文章编号: 1000_0887(2000) 10_1053_07

空间一般力系的新标量型平衡方程*

汤昕燕

(南京农业大学 农业工程学院, 南京 210032)

(汤任基推荐)

摘要: 利用解析几何原理, 证明了空间直线的若干性质, 在此基础上, 对空间一般力系的平衡方程作了研究, 并导出了此种力系的 4 种新的标量型方程, 它们与向量型的平衡充分必要条件等价•

关 键 词: 空间一般力系; 解析几何方法; 新的标量型平衡方程
中图分类号: O302 文献标识码: A

引 言

与平面力系一样, 任何空间力系 $\boldsymbol{F}_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 可向一点 O 简化, 并可用一主矢 $\boldsymbol{R}$ 和一个主矩 $\boldsymbol{L}_0$ 代替, 因此, 这种力系的向量型平衡充分必要条件为:

$$\boldsymbol{R} = 0, \quad \boldsymbol{L}_0 = 0• \tag{1}$$

在平面力系的情形, 以上向量型平衡条件还可表示为以下 3 种不同的标量型平衡方程[1~4]•

1) 第一种形式的平衡方程(两投影一力矩方程)

对于平面力系 $\boldsymbol{F}_i(i = 1, 2, \cdots, n)$, $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{L}_0$ 的大小由下式决定:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}, \quad L_0 = \sum m_0(\boldsymbol{F}_i), \tag{2}$$

式中 $R_x = \sum F_{ix}$ 和 $R_y = \sum F_{iy}$ 是 $\boldsymbol{R}$ 的笛卡尔坐标分量, $m_0(\boldsymbol{F}_i)$ 是力 $\boldsymbol{F}_i$ 关于 O 点的力矩•因此, 以上向量型平衡方程(1) 可表示为以下的标量型方程:

$$\sum F_{ix} = 0, \quad \sum F_{iy} = 0, \quad \sum m_0(\boldsymbol{F}_i) = 0• \tag{3}$$

2) 第二种形式的平衡方程(两力矩一投影方程)

对于平面力系 $\boldsymbol{F}_i(i = 1, 2, \cdots, n)$, 第二种形式的标量型平衡方程为: 对任意两点 A 和 B 的力矩和, 及对任意与 AB 不垂直的 Ox 轴的投影和必须分别等于零:

$$\sum m_A(\boldsymbol{F}_i) = 0, \quad \sum m_B(\boldsymbol{F}_i) = 0, \quad \sum F_{ix} = 0• \tag{4}$$

3) 第三种形式的平衡方程(三力矩方程)

任意平面力系 $\boldsymbol{F}_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 的第三种标量型平衡方程为: 对任意不共线的三点 A、B、C 的力矩和为零:

$$\sum m_A(\boldsymbol{F}_i) = 0, \quad \sum m_B(\boldsymbol{F}_i) = 0, \quad \sum m_C(\boldsymbol{F}_i) = 0• \tag{5}$$

* 收稿日期: 1999_06_30; 修订日期: 2000_04_15
作者简介: 汤昕燕(1965—) , 女, 上海崇明人, 讲师, 研究方向: 理论力学.

可以指出, 对于更为重要的空间一般力系, 除了以下笛卡尔坐标系 (x, y, z) 中的三力矩三投影基本的标量型平衡方程外[1]:

$$\left.\begin{aligned}&\sum m_x(\boldsymbol{F}_i)=0,\quad \sum m_y(\boldsymbol{F}_i)=0,\quad \sum m_z(\boldsymbol{F}_i)=0,\\&\sum F_{ix}=0,\quad \sum F_{iy}=0,\quad \sum F_{iz}=0\cdot\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

作者还未见与前面平面力系 3 种标量型平衡方程类似的其它标量型平衡方程•

本文使用解析几何原理[5], 证明了 6 根空间直线的若干性质, 其后导出了空间一般力系 4 种新的标量平衡方程• 记直坐标系 $x_i(x_1, x_2, x_3)$ 中的 6 根空间直线为 $P_I(I=1, 2, \cdots, 6)$, 它们的方向余弦参数(l_I, m_I, n_I) 由以下矩阵表示:

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1\\ l_2 & m_2 & n_2\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ l_6 & m_6 & n_6\end{bmatrix},\tag{7}$$

式中 $l_I^2+m_I^2+n_I^2=1(I=1, 2, \cdots, 6)$, 假定矩阵 $\boldsymbol{D}$ 的秩等于 3, 则在以上 6 直线中至少有 3 根不在同一平面且非平行的直线[6], 为方便起见, 这里记这 3 根不共面的直线为 $P_I(I=1, 2, 3)$• 此外, 空间直线 P_I 通过点 A_I 的笛卡尔坐标为(a_I, b_I, c_I), 这些位置参数由以下矩阵给出:

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ a_6 & b_6 & c_6\end{bmatrix}\cdot\tag{8}$$

最后假定, 力系 $\boldsymbol{F}_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 关于前 3 根非共面的直线 $P_I(I=1, 2, 3)$ 为轴的力矩均为零, 因而以上空间力系可简化为单个合力 $\boldsymbol{R}$, 而不是一个力螺旋(力 _力偶系)•

1 六空间直线的性质

在推导空间一般力系 $\boldsymbol{F}_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 的新的标量型平衡方程之前, 这里使用解析几何原理, 对由矩阵 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 给出的 6 条空间直线 $P_I(I=1, 2, \cdots, 6)$ 的性质进行讨论• 为此, 引进一辅助空间直线 P_0, 它的方向余弦和位置参数分别由(l_0, m_0, n_0) 和(a_0, b_0, c_0) 给出, 则 6 条直线 $P_I(I=1, 2, \cdots, 6)$ 与直线 P_O 间的若干性质证明如下:

性质 1 6 直线 $P_I(I=1, 2, \cdots, 6)$ 中任一直线均与直线 P_O 共面的充分必要条件, 是这 6 直线的参数行列式 Δ_6 等于零:

$$\Delta_6=\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 & \begin{vmatrix} m_1 & n_1\\ b_1 & c_1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} n_1 & l_1\\ c_1 & a_1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} l_1 & m_1\\ a_1 & b_1\end{vmatrix}\\ l_2 & m_2 & n_2 & \begin{vmatrix} m_2 & n_2\\ b_2 & c_2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} n_2 & l_2\\ c_2 & a_2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} l_2 & m_2\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ l_6 & m_6 & n_6 & \begin{vmatrix} m_6 & n_6\\ b_6 & c_6\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} n_6 & l_6\\ c_6 & a_6\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} l_6 & m_6\\ a_6 & b_6\end{vmatrix}\end{vmatrix}=0\cdot\tag{9}$$

证明 假设直线 P_O 能与 P_I 中的任一直线共面, 则根据解析几何[5], 其充分必要条件是这

6 直线 $P_I(I=1,2,\cdots,6)$ 的参数满足以下方程:

$$\begin{vmatrix} a_I-a_0 & b_I-b_0 & c_I-c_0 \\ l_0 & m_0 & n_0 \\ l_I & m_I & n_I \end{vmatrix}=0,\qquad (I=1,2,\cdots,6)\cdot \tag{10}$$

令:

$$\xi_0=\begin{vmatrix} m_0 & n_0 \\ b_0 & c_0 \end{vmatrix},\quad \eta_0=\begin{vmatrix} n_0 & l_0 \\ c_0 & a_0 \end{vmatrix},\quad \zeta_0=\begin{vmatrix} l_0 & m_0 \\ a_0 & b_0 \end{vmatrix},$$

则以上方程可表为:

$$\xi_0 l_I+\eta_0 m_I+\zeta_0 n_I+l_0\begin{vmatrix} m_I & n_I \\ b_I & c_I \end{vmatrix}+m_0\begin{vmatrix} n_I & l_I \\ c_I & a_I \end{vmatrix}+n_0\begin{vmatrix} l_I & m_I \\ a_I & b_I \end{vmatrix}=0,$$
$$(I=1,2,\cdots,6)\cdot \tag{11}$$

以上是关于直线 P_O 参数$(\xi_0,\eta_0,\zeta_0,l_0,m_0,n_0)$ 的齐次方程组, 因此, 若由(9) 表示的行列式 Δ_6 为零, 则以上方程有非零解, 因此以上充分必要条件得到证明• 最后, 我们使用这一结果, 可指出, 若

$$\Delta_6\neq 0, \tag{12}$$

则以上6 直线 $P_I(I=1,2,\cdots,6)$ 不存在能被同时通过或平行的直线 P_O•

性质2 6 直线 $P_I(I=1,2,\cdots,6)$ 中, 前5 直线 $P_I(I=1,2,\cdots,5)$ 的每一根均与直线 P_O 共面, 而最后一根 P_6 与直线 P_O 垂直的充分必要条件是, 这6 直线的参数行列式 Δ_5 等于零:

$$\Delta_5=\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 & \left(\begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ c_1 & a_1 \end{vmatrix}-\dfrac{m_6}{l_6}\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}\right) & \left(\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}-\dfrac{n_6}{m_6}\begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ c_1 & a_1 \end{vmatrix}\right) \\ l_2 & m_2 & n_2 & \left(\begin{vmatrix} n_2 & l_2 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}-\dfrac{m_6}{l_6}\begin{vmatrix} m_2 & n_2 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}\right) & \left(\begin{vmatrix} l_2 & m_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}-\dfrac{n_6}{m_6}\begin{vmatrix} n_2 & l_2 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_5 & m_5 & n_5 & \left(\begin{vmatrix} n_5 & l_5 \\ c_5 & a_5 \end{vmatrix}-\dfrac{m_6}{l_6}\begin{vmatrix} m_5 & n_5 \\ b_5 & c_5 \end{vmatrix}\right) & \left(\begin{vmatrix} l_5 & m_5 \\ a_5 & b_5 \end{vmatrix}-\dfrac{n_6}{m_6}\begin{vmatrix} n_5 & l_5 \\ c_5 & a_5 \end{vmatrix}\right) \end{vmatrix}=0\cdot \tag{13}$$

证明 假设直线 P_O 能与前5 直线 $P_I(I=1,2,\cdots,5)$ 的每一根共面, 而与最后一根 P_6 垂直, 则根据解析几何[5], 其充分必要条件是6 直线 $P_I(I=1,2,\cdots,6)$ 的参数应满足以下方程:

$$\begin{cases} \xi_0 l_I+\eta_0 m_I+\zeta_0 n_I+l_0\begin{vmatrix} m_I & n_I \\ b_I & c_I \end{vmatrix}+m_0\begin{vmatrix} n_I & l_I \\ c_I & a_I \end{vmatrix}+n_0\begin{vmatrix} l_I & m_I \\ a_I & b_I \end{vmatrix}=0 \\ l_0 l_6+m_0 m_6+n_0 n_6=0\cdot \end{cases}$$
$$(I=1,2,\cdots,5), \tag{14}$$

上式是关于直线 P_O 参数$(\xi_0,\eta_0,\zeta_0,l_0,m_0,n_0)$ 的齐次方程, 它仅在由(13) 表示的行列式 Δ_5 为零时有非零解, 因而以上充分必要条件得到证明• 最后, 使用以上结果可知, 若

$$\Delta_5\neq 0, \tag{15}$$

则不存在直线 P_O 能同时通过或平行前5 直线 $P_I(I=1,2,\cdots,5)$ 并与最后一根直线 P_6 垂直•

性质3 6 直线 $P_I(I=1,2,\cdots,6)$ 中, 前4 根 $P_I(I=1,2,3,4)$ 的每一根均能与直线 P_O 共面, 而最后两根 $P_I(I=5,6)$ 均能与 P_O 垂直的充分必要条件是, 这6 根直线的参数行列式 Δ_4 等于零:

$$\Delta_4=\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 & \left(\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} l_5 & m_5 \\ l_6 & m_6 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} m_5 & n_5 \\ m_6 & n_6 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ c_1 & a_1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} n_5 & l_5 \\ n_6 & l_6 \end{vmatrix}\right) \\ l_2 & m_2 & n_2 & \left(\begin{vmatrix} l_2 & m_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} l_5 & m_5 \\ l_6 & m_6 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} m_2 & n_2 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} m_5 & n_5 \\ m_6 & n_6 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} n_2 & l_2 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} n_5 & l_5 \\ n_6 & l_6 \end{vmatrix}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_4 & m_4 & n_4 & \left(\begin{vmatrix} l_4 & m_4 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} l_5 & m_5 \\ l_6 & m_6 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} m_4 & n_4 \\ b_4 & c_4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} m_5 & n_5 \\ m_6 & n_6 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} n_4 & l_4 \\ c_4 & a_4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} n_5 & l_5 \\ n_6 & l_6 \end{vmatrix}\right) \end{vmatrix}=0 \cdot \tag{16}$$

