文章编号: 1000_0887(2000) 10_1087_06

三维抛物型方程的一族高精度分支稳定显格式*

马明书, 王同科

(河南师范大学 数学系, 河南新乡市 453002)

(张鸿庆推荐)

摘要: 构造了一族解三维抛物型方程的高精度显格式, 其稳定性条件为 $r = \Delta t/\Delta x^2 = \Delta t/\Delta y^2 = \Delta t/\Delta z^2 < 1/2$, 截断误差为 $O(\Delta t^2 + \Delta x^4)$•

关 键 词: 高精度; 显式差分格式; 分支稳定; 三维抛物型方程
中图分类号: O241 文献标识码: A

引 言

在扩散、渗流、热传导等很多领域, 经常会遇到求解抛物型方程问题, 在三维情形, 其模型为如下初边值问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} \qquad (0 < x, y, z < 1;\ t > 0), & (1) \\
u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z) \qquad (0 \leqslant x, y, z \leqslant 1), & (2) \\
u(0, y, z, t) = f_1(y, z, t),\ u(1, y, z, t) = f_2(y, z, t) \qquad (0 \leqslant y, z \leqslant 1;\ t \geqslant 0), & (3) \\
u(x, 0, z, t) = \mu_1(x, z, t),\ u(x, 1, z, t) = \mu_2(x, z, t) \qquad (0 \leqslant x, z \leqslant 1;\ t \geqslant 0), & (4) \\
u(x, y, 0, