

文章编号: 1000-0887(2000) 10-1046-07

基于小波分析的空间机械臂 运动规划的最优控制*

戈新生¹, 张奇志¹, 刘延柱²

(1. 北京机械工业学院 基础部, 北京 100085; 2. 上海交通大学 工程力学系, 上海 200030)

(邬瑞锋推荐)

摘要: 讨论了空间机械臂系统非完整运动规划的最优控制问题。利用小波分析方法, 将离散正交小波函数引入最优控制, 由小波级数展开式逼近替代传统的 Fourier 基函数, 提出基于小波分析的最优控制数值算法。仿真结果表明, 该方法对求解空间机械臂非完整运动规划问题是有效的。

关键词: 空间机械臂; 运动规划; 最优控制; 小波分析

中图分类号: TP241 文献标识码: A

引 言

近年来, 空间机械臂非完整运动规划问题的研究已引起人们的重视^[1~4]。空间机械臂是典型的无根多体系统。在机械臂操作过程中, 当载体姿态控制系统处于关闭状态时, 各分体的相对运动均不可避免地引起载体的质心偏移和姿态偏转, 从而使空间机械臂运动规划问题成为运动学与动力学交织的复杂问题, 完全不同于地面机械臂。忽略微弱的重力梯度力矩, 系统相对质心的动量矩守恒, 当机械臂杆件数大于 1 时, 其动力学方程可降为一阶而具有非完整约束特征, 这意味着可以通过规划机械臂各关节角的路径, 不仅使机械臂各关节角达到期望位置, 而且可以同时使载体姿态达到期望位置^[1,2]。Nakamura(1991)^[2] 和刘延柱(1996)^[3] 分别在机械臂关节空间和臂端负载的位形空间内讨论了运动路径规划问题。Fernandes(1991)^[4,5] 和作者(1997)^[6] 分别利用最优控制方法研究了空间机械臂和航天器太阳帆板展开运动规划问题。该方法的思想来源于泛函分析的 Ritz 理论^[7], 实际应用时采用 Fourier 基函数展开。作为传统 Fourier 分析发展的小波分析理论已成为一种新的强有力的分析工具和数学方法。本文在最优控制算法中引入离散正交小波函数, 由多分辨函数逼近替代传统的 Fourier 基函数。求解过程用尺度函数得到近似解, 再根据精度的需要逐步迭加高分辨分量。通过仿真算例表明, 基于小波分析的最优控制算法可有效地解决空间机械臂非完整运动规划问题。

1 动力学方程

设空间机械臂由载体 B_1 和臂杆件 $B_i (i = 2, \dots, n)$ 等 n 个刚体以 $n-1$ 个单自由度转动

* 收稿日期: 1999_04_07; 修订日期: 2000_04_18
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19782003)
作者简介: 戈新生(1957—), 男, 安徽合肥人, 教授。

较 $O_j(j = 2, \dots, n)$ 联结组成的无根单链系统(见图 1)• 以系统总质心 O_c 为原点建立惯性基 e_0 , 以各分体质心 O_{ci} 为原点建立连体基 $e_i(i = 1, \dots, n)$ • 忽略微弱的万有引力梯度, 则系统内各质点的万有引力与 O_c 点的轨道运动产生的惯性力平衡, 系统相对 $(O_c \text{---} XYZ)$ 的动量保持为零, 且相对 O_c 点的动量矩守恒• 设 H_0 为系统的起始动量矩, 根据动量矩守恒原理有

$$\sum_{j=1}^n (J_j \cdot \omega_j + m_j \rho_j \times \dot{\rho}_j) = H_0, \quad (1)$$