证明 设直线 P_O 能与前4直线 $P_I(I=1,2,3,4)$ 的每一根共面, 而与最后两根 $P_I(I=5,6)$ 垂直, 则由解析几何[5] 知, 其充分必要条件是这6直线 $P_I(I=1,2,\cdots,6)$ 的参数应满足以下方程:

$$\begin{cases} \xi_0 l_I+\eta_0 m_I+\zeta_0 n_I+l_0\begin{vmatrix} m_I & n_I \\ b_I & c_I \end{vmatrix}+m_0\begin{vmatrix} n_I & l_I \\ c_I & a_I \end{vmatrix}+n_0\begin{vmatrix} l_I & m_I \\ a_I & b_I \end{vmatrix}=0, & (I=1,2,3,4), \\ l_0 l_I+m_0 m_I+n_0 n_I=0, & (I=5,6) \cdot \end{cases} \tag{17}$$

上式是关于参数 $(\xi_0, \eta_0, \zeta_0, l_0, m_0, n_0)$ 的齐次方程, 它仅在由(16) 式表示的行列式 Δ_4 为零时有非零解, 于是以上充分必要条件得到证明• 再使用以上结果, 可知若

$$\Delta_4 \neq 0, \tag{18}$$

则不存在直线 P_O 能同时通过或平行前4 直线 $P_I(I=1,2,3,4)$ 并与最后两根直线 $P_I(I=5,6)$ 垂直•

性质4 6直线 $P_I(I=1,2,\cdots,6)$ 中, 前3根直线 $P_I(I=1,2,3)$ 的每一根均能与直线 P_O 共面, 而后3根 $P_I(I=4,5,6)$ 均能与 P_O 垂直的充分必要条件是, 6直线的参数行列式 Δ_3 等于零:

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} l_4 & m_4 & n_4 \\ l_5 & m_5 & n_5 \\ l_6 & m_6 & n_6 \end{vmatrix} \cdot \tag{19}$$

可以指出, 以上性质的证明与前面的方法相同, 因此这里不再进行证明• 另外由以上性质可知, 若

$$\Delta_3 \neq 0, \tag{20}$$

则不存在直线 P_O 能同时通过或平行前3根直线 $P_I(I=1,2,3)$, 并与后3根直线 $P_I(I=4,5,6)$ 垂直•

2 新的标量型平衡方程

为了研究空间一般力系 $\boldsymbol{F}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的平衡, 这里取由矩阵(7) 和(8) 给出的6直线 $P_I(I=1,2,\cdots,6)$ 作为此一般力系的力矩轴和投影轴, 力系轴 P_I 的力矩代数和及投影的代数和分别记为 $\sum_{i=1}^{n} m_I(\boldsymbol{F}_i)$ 及 $\sum_{i=1}^{n} F_{Ii}$, 则使用向量型平衡条件(1) 及以上给出的性质 1 ~ 4, 可导出空间一般力系 $\boldsymbol{F}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的4 种新的标量型平衡方程如下:

2.1 第一种形式的平衡方程(六力矩方程)

取由矩阵(7)和(8)给出的6直线 $P_I(I=1,2,\cdots,6)$ 作为空间一般力系 $\boldsymbol{F}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的力矩轴,则这一空间力系的第一种新的标量型平衡方程为:

$$\sum_{i=1}^{n} m_I(\boldsymbol{F}_i)=0, \qquad (I=1,2,\cdots,6), \tag{21}$$

式中所取的6根力矩轴应满足以下附加条件:

