b_{N+1} + (N+1)^2 a_{N+1} + \\
 & a_{N+1} + \sum_{i=1}^N \frac{N+1}{2} a_i b_{N+1-i} = 0, \\
 & (N+1)^4 b_{N+1} + (N+1)^3 a_{N+1} + (N+1)^2 b_{N+1} + \\
 & b_{N+1} + \sum_{i=1}^N \frac{i(b_i b_{N+1-i} - a_i a_{N+1-i})}{2} = 0;
 \end{aligned} \right. \quad (10)$$

$$\left\{ \begin{aligned}
 & (N+2)^4 a_{N+2} - (N+2)^3 b_{N+2} + (N+2)^2 a_{N+2} + \\
 & a_{N+2} + \sum_{i=2}^N \frac{N+2}{2} a_i b_{N+2-i} = 0, \\
 & (N+2)^4 b_{N+2} + (N+2)^3 a_{N+2} + (N+2)^2 b_{N+2} + \\
 & b_{N+2} + \sum_{i=2}^N \frac{i(b_i b_{N+2-i} - a_i a_{N+2-i})}{2} = 0
 \end{aligned} \right. \quad (11)$$

由上述方程组(10)和(11)可解得 a_{N+1}, b_{N+1} 和 a_{N+2}, b_{N+2} 类似可解得: $a_{N+3}, b_{N+3}, \dots, a_{2N}, b_{2N}$, 它们都是 a_1, \dots, a_N 和 b_1, \dots, b_N 的函数 从而得到 q , 而且

$$p + q = a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos nx + b_n \sin nx, \quad (p + q)_x = \sum_{n=1}^{2N} -n a_n \sin nx + n b_n \cos nx,$$

$$p_t = a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos nx + b_n \sin nx, \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
 A p = & a_0 + \sum_{n=1}^N (n^4 a_n - n^3 b_n + n^2 a_n + a_n) \cos nx + \\
 & (n^4 b_n + n^3 a_n + n^2 b_n + b_n) \sin x, \quad (13)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(p+q)(p+q)_x &= a_0 \left[\sum_{n=1}^N -na_n \sin nx + nb_n \cos nx \right] + \\
 &P \left[\left(\sum_{i=1}^{2N} a_i \cos ix \right) \left(\sum_{j=1}^{2N} -ja_j \sin jx \right) + \left(\sum_{i=1}^{2N} b_i \sin ix \right) \left(\sum_{j=1}^{2N} -ja_j \sin jx \right) \right] + \\
 &P \left[\left(\sum_{j=1}^{2N} a_j \cos jx \right) \left(\sum_{i=1}^{2N} ib_i \cos ix \right) + \left(\sum_{i=1}^{2N} b_i \sin ix \right) \left(\sum_{j=1}^{2N} jb_j \cos jx \right) \right] = \\
 &a_0 \left[\sum_{n=1}^N -na_n \sin nx + nb_n \cos nx \right] + \\
 &P \left\{ \sum_{i,j=1}^{2N} \frac{-ja_i a_j}{2} (\sin(i+j)x - \sin(i-j)x) + \right. \\
 &\sum_{i,j=1}^{2N} \frac{ja_i b_j}{2} (\cos(i+j)x - \cos(i-j)x) + \\
 &\sum_{i,j=1}^{2N} \frac{ia_j b_i}{2} (\cos(i+j)x + \cos(i-j)x) + \\
 &\left. \sum_{i,j=1}^{2N} \frac{jb_i b_j}{2} (\sin(i+j)x + \sin(i-j)x) \right\},
 \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
 P(p+q)(p+q)_x &= a_0 \left[\sum_{n=1}^N -na_n \sin nx + nb_n \cos nx \right] + \\
 &\sum_{i,j=1, i+j \leq 2N}^{2N} \frac{i+j}{2} a_j b_i \cos(i+j)x + \sum_{i,j=1, i+j \leq 2N}^{2N} \frac{j(b_i b_j - a_i a_j)}{2} \sin(i+j)x + \\
 &\sum_{i,j=1, |i-j| \leq 2N}^{2N} \frac{i-j}{2} a_j b_i \cos(i-j)x + \sum_{i,j=1, |i-j| \leq 2N}^{2N} \frac{j(b_i b_j + a_i a_j)}{2} \sin(i-j)x \quad (14)
 \end{aligned}$$

将(12)、(13)、(14)式代入方程(6)可得到 $2N+1$ 个常微分方程组,并由此解出 a_0, a_1, \dots, a_N 及 b_0, b_1, \dots, b_N ,从而得到

$$p = a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

在上式中令 $x=0$,即可得到本定理所要的结果(见文献[4])

2 五模态下近似惯性流形及数值分析

下面仅讨论 $f=0$ 时五模态下的情形

定理3 五模态下方程(1)~(4)的近似惯性流形的约化常微分方程为:

$$\begin{cases}
 a_0 + a_0 = 0, \\
 a_1 + (a_1 + a_1) a_1 - b_1 + \frac{1}{2}(2a_0 b_1 + a_1 b_2 - a_2 b_1 - \\
 \quad a_3 b_2 + a_2 b_3 - a_4 b_3 + a_3 b_4) = 0, \\
 b_1 + (b_1 + b_1) b_1 - \frac{1}{2}(2a_0 a_1 + a_1 a_2 + b_1 b_2 + \\
 \quad a_2 a_3 + b_2 b_3 + a_3 a_4 + b_3 b_4) = 0, \\
 a_2 + (4a_2 + a_2) a_2 - 8b_2 + 2a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_1 b_3 - \\
 \quad a_3 b_1 + a_2 b_4 - a_4 b_2 = 0, \\
 b_2 + (4b_2 + b_2) b_2 + 8a_2 - 2a_0 a_2 + \frac{1}{2}(b_1^2 - a_1^2) - \\
 \quad a_1 a_3 - b_1 b_3 - a_2 a_4 - b_2 b_4 = 0,
 \end{cases}$$

其中 a_3, b_3, a_4, b_4 满足以下关系式:

$$[(9 + \quad)^2 + 27^2] a_3 = -\frac{3}{2}(9 + \quad)(a_1 b_2 + a_2 b_1) + \frac{81}{2}(a_1 a_2 - b_1 b_2),$$

$$[(9 + \quad)^2 + 27^2] b_3 = \frac{81}{2}(a_1 b_2 + a_2 b_1) + \frac{3}{2}(9 + \quad)(a_1 a_2 - b_1 b_2),$$

$$[(16 + \quad)^2 + 64^2] a_4 = 64(a_2^2 - b_2^2) - 2(16 + \quad)a_2 b_2,$$

$$[(16 + \quad)^2 + 64^2] b_4 = 128a_2 b_2 + (16 + \quad)(a_2^2 - b_2^2)$$

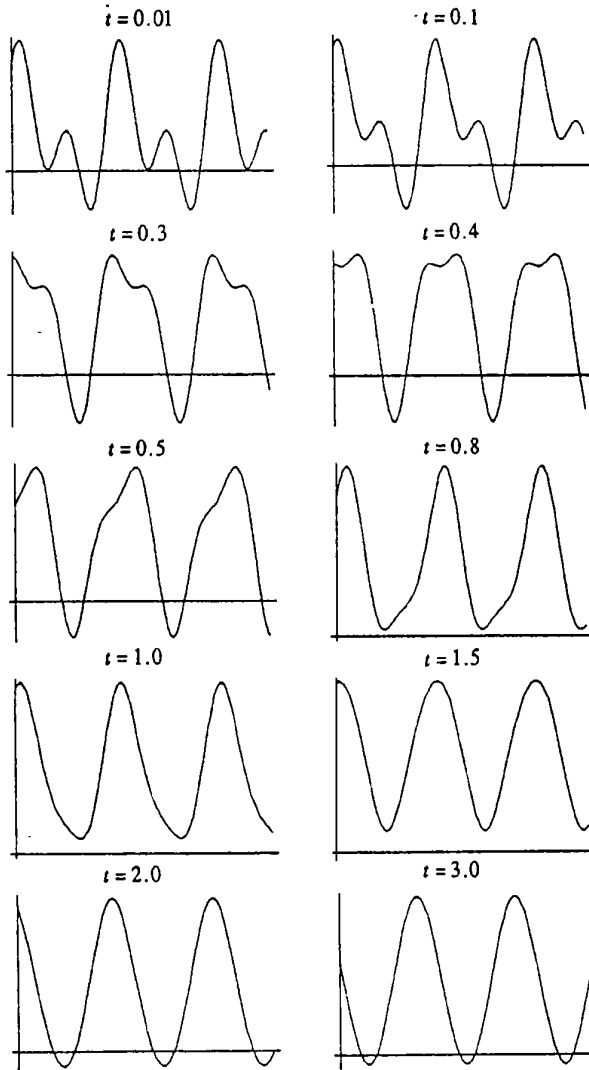


图 1

这时, 五模态下近似惯性流形 $M = \{(p, q) \mid u = p + q \text{ 为 (1) ~ (4) 的解}\}$, 其中

$$p = a_0(t) + a_1(t)\cos x + b_1(t)\sin x + a_2(t)\cos 2x + b_2(t)\sin 2x,$$

$$q = a_3(t)\cos 3x + b_3(t)\sin 3x + a_4(t)\cos 4x + b_4(t)\sin 4x$$

证明 在定理 2 中取 $2N + 1 = 5$ 及 $f = 0$, 则:

$$p = a_0 + a_1\cos x + b_1\sin x + a_2\cos 2x + b_2\sin 2x,$$

$$q = a_3\cos 3x + b_3\sin 3x + a_4\cos 4x + b_4\sin 4x$$

相应地(10)~(11)式变为:

$$81 a_3 - 27b_3 + 9 a_3 + a_3 + \frac{3}{2} a_1 b_2 + \frac{3}{2} a_2 b_1 = 0,$$

$$81 b_3 + 27a_3 + 9 b_3 + b_3 - \frac{3}{2} a_1 a_2 + \frac{3}{2} b_1 b_2 = 0,$$

$$256 a_4 + 64b_4 + 16 a_4 + a_4 + 2a_2 b_2 = 0,$$

$$256 b_4 + 64a_4 + 16 b_4 + b_4 - a_2^2 + b_2^2 = 0$$

所以 $M = \{(p, q) \mid u = p + q \text{ 是(2)~(5)的解}\}$

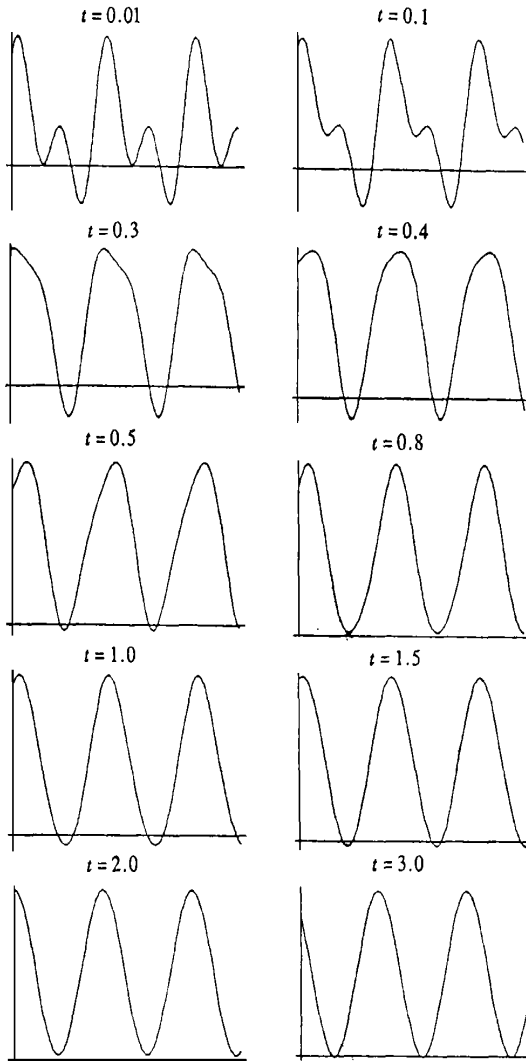


图 2

$$[(81 + 9 +)^2 + 27^2] a_3 =$$

$$- \frac{3}{2} (81 + 9 +) (a_1 b_2 + a_2 b_1) + \frac{81}{2} (a_1 a_2 - b_1 b_2),$$

$$[(81 + 9 +)^2 + 27^2] b_3 =$$

$$\frac{81}{2} (a_1 b_2 + a_2 b_1) + \frac{3}{2} (81 + 9 +) (a_1 a_2 - b_1 b_2),$$

$$[(256 + 16 + \quad)^2 + 64^2] a_4 = 64(a_2^2 - b_2^2) - 2(256 + 16 + \quad) a_2 b_2,$$

$$[(256 + 16 + \quad)^2 + 64^2] b_4 = 128 a_2 b_2 + (256 + 16 + \quad)(a_2^2 - b_2^2)$$

而相应地(12)~(14)式变为:

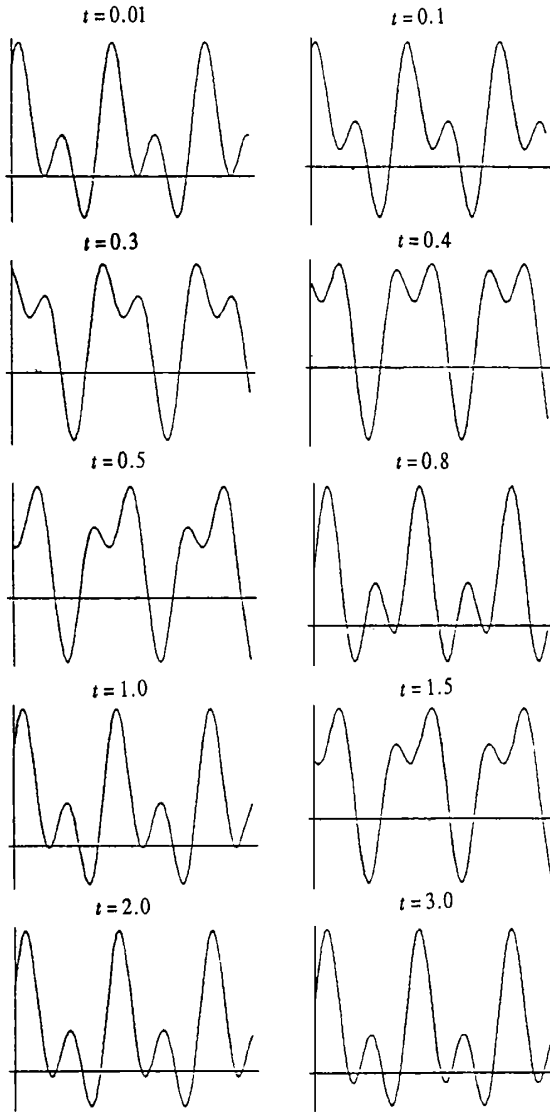


图 3

$$p_t = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x,$$

$$\Delta p = a_0 + (a_1 - b_1 + a_1 + a_1) \cos x + (b_1 + a_1 + b_1 + b_1) \sin x + (16 a_2 - 8 b_2 + 4 a_2 + a_2) \cos 2x + (16 b_2 + 8 a_2 + 4 b_2 + b_2) \sin 2x,$$

$$P(p+q)(p+q)_x = \frac{1}{2} \cos x (2a_0 b_1 + a_1 b_2 - a_2 b_1 -$$

$$a_3 b_2 + a_2 b_3 - a_4 b_3 + a_3 b_4) -$$

$$\frac{1}{2} \sin x (2a_0 a_1 + a_1 a_2 + b_1 b_2 + a_2 a_3 + b_2 b_3 + a_3 a_4 + b_3 b_4) +$$

$$\cos 2x(2a_0b_2 + a_1b_1 + a_1b_3 - a_3b_1 + a_2b_4 - a_4b_2) + \sin 2x \left[-2a_0a_2 + \frac{1}{2}(b_1^2 - a_1^2) - a_1a_3 - b_1b_3 - a_2a_4 - b_2b_4 \right]$$

将上述结果代入方程(6), 并且让 $\epsilon \rightarrow 0$, 则得定理3的结果

对不同的参数 ϵ, δ :

$$1) \epsilon = 1, \delta = 0.5; 2) \epsilon = 0.5, \delta = 1; 3) \epsilon = 0.10001, \delta = 0.10005,$$

以及给定的初始条件: $a_0(0) = a_1(0) = b_1(0) = a_2(0) = b_2(0) = 1$, 可以解得相应的 $a_0(t)$ 、 $a_1(t)$ 、 $a_2(t)$ 、 $b_1(t)$ 、 $b_2(t)$, 从而得到:

$$p = a_0(t) + a_1(t)\cos x + b_1(t)\sin x + a_2(t)\cos 2x + b_2(t)\sin 2x$$

方程(1)~(4)的长期动力学行为, 可以由五模态下的数值结果获得(见图1~3), 其结果与文献[5]是类似的

[参 考 文 献]

- [1] Temam R. Infinite Dimensional Systems in Mechanics and Physics [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1988.
- [2] Constantin P, Foias C, Nicolaenko B, et al. Integral Manifolds and Inertial Manifolds for Dissipative Partial Differential Equations [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1988.
- [3] Cross M C, Hohenberg P C. Pattern formation of equilibrium [J]. Rev Modern Phys, 1993, **65**(2): 851-1223.
- [4] 田立新, 徐振源. 弱阻尼 KdV 方程长期动力学行为研究 [J]. 应用数学和力学, 1997, **18**(10): 953-958.
- [5] Ercolani N M, McLaughlin D W, Roitner H. Attractors and transients for a perturbed periodic KdV equations: a nonlinear spectral analysis [J]. J Nonlinear Science, 1993, **3**(2): 477-579.

N u m e r i c a l A n a l y s i s o f L o n g t i m e D y n a m i c B e h a v i o r i n W e a k l y D a m p e d F o r c e d K d V E q u a t i o n

TIAN Li_xin¹, CHU Zhi_jun², LIU Zeng_rong³, JIANG Yong⁴

(1) Department of Mathematics and Physics, Jiangsu University of
Science and Technology, Zhenjiang, Jiangsu 212013, P R China;

(2) Department of Mathematics, Wuxi University of Light and Industry,
Wuxi, Jiangsu 214036, P R China;

(3) Department of Mathematics, Shanghai University, Jiading, Shanghai 201800, P R China;

(4) Department of Mathematics, Nanjing University of Science and Technology,
Nanjing 210000, P R China)

Abstract: The numerical analysis of the approximate inertial manifold in weakly damped forced KdV equation is given. The results of numerical analysis under five models is the same as that of nonlinear spectral analysis.

Key words: periodic boundary conditions; partial differential equation; dynamical systems; soliton/
approximate inertial manifold