其中 m_j, J_j 分别为分体 B_j 的质量和中心惯量张量, ω_j 为 B_j 的角速度, ρ_j 为各分体质心 O_{cj} 相对 O_c 的矢径, 它可由增广体较矢量 $b_{ij}(i, j = 1, \dots, n)$ 计算^[8]

$$\rho = \sum_{i=1}^n b_{ij} \cdot \quad (2)$$

将式(2)代入式(1)中得到

$$\sum_{j=1}^n I_j \cdot \omega_j = H_0, \quad (3)$$

其中 I_j 为分体 B_j 的等效惯量张量, I_j 可表示为增广体惯量张量 K_j^* ($i, j = 1, \dots, n$) 的求和式^[8]

$$\left. \begin{aligned} I_j &= \sum_{i=1}^n K_{ij}^*, \\ K_{ij}^* &= \delta_{ij} K_i^* - (1 - \delta_{ij}) m [(\mathbf{b}_{ji} \cdot \mathbf{b}_{ij}) \mathbf{E} - \mathbf{b}_{ji} \mathbf{b}_{ij}], \\ K_i^* &= J_i + \sum_{k=1}^n m_k (\mathbf{b}_{ik}^2 \mathbf{E} - \mathbf{b}_{ik} \mathbf{b}_{ik}), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

其中 δ_{ij} 为 Kronecker 符号, 将载体相对 e_0 的姿态角 $\theta_{1k}(k = 1, 2, 3)$ 和相应的转轴基矢量 p_{1k} 相对 e_1 的投影列阵 $p_{1k}(k = 1, 2, 3)$ 组成列阵 θ_1 和方阵 p_1

$$\theta_1 = (\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{13})^T, \quad p_1 = (p_{11}, p_{12}, p_{13})^T. \quad (5)$$

将 O_j 较关联的邻接刚体 B_j 相对 B_{j-1} 的转角 $\theta_j(j = 2, \dots, n)$ 构成列阵 θ_*

$$\theta_* = (\theta_2, \dots, \theta_n)^T. \quad (6)$$

设 p_1 为 O_j 较的转轴基矢量相对 e_1 的投影列阵, 则分体 B_i 的角速度 ω_i 相对 e_i 的投影列阵 ω_i 为

$$\omega_i = \sum_{j=1}^i A_{ij} p_j \cdot \dot{\theta}_j \quad (i = 1, \dots, n). \quad (7)$$

将式(7)代入式(3), 设起始动量矩 H_0 为零, 导出系统非完整约束方程

$$\theta_1 + J \theta_* = 0, \quad (8)$$

其中

$$J = (J_2, J_3, \dots, J_n), \quad J_i = p_1^{-1} \left[\sum_{k=1}^n A_{1k} I_{k1} \right]^{-1} \left[\sum_{k=i}^n A_{1k} I_{k1} \right] p_i. \quad (9)$$

2 离散正交小波与函数逼近

离散小波定义为^[9]

$$\phi_{m,n}(t) = a_0^{-m/2} \phi(a_0^{-m} t - nb_0), \quad (10)$$

其中 $a_0 > 0, b_0 > 0, m, n$ 为整数• 若取 $a_0 = 2, b_0 = 1$, 且 $\phi_{m,n}(t)$ 满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_{m,n}(t) \phi_{m',n'}(t) dt = \delta_{mm'} \delta_{nn'}, \quad (11)$$

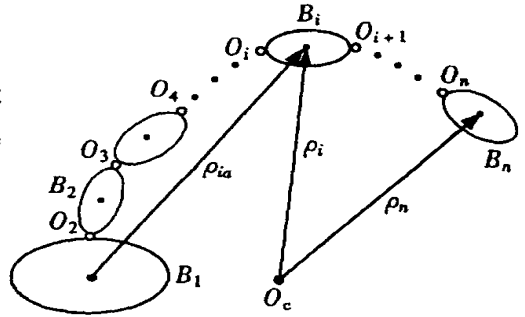


图 1 单链多体系统

则称 $\varphi_{m,n}(t)$ 为离散正交小波。

正交小波的构造一般借助于尺度函数 $\varphi(t)$, 采用与离散小波相同的记号表示, 则有

$$\varphi_{m,n}(t) = \mathcal{Z}^{m/2} \varphi(\mathcal{Z}^{-m} t - n) \quad (12)$$