$$r=3, \quad \Delta_6\neq 0, \tag{22}$$

此处 r 为(7)矩阵 $\boldsymbol{D}$ 的秩,Δ_6 是6根力矩轴的参数矩阵•

在(22)条件下,方程(21)是空间一般力系 $\boldsymbol{F}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 平衡的充分必要条件,这些方程的必要性可证如下:若给定的力系平衡,则 $\boldsymbol{L}_0=\boldsymbol{R}=0$,因此对所有的力矩轴 $P_I(I=1,2,\cdots,6)$,其力矩必为零,这表明方程(21)成立,于是必要性得到证明• 再证方程的充分性,假设平衡方程(21)全部满足,则由于(22)附加条件的第一式,即矩阵 $\boldsymbol{D}$ 的秩 $r=3$,因而空间力系的主矩 $\boldsymbol{L}_0$ 必为零,这只有 $\boldsymbol{R}=0$,或 $\boldsymbol{R}$ 的作用力可通过或平行所有的6根轴 $P_I(I=1,2,\cdots,6)$ 才有可能,但由于前面给出的性质1及附加条件(22)的第二式,后一条件是不可能的,即作用线不可能同时通过或平行这6根轴 $P_I(I=1,2,\cdots,6)$,因此主矢 $\boldsymbol{R}$ 必为零,故以上空间力系平衡,于是平衡方程(21)的充要性也得到证明•

2.2 第二种形式的平衡方程(五力矩一投影方程)

取由矩阵(7)和(8)给出的前5根 $P_I(I=1,2,\cdots,5)$ 和最后一根 P_6,分别作为空间一般力系 $\boldsymbol{F}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的力矩轴和投影轴,则此空间一般力系的第二种新的标量型平衡方程可表为:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} m_I(\boldsymbol{F}_i)=0, \qquad I=1,2,\cdots,5, \\ \sum_{i=1}^{n} F_{6i}=0, \end{cases} \tag{23}$$

其中所取6根轴的参数应满足以下附加条件:

$$r=3, \quad \Delta_5\neq 0• \tag{24}$$

式中行列式 Δ_5 由(13)给出,r 是以下矩阵的秩:

$$\begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ l_5 & m_5 & n_5 \end{bmatrix}•$$

在(24)条件下,方程(23)是空间一般力系 $\boldsymbol{F}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 平衡的充分必要条件• 现在让我们证明这些方程的必要性• 假定给定的力系是平衡的,则 $\boldsymbol{L}_0=\boldsymbol{R}=0$,因此由于附加条件(24)的第一式,力对轴 $P_I(I=1,2,\cdots,5)$ 的力矩和及力对轴 P_6 的投影和分别为零,所以平衡方程(23)成立,于是必要性得到证明• 方程的充分性基于以下考虑,在当条件(23)成立时,假定空间力系不平衡,则力系可简化为一个合力 $\boldsymbol{R}$,它的作用线必同时通过或平行这5根力矩轴 $P_I(I=1,2,\cdots,5)$,并与投影轴 P_6 垂直,但由于前面给出的性质2及附加条件(24)的第二式,这是不可能的,即 $\boldsymbol{R}=0$,因而给定的空间力系不平衡,于是充分性得到证明•

最后指出,在平衡方程(23)中,5力矩轴 $P_I(I=1,2,\cdots,5)$ 的任意两根不能相同,但投影轴 P_6 可与力矩轴的任一根重合,这是 $\Delta_5\neq 0$ 的要求•

2.3 第三种形式的平衡方程(四力矩二投影方程)

取由矩阵(7)和(8)给出的前4根空间直线 $P_I(I=1,2,3,4)$ 和留下的两根空间直线 $P_I(I=5,6)$ 分别作为空间一般力系 $\boldsymbol{F}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的力矩轴和投影轴,则此空间力系的第三种新的标量型平衡方程可表为:

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n} m_I(\boldsymbol{F}_i)=0, & (I=1,2,3,4),\\ \sum_{i=1}^{n} F_{Ii}=0, & (I=5,6),\end{cases} \tag{25}$$

式中所用6根轴的参数应满足以下附加条件:

$$r=3,\quad \Delta_4\neq 0. \tag{26}$$

此处行列式 Δ_4 由(16)给出,而 r 是以下矩阵的秩:

$$\begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1\\ l_2 & m_2 & n_2\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ l_4 & m_4 & n_4\end{bmatrix}.$$

在附加条件(26)下,方程(25)是空间一般力系 $\boldsymbol{F}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 平衡的充分必要条件. 可以指出,必要性和充分性的证明与上面相同,因而这里不再细述. 此外,由于(26)中的条件 $\Delta_4\neq 0$,因而4力矩轴的任何两根不能相同,但两根投影轴 $P_I(I=5,6)$ 可与不同的两根力矩轴重合.

