

文章编号: 1000\_0887(2000) 10\_1028\_05

# 断裂分析的小波数值方法<sup>\*</sup>

沈远彤<sup>1</sup>, 羿旭明<sup>2</sup>

(1. 中国地质大学 数理系, 武汉 430074; 2 武汉大学 数学与计算机科学学院, 武汉 430072)

(周焕文推荐)

摘要: 利用小波具有的良好局部化特性, 用小波函数对位移场进行逼近, 建立了小波数值计算格式, 模拟了裂纹尖端的奇异性问题。算例求出了裂纹尖端的应力强度因子, 数值结果显示出该方法具有良好的数值精度。

关键词: 小波数值计算格式; 尺度函数; 应力强度因子; 奇异性

中图分类号: O242; O343 文献标识码: A

## 引言

断裂力学在各种工程领域中有着广泛的应用。在断裂力学中, 裂纹尖端的应力场、位移场以及表示裂纹尖端的应力场强弱程度的应力强度因子都是研究的重要内容<sup>[1]</sup>。对于无穷平面断裂问题的求解, 在一定条件下, 可以用复变函数和积分变换法求解解析解。但对于有限平面裂纹问题却需采用数值方法。由于裂纹尖端的奇异性, 数值求解存在一定的困难, 目前主要使用的数值方法有边界单元法、解析\_变分法、有限元法和等参奇异元<sup>[2, 3]</sup>。

近年来, 小波理论作为一种新的数学工具迅速发展起来, 被广泛地应用于信号处理、图象压缩、模式识别、微分方程求解等。它以同时在时频两空间具有良好的局部化特性而优于傅里叶分析, 并可以随着小波空间的提高聚焦到对象的任意细节, 对奇异性分析具有重要的意义。小波分析已用于奇异性探测<sup>[4]</sup>, 微分方程数值解<sup>[5]</sup>等。本文利用了小波的这一特性, 针对裂纹问题在裂纹尖端存在着奇异性, 直接由泛函出发, 用小波尺度函数对平面断裂问题的位移场进行逼近, 建立起小波数值计算格式。与此同时, 对具有中心裂纹和双边裂纹有限平面问题分别进行了数值计算, 求出了裂纹尖端的应力强度因子。通过比较显示了本方法的可靠性和精度。

## 1 小波的基本概念

假设  $N_m(x)$  为由下述方程递归定义的  $m$  阶 B\_样条,  $N_m(x)$  为  $N_{m-1}(x)$  与  $N_1(x)$  的卷积, 其中  $N_1(x)$  是区间  $[0, 1]$  上的特征函数,

\* 收稿日期: 1999\_09\_13; 修订日期: 2000\_04\_18

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19602014); 武汉大学自强科技创新基金资助项目; 青年学术骨干基金资助项目

作者简介: 沈远彤(1963—), 男, 武汉人, 副教授, 硕士, 现主要从事小波分析的理论与应用研究。

$$N_1(x) = X_{f0,1}(x),$$

$$N_m(x) = (N_{m-1} * N_1)(x) = \int_0^1 N_{m-1}(x-t) dt \quad (m = 2, 3, 4 \dots) \quad (1)$$

$$\text{记 } \varphi(x) = N_m(x), \quad \varphi_{j,k}(x) = \varphi(2^j x - k), \quad (2)$$

$\forall j \in \mathbf{Z}$ , 定义

$$V_j = \text{span} \left\{ \varphi_{j,k}(x) \mid k \in \mathbf{Z} \right\},$$

则  $\{V_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$  具有如下性质:

- 1)  $V_j \subset V_{j+1}, \quad \forall j \in \mathbf{Z}; \quad \bigcap_{j \in \mathbf{Z}} V_j = \{0\}; \quad \overline{\bigcup_{j \in \mathbf{Z}} V_j} = L^2(\mathbf{R});$
- 2)  $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}, \quad \forall j \in \mathbf{Z};$
- 3)  $\{\varphi(x-k) \mid k \in \mathbf{Z}\}$  构成  $V_0$  的一个无条件 Riesz 基;