尺度函数与小波函数之间存在正交关系

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{m,n}(t) \varphi_{m',n'}(t) dt = \delta_{m'n'}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{m,n}(t) \psi_{m',n'}(t) dt = 0 \quad (13)$$

设由 $\{\varphi_{m,n}(t), n \in \mathbf{Z}\}, \{\psi_{m,n}(t), n \in \mathbf{Z}\}$ 构成的空间分别记为 V_m 和 W_m , 它们都是 $L^2(\mathbf{R})$ 的子空间, 且有如下的关系

$$V_m \subset V_{m-1}, \quad V_{m-1} = V_m \oplus W_m, \quad \lim_{m \rightarrow -\infty} V_m = L^2(\mathbf{R}), \quad (14)$$

其中尺度函数空间 V_m 是一系列的嵌套空间, 其极限为 $L^2(\mathbf{R})$, V_{m-1} 比 V_m 具有更高的分辨率, W_m 是 V_m 在 V_{m-1} 中的正交补空间。由 $V_0 \subset V_{-1}, W_0 \subset V_{-1}$ 可知, 尺度函数 $\varphi(t)$ 与小波函数 $\psi(t)$ 之间存在双尺度关系

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=0}^{2N-1} h_n \varphi(2t - n), \quad \psi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=0}^{2N-1} g_n \varphi(2t - n), \quad (15)$$

其中系数 h_n 和 g_n 的关系可由 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 的正交条件得到

$$g_n = (-1)^n h_{2N-n-1}, \quad (n = 0, 1, \dots, 2N-1) \quad (16)$$

当尺度函数为紧支的, 且双尺度方程的等号右边仅包含有限项时, 构造出的正交小波基函数也将是紧支的。若选 m_0 为最低分辨率, $L^2(\mathbf{R}) = V_{m_0} \oplus W_{m_0} \oplus W_{m_0-1} \oplus \dots$, 则 $\forall f(t) \in L^2(\mathbf{R})$ 可展开成小波级数

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f, \varphi_{m_0,n} \rangle \varphi_{m_0,n}(t) + \sum_{m=-\infty}^{m_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f, \psi_{m,n} \rangle \psi_{m,n}(t) \quad (17)$$

上式是利用小波级数作函数逼近多分辨公式, 也是函数在正交小波基上的分解, 实际应用时经常先采用近似公式

$$f(t) \approx \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f, \varphi_{m_0,n} \rangle \varphi_{m_0,n}(t) \quad (18)$$

若不能满足精度要求再逐步添加“细节信号”, 即式(17)中的第二项。

3 非完整运动规划的最优控制

设空间机械臂系统的位形 $x = (\theta_1, \theta_*)^T$ 为状态变量, 选择机械臂相对转动角速度 θ_* 为输入控制变量, 以列阵 u 表示

$$u = \theta_* = (\theta_{*1}, \theta_{*2}, \dots, \theta_{*n})^T, \quad (19)$$

则系统状态方程为

$$\dot{x} = B(x) u, \quad B(x) = \begin{bmatrix} -J \\ E \end{bmatrix}, \quad (20)$$

其中矩阵 $B(x)$ 中的 E 为 $(n-1) \times (n-1)$ 单位阵。方程(20)体现出系统的非完整约束特性, 即以机械臂 $(n-1)$ 个关节相对角速度变量控制载体姿态三个变量和臂关节相对转角 $(n-1)$ 个变量。对于给定空间机械臂系统初始和终端状态, 通过优化指标寻找最优控制输入 $u(t), t \in [0, T]$ 确定状态转移的最优轨线。根据最小能量控制原理, 选取机械臂各关节耗散能为最优控制指标, 性能指标函数为

$$J(\mathbf{u}) = \int_0^T \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle dt, \quad (21)$$