2.4 第四种形式的平衡方程(三力矩三投影方程)

取由矩阵(7)和(8)给出的前3根空间直线 $P_I(I=1,2,3)$ 和留下的3根空间直线 $P_I(I=4,5,6)$ 分别作为空间一般力系 $\boldsymbol{F}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的力矩轴和投影轴,则此空间力系的第四种新的标量型平衡方程可表为:

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n} m_I(\boldsymbol{F}_i)=0, & (I=1,2,3),\\ \sum_{i=1}^{n} F_{Ii}=0, & (I=4,5,6).\end{cases} \tag{27}$$

式中所用6根轴的参数应满足以下附加条件:

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1\\ l_2 & m_2 & n_2\\ l_3 & m_3 & n_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix} l_4 & m_4 & n_4\\ l_5 & m_5 & n_5\\ l_6 & m_6 & n_6\end{vmatrix}\neq 0, \tag{28}$$

上式与以下条件等价:

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1\\ l_2 & m_2 & n_2\\ l_3 & m_3 & n_3\end{vmatrix}\neq 0,\quad \begin{vmatrix} l_4 & m_4 & n_4\\ l_5 & m_5 & n_5\\ l_6 & m_6 & n_6\end{vmatrix}\neq 0. \tag{29}$$

在附加条件(28)下,方程(27)是所给空间一般力系 $\boldsymbol{F}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 平衡的充分必要条件. 方程(27)的必要性与前面一样是明显的. 充分性基于以下考虑,在平衡条件(27)满足时,若假定力系不平衡,则由于条件(29)的第一式,此力系只可能简化为一合力 $\boldsymbol{R}$,它的作用线必须同时通过或平行3根力矩轴 $P_I(I=1,2,3)$ 并与3根投影轴 $P_I(I=4,5,6)$ 垂直,但由性质4及附加条件(28)可知,这是不可能的,因而 $\boldsymbol{R}=0$,即所给力系平衡,于是充分性得到

证明•

最后, 由条件(29)可指出, 在平衡方程(27)中所用的力矩轴 P_I (I = 1, 2, 3) 及投影轴 P_I (I = 4, 5, 6) 应是 3 根不共面的轴, 但 3 根投影轴可与 3 根不同的力矩轴重合• 当以上的力矩轴和投影轴均为笛卡尔坐标系的 3 根轴 (x, y, z) 的特殊情形时, 则以上新的标量型平衡方程 (27) 便退化为现有理论力学教科书中的基本形式的平衡方程[6]•

3 结论

本文给出了空间一般力系的 4 种新的标量型平衡方程, 这是现有理论力学教材结果的推广, 若藉电子计算机的帮助, 则本文的结果可用于解决空间一般力系平衡的复杂问题•

[参考文献]

[1] 罗远祥. 理论力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1984.

[2] 朱照宣. 理论力学[M]. 北京: 北京大学出版社, 1984.

[3] 哈尔滨工业大学理论力学教研组. 理论力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1977.

[4] 洛强斯基, 路尔叶. 理论力学教程[M]. 叶逢培 译. 北京: 高等教育出版社, 1957.

[5] 朱鼎勋. 空间解析几何[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 1991.

[6] 上海交通大学代数组. 线性代数[M]. 北京: 人民教育出版社, 1983.

New Scalar_Type Equilibrium Equations of the General Space Force System

TANG Xin_yan

(Agricultural Engineering College, Nanjing Agricultural University, Nanjing 210032, P R China)

Abstract: Using the principle of analytical geometry, several properties of the space straight line are proved. Based on these properties, the equilibrium of general space force system is considered and its four new scalar_type equilibrium equations are derived which are equivalent to the vector_type necessary and sufficient conditions for equilibrium.

Key words: general space force system; method of analytical geometry; new scalar_type equilibrium equations