如果  $W_j$  为  $V_j$  在  $V_{j+1}$  中的正交补空间, 且有

$$4) V_{j+1} = V_j \oplus W_j; \quad \text{且 } \bigoplus_{j \in \mathbf{Z}} W_j = L^2(\mathbf{R}).$$

由上述性质可以得出以下定理<sup>[6]</sup>:

定理 1  $\varphi(x)$  为  $L^2(\mathbf{R})$  上的尺度函数, 且

$$(i) \text{ supp } \varphi(x) = [0, m];$$

$$(ii) \varphi(x) = \sum_{k=0}^m 2^{-m+1} \binom{m}{k} \varphi(2x-k);$$

$$(iii) \varphi'(x) = N_{m-1}(x) - N_{m-1}(x-1).$$

定理 2  $N_m(x)$  为  $m$  阶的 B-样条, 设

$$q_k = \begin{cases} \frac{(-1)^k}{2^{m-1}} \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} N_{2m}(k+1-l) & (k = 0, \dots, 3m-2), \\ 0, & \text{否则,} \end{cases}$$

则有如下结论:

$$(i) \phi(x) = \sum_{k=0}^{3m-2} q_k \varphi(2x-k) \text{ 为一小波函数};$$

$$(ii) \text{ supp } \phi(x) = [0, 2m-1].$$

由于  $\{V_j\}$  构成一维多分辨分析, 因此,  $V_j^2 = V_j \times V_j$  构成  $L^2(\mathbf{R}^2)$  上的二维多分辨分析, 尺度函数为  $\Phi(x, y) = \varphi(x) \varphi(y)$ , 而且  $V_j^2$  在  $V_{j+1}^2$  中的正交补空间为  $W_j^2$ , 有  $V_{j+1}^2 = V_j^2 \oplus W_j^2$ , 其中  $W_j^2 = (V_j \times W_j) \oplus (W_j \times V_j) \oplus (W_j \times W_j)$ , 并且相应的小波函数为  $\varphi(x) \phi(y)$ 、 $\phi(x) \varphi(y)$  和  $\phi(x) \phi(y)$ .

## 2 断裂问题的小波数值计算格式

我们考虑具有如下边界条件的平面裂纹问题:

$$E(\mathcal{V}) \sigma = \mathbf{p} \quad \text{在边界 } B_1 \text{ 上}, \quad (3)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u} \quad \text{在边界 } B_2 \text{ 上}. \quad (4)$$

由最小势能原理, 系统的总势能为<sup>[7]</sup>

$$\Pi = \iint_{\mathcal{V}} W dv - \iint_{\mathcal{V}} \mathbf{f}^T \mathbf{u} dv - \int_{B_1} \mathbf{p}^T \mathbf{u} dB_1, \quad (5)$$

式中,  $W$  为应变密度,  $\mathbf{f}$  与  $\mathbf{p}$  分别为体力与面力.

将位移  $\mathbf{u} = (u, v)^T$  在  $V_j^2$  空间中展开

$$\begin{cases} u = \sum \sum a_{j,k,l} \varphi_{j,k}(x) \varphi_{j,l}(y) = \Phi_u(x, y) \mathbf{a}, \\ v = \sum \sum b_{j,k,l} \varphi_{j,k}(x) \varphi_{j,l}(y) = \Phi_v(x, y) \mathbf{b}. \end{cases} \quad (6)$$

将(6)式记为

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \Phi(x, y) \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} = \Phi \mathbf{c}, \quad (7)$$

其中  $\mathbf{c} = \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix}$  为待求未知量。

由应变与位移的关系得

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \partial \Phi / \partial x \\ \mathbf{b} \partial \Phi / \partial y \\ \mathbf{a} \partial \Phi / \partial y + \mathbf{b} \partial \Phi / \partial x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial \Phi / \partial x & 0 \\ 0 & \partial \Phi / \partial y \\ \partial \Phi / \partial y & \partial \Phi / \partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix}. \quad (8)$$

将(8)式记为

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{B}] \{\mathbf{c}\}. \quad (9)$$

由应力与应变的关系:

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{D}] \{\boldsymbol{\varepsilon}\}, \quad (10)$$

矩阵  $[\mathbf{D}]$  为常数矩阵。

将(7)、(9)、(10)代入(5)并忽略体力,得系统总势能为:

$$\begin{aligned} \Pi = & \iint_v \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dv - \int_{B_1} \mathbf{p}^T \mathbf{u} dB_1 = \iint_v \frac{1}{2} \mathbf{c}^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{c} dv - \int_{B_1} \mathbf{p}^T \Phi dB_1 = \\ & \frac{1}{2} \mathbf{c}^T \iint_v \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dv \mathbf{c} - \int_{B_1} \mathbf{p}^T \Phi dB_1 \mathbf{c}. \end{aligned} \quad (11)$$

由最小势能原理,在满足位移边界条件(4)的情况下,其解使系统总势能最小。由拉格朗日乘子法,引入乘子  $\lambda$  得

$$\Pi(\mathbf{c}, \lambda) = \frac{1}{2} \mathbf{c}^T \iint_v \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dv \mathbf{c} - \int_{B_1} \mathbf{p}^T \Phi dB_1 \mathbf{c} + \int_{B_2} (\Phi \mathbf{c} - \mathbf{u}) \lambda dB_2.$$

$$\text{令 } \frac{\partial \Pi(\mathbf{c}, \lambda)}{\partial \mathbf{c}} = 0, \quad \frac{\partial \Pi(\mathbf{c}, \lambda)}{\partial \lambda} = 0,$$

得待定系数  $\mathbf{c}$  和  $\lambda$  的代数方程组:

$$[\mathbf{K}][\mathbf{c}] + [\mathbf{R}][\lambda] = [\mathbf{F}], \quad [\Phi][\mathbf{c}] = [\mathbf{u}], \quad (12)$$

其中系数矩阵  $[\mathbf{K}]$ ,  $[\mathbf{R}]$  和  $[\mathbf{F}]$  分别为:

$$[\mathbf{K}] = \iint_v \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dv, \quad [\mathbf{R}] = \int_{B_2} \Phi dB_2, \quad [\mathbf{F}] = \int_{B_1} \mathbf{p}^T \Phi dB_1.$$

从(12)式所确立的线性代数方程组中,可得到裂纹尖端的位移场。

### 3 数值分析

为了验证我们建立的小波数值计算格式的正确性和有效性,我们选定有限裂纹问题受单向面力作用,对中心裂纹(图1)和双边裂纹(图2)进行了计算。

由于问题的对称性,我们仅考虑其四分之一部分,对于中心裂纹和双边裂纹问题分别建立

如下坐标, 确定其相应的位移边界条件, 如图 3、图 4。

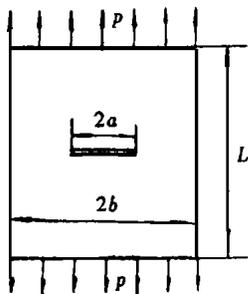


图 1 具有对称中心有限裂纹问题

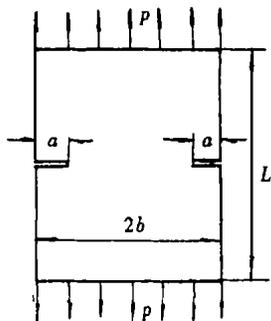


图 2 具有对称双边有限裂纹问题

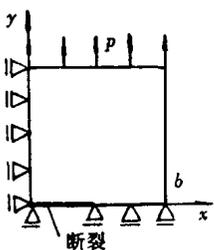


图 3 1/4 中心裂纹问题及边界条件

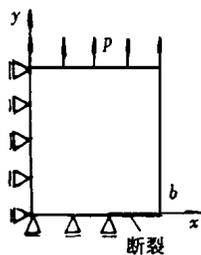


图 4 1/4 双边裂纹问题及边界条件

通过 (12) 式, 在  $V_j$  空间上可计算出裂纹问题的位移, 这里我们选取  $j = 5$ 。我们知道, 在裂纹面裂纹尖端附近  $y$  方向上的位移为

$$v = \frac{K_I}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (k+1), \quad (r \ll a), \tag{13}$$