其中 $\mathbf{u}(t)$ 为 $L^2([0, T])$ 可测向量函数。实际计算时仅考虑有限维情况, 利用小波函数作为正交基向量 $\{a_i\}_{i=1}^N$, 将 \mathbf{u} 的分量按式(17)展开并取有限项, 则 $\mathbf{u}(t)$ 可表示为小波基向量的线性组合

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^N \alpha_i a_i = \Phi \alpha, \quad (22)$$

其中 $\alpha_i (i = 1, \dots, N)$ 为函数 \mathbf{u} 在 $\{a_i\}_{i=1}^N$ 基上的投影, Φ 为以 $\{a_i\}_{i=1}^N$ 为列的 $(n-1) \times N$ 矩阵。考虑式(13)的正交条件, 并引入罚因子 λ , 指标函数可写为

$$J(\alpha, \lambda) = \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 + \lambda \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_f\|^2, \quad (23)$$

其中 $\mathbf{x}(T)$ 是方程(20)在给定控制输入 \mathbf{u} 时系统在 $t = T$ 时的状态。 $\mathbf{x}(T)$ 是 α 的函数, 设 $\mathbf{x}(T) = f(\alpha)$, 当 N 和 λ 给定时, 式(23)变为

$$J(\alpha) = \langle \alpha, \alpha \rangle + \lambda \|f(\alpha) - \mathbf{x}_f\|^2. \quad (24)$$

此时寻找控制输入 \mathbf{u} 使式(21)为最小值问题转化为寻找 α 使式(24)为最小值的问题。利用牛顿法, 将 $J(\alpha)$ 展开成 Taylor 级数, 并取二阶近似修正后得到高斯-牛顿迭代公式

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \sigma [\nabla E + A^T A]^{-1} [\nabla \alpha_n + A^T (f(\alpha_n) - \mathbf{x}_f)], \quad (25)$$

其中 A 为 $f(\alpha)$ 的 Jacobi 矩阵, E 为单位阵, $\sigma = 1/\lambda$, σ 为步长因子, $0 < \sigma < 1$ 。设

$$\mathbf{y}(t) = \partial \mathbf{x}(t) / \partial \alpha \quad (26)$$

且 $\mathbf{y}(0) = 0$, 可得关于 $\mathbf{y}(t)$ 的微分方程

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \left[\sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial B_i}{\partial x} u_i \right] \mathbf{y} + \mathbf{B} \Phi. \quad (27)$$

对式(20)和(27)从 0 到 T 数值积分, 并设 $f(\alpha_n) = \mathbf{x}(T)$, $A = \mathbf{y}(T)$ 代入式(25)即可迭代求解 α_n , 从而求出最优控制律 $\mathbf{u}(t)$ 。

4 数值算例

以两杆空间机械臂平面运动为例, 设系统质量几何参数为 $m_1 = 50 \text{ kg}$, $m_2 = m_3 = 5 \text{ kg}$, $J_1 = 7.8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $J_2 = J_3 = 0.52 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $O_1 O_2 = 0.5 \text{ m}$, $O_2 O_3 = O_3 O_4 = 1 \text{ m}$ 。用 $T = 5 \text{ s}$ 时间完成各分体的规定动作。选择 $N = 2$ 的 Daubechies 紧支撑正交小波^[10], 系数 h_n 为

$$h_0 = (1 + \sqrt{3})/4, \quad h_1 = (3 + \sqrt{3})/4, \quad h_2 = (3 - \sqrt{3})/4, \quad h_3 = (1 - \sqrt{3})/4;$$

尺度函数 $\varphi(t)$ 的值为

$$\varphi(1) = (1 + \sqrt{3})/2, \quad \varphi(2) = (1 - \sqrt{3})/2, \quad \varphi(0) = \varphi(3) = 0;$$

$g_n (n = 0, 1, 2, 3)$ 可由式(16)计算; 尺度函数 $\varphi(t)$ 的支撑区间为 $[0, 3]$, $\varphi(t)$ 在二进制小数上的值可由双尺度方程(15)得到

$$\left. \begin{aligned} \varphi(0.5) &= \sum_{k=0}^3 h_k \varphi(1-k) = h_0 \varphi(1) = (2 + \sqrt{3})/4, \\ \varphi(1.5) &= \sum_{k=0}^3 h_k \varphi(3-k) = h_1 \varphi(2) + h_2 \varphi(1) = 0, \\ \varphi(2.5) &= \sum_{k=0}^3 h_k \varphi(5-k) = h_3 \varphi(2) = (2 - \sqrt{3})/4 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

由上式(28)的结果可算出 $\varphi(0.25)$ 、 $\varphi(0.75)$ 、 $\varphi(1.25)$ 、 $\varphi(1.75)$ 、 $\varphi(2.25)$ 、 $\varphi(2.75)$ 的值, 此过程反复进行可求得任意二进制小数的 $\varphi(t)$ 值。 $\varphi(t)$ 的值可用式(15)的第二式计算。 利用式(18), 取 $m_0 = 0$, 控制变量 $u(t)$ 的分量 u_i 可表示为

$$u_i = \sum_n C_i(n) \varphi(t-n), \quad (i = 1, 2), \quad (29)$$

其中系数 $C_i(n)$ 的周期为 $T = 5$ 。 考虑尺度函数的支撑区间, 可列出与 u_1 相关的 5 个基向量 $\{a_i(t)\}_{i=1}^5$ 为

$$\begin{bmatrix} \varphi(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \varphi(t-1) \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \varphi(t-2) \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \varphi(t-3) + \varphi(t+2) \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \varphi(t-4) + \varphi(t+1) \\ 0 \end{bmatrix};$$

与 u_2 对应的基向量 $\{a_i(t)\}_{i=6}^{10}$ 可由上式行互换得到。

算例 1 要求载体的初始和终端位形保持不变, 机械臂前杆由初始位形 $\pi/4$ 转到 $\pi/2$, 末杆由 $\pi/6$ 转动 $\pi/3$ 。 即

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \pi/4 \\ \pi/6 \end{bmatrix}, \quad x_f = \begin{bmatrix} 0 \\ \pi/2 \\ \pi/3 \end{bmatrix}.$$

仿真结果如图 2、3 所示, 其中图 2(a)、(b) 为最优控制输入规律, 图 3(a)、(b)、(c) 为载体姿态和机械臂关节角的优化轨线。

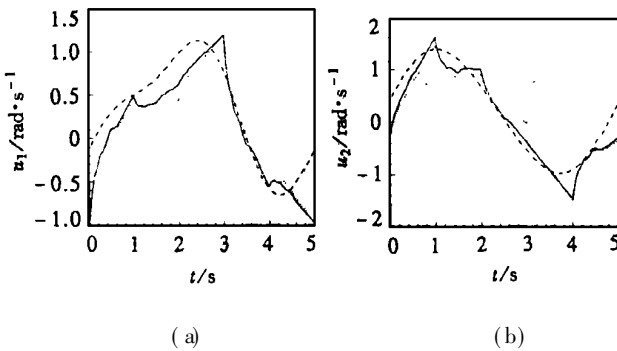


图 2 最优控制输入规律

算例 2 要求载体由初始位形 0 转动 $\pi/2$ 到终端位形, 机械臂前杆由 $\pi/6$ 转到 $\pi/3$, 末杆由 $\pi/4$ 转到 $\pi/2$ 。 即

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \pi/6 \\ \pi/4 \end{bmatrix}, \quad x_f = \begin{bmatrix} \pi/2 \\ \pi/3 \\ \pi/2 \end{bmatrix}.$$

图 4(a)、(b) 为最优控制输入规律, 图 5(a)、(b)、(c) 为载体姿态和机械臂关节角优化轨线。 图中实线为尺度函数 $\varphi(t)$ 计算结果, 点线为尺度函数 $\varphi(t)$ 迭加正交小波函数 $\psi(t)$ 计算结果, 虚线为 Fourier 基函数^[6] 计算结果。 算例计算收敛判定条件均为 $\|\Delta\alpha\| < 10^{-5}$, 三种迭