其中  $r$  表示为裂纹尖端附近一点到裂纹尖端的距离。

因此应力强度因子  $K_I$  可表为

$$K_I = \frac{2Gv}{(k+1)} \sqrt{2\pi r}. \tag{14}$$

由裂纹尖端附近的应力强度因子, 可外推到裂纹尖端而得到裂纹尖端应力强度因子的数值解。

对中心裂纹和双边裂纹问题, 在  $h/b = 1$  的情况下, 求出不同  $a/b$  之比值的应力强度因子 (见表 1)。对中心裂纹问题, 在  $a/b = 0.4$  情况下求出不同  $h/b$  之比值的应力强度因子 (见表 2)。

为了便于比较, 以下各表中应力强度因子数据均为无量纲应力强度因子

$$Z_I = K_I / p \sqrt{a}.$$

由表 2 知, 当  $h/b > 3$  时其无量纲应力强度因子  $Z_I$  为 1.932。而由有限中心裂纹问题应力强度因子  $Z_I$  表达式:

$$Z_I = \frac{K_I}{p \sqrt{a}} = \left[ \frac{2b}{\pi a} \tan \frac{\pi a}{2b} \right]^{1/2} \sqrt{\pi}. \tag{15}$$

计算无量纲应力强度因子  $Z_I$  为 1.906, 相差 1.4%。

表 1 不同  $a/b$  之比值情况下的应力强度因子  $Z_I$  ( $h/b = 1$ )

裂纹类型 $a/b$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
中心裂纹	1.843	1.897	1.994	2.136	2.340	2.623	2.960
双边裂纹	2.013	2.052	2.106	2.198	2.269	2.358	2.519

表 2 不同  $h/b$  之比值情况下的应力强度因子  $Z_I$  ( $a/b = 0.4$ )

裂纹类型 $h/b$	0.7	0.8	0.9	1	1.5	3	> 3
中心裂纹	2.490	2.349	2.233	2.136	1.994	1.932	1.932

同时, 我们还将所得结果与应用其它方法所得结果进行了比较(见表 3)。数值结果表明, 用小波数值方法解决断裂裂纹尖端应力强度因子是有效的, 其方法对裂纹附近的位移场逼近已经具有足够的精度。

表 3 应力强度因子计算结果比较

数值方法 裂纹类型	中心裂纹	边缘裂纹
小波数值法	2.136	2.198
解析_变分法	2.160	2.242
边界配置法	2.127	2.180

## [ 参 考 文 献 ]

- [1] 丁遂栋. 断裂力学[M]. 北京: 机械工业出版社, 1997.
- [2] 张行. 断裂力学中的应力强度因子的解法[M]. 北京: 国防工业出版社, 1992.
- [3] Barsoum R S. On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics[J]. Internal J Numer Methods Eng, 1976, 10(1): 25—37.
- [4] Mallat S, Wen L H. Singularity Detect and processing with wavelets[J]. IEEE Transaction on Information Theory, 1992, 38(2): 617—634.
- [5] 沈远彤, 叶碧泉, 羿旭明. 用小波\_配点法求解一类有奇异性的微分方程[J]. 数学杂志, 1997, 17(4): 517—521.
- [6] Chui C K. A Introduction to Wavelet [M]. Boston: Academic Press Inc, 1992.
- [7] 胡海昌. 弹性力学的变分原理及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 1980.

## Wavelet Numerical Method in Crack Analysis

SHEN Yuan\_tong<sup>1</sup>, YI Xu\_ming<sup>2</sup>

(1. Department of Mathematics and Physics, China University of Geosciences, Wuhan 430074, P R China;

2. School of Mathematics Sciences, Wuhan University, Wuhan 430072, P R China)

**Abstract:** Properties of wavelet of good localization were used to approximate displacement fields near the crack tip. Wavelet\_numerical algorithm and simulation singularity problem of the crack tip were established. As an example, stress intensity factors were obtained. The numerical results show that this algorithm has good precision.

**Key words:** wavelet\_numerical algorithm; scaling function; stress intensity factor; singularity