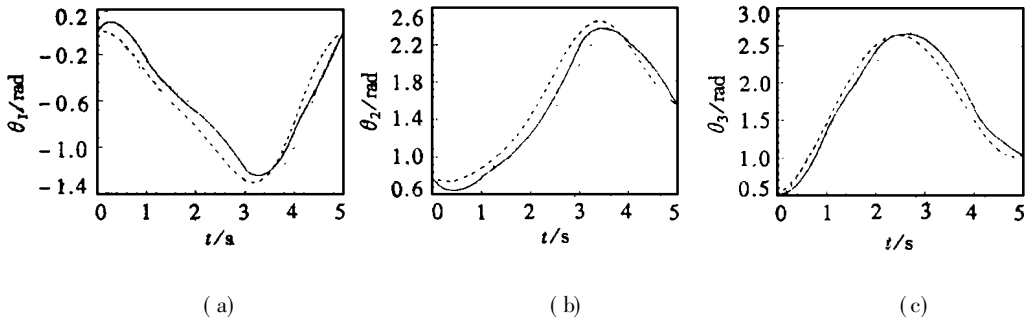


图3 载体姿态和机械臂关节角优化轨迹

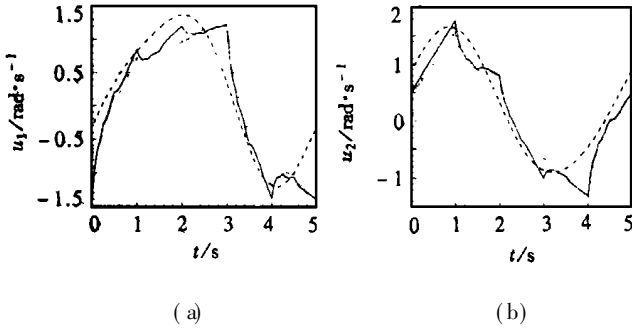


图4 最优控制输入规律

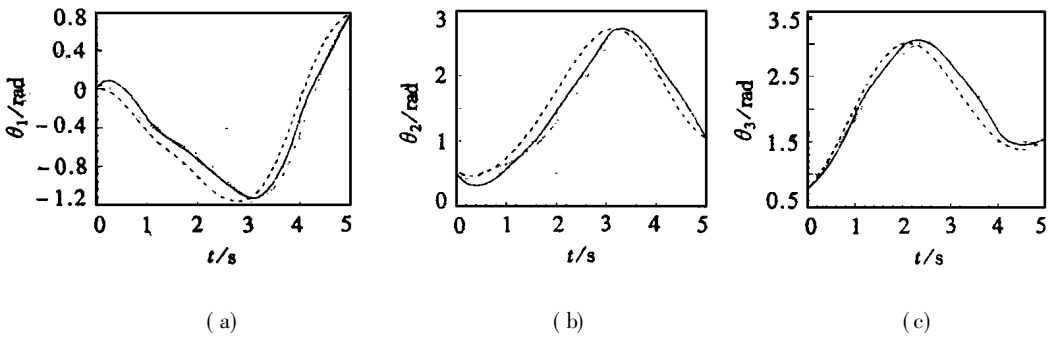


图5 载体姿态和机械臂关节角优化轨迹

代计算结果比较见表1和表2。

表1(算例1)

| | $\ \alpha \ $ | $J(\alpha)$ |
|------------------------|-------------------------------|----------------------------|
| Fourier | $\ \alpha_{29} \ = 1.62973$ | $J(\alpha_{29}) = 2.42810$ |
| $\varphi(t)$ | $\ \alpha_{31} \ = 1.63466$ | $J(\alpha_{31}) = 2.36318$ |
| $\varphi(t) + \psi(t)$ | $\ \alpha_{30} \ = 1.62839$ | $J(\alpha_{30}) = 2.28701$ |

表2(算例2)

| | $\ \alpha \ $ | $J(\alpha)$ |
|------------------------|-------------------------------|----------------------------|
| Fourier | $\ \alpha_{31} \ = 1.90160$ | $J(\alpha_{31}) = 2.95261$ |
| $\varphi(t)$ | $\ \alpha_{35} \ = 1.91607$ | $J(\alpha_{35}) = 2.91647$ |
| $\varphi(t) + \psi(t)$ | $\ \alpha_{33} \ = 1.90594$ | $J(\alpha_{33}) = 2.83187$ |

5 结 论

通过本文分析和数值仿真结果表明: 1) 基于小波分析的最优控制能有效的求解空间机械臂非完整运动规划问题; 2) 使用尺度函数通常均能满足精度要求; 3) 使用尺度函数迭加正交小波基函数可以达到更高的精度和指标函数得到进一步优化; 4) 从性能指标 $J(\alpha)$ 可以

看出小波基函数比 *Fourier* 基函数能减少系统的控制能量消耗。利用小波分析理论, 将其引入最优控制, 是一种新方法的尝试。尽管本文工作是针对空间机械臂非完整运动规划问题, 但我们提出基于小波分析的最优控制方法也为其它优化控制研究提供了一种新的思路。

[参 考 文 献]

- [1] Vafa Z, Dubowsky S. On the dynamics of space manipulator using the virtual manipulator with application to path planning[J]. The Journal of the Astronautical Science, 1990, 38(4): 441—472.
- [2] Nakamura Y, Mukherjee R. Nonholonomic path planning of space robots via a bidirectional approach[J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1991, 7(4): 500—514.
- [3] 刘延柱, 顾晓勤. 空间机械臂逆运动力学的 Liapunov 方法[J]. 力学学报, 1996, 28(5): 558—563.
- [4] Fernandes C, Gurvits L, Li Z. A variational approach to optimal nonholonomic motion planning[A]. In: IEEE Robotics and Automation Society Ed. Proc of IEEE Inter Conf on Robotics and Automation [C]. California: IEEE Computer Society Press, 1991, 680—685.
- [5] Fernandes C, Gurvits L, Li Z. Attitude control of a space platform/ manipulator system using internal motion[J]. The International Journal of Robotics Research, 1994, 13(4): 289—304.
- [6] 戈新生, 刘延柱. 航天器太阳帆板展开过程的最优控制[J]. 空间科学学报, 1997, 17(4): 360—366.
- [7] 柯朗 R, 希尔伯特 D. 数学物理方法(1)[M]. 钱敏, 郭敦仁译. 北京: 科学出版社, 1987.
- [8] 刘延柱. 航天器姿态动力学[M]. 北京: 国防工业出版社, 1995.
- [9] 崔景泰(美). 小波分析导论[M]. 程正兴译. 西安: 西安交通大学出版社, 1995.
- [10] Daubechies I. Orthonormal base of compactly supports wavelets[J]. Comm Pure Appl Math, 1988, 41: 909—996.

Based on Wavelet Analysis to Optimal Control of Motion Planning of Space Manipulator

GE Xin_sheng¹, ZHANG Qi_zhi¹, LIU Yan_zhu²

(1. Division of Basic Courses, Beijing Institute of Machinery, Beijing 100085, P R China;

2. Department of Engineering Mechanics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, P R China)

Abstract: The optimal control problem of nonholonomic motion planning of space manipulator was discussed. Utilizing the method of wavelet analysis, the discrete orthogonal wavelets were introduced to solve the optimal control problem, the classical Fourier basic functions were replaced by the wavelet expansion approximation. A numerical algorithm of optimal control was proposed based on wavelet analysis. The numerical simulation shows, the method is effective for nonholonomic motion planning of space manipulator.

Key words: space manipulator; motion planning; optimal control; wavelet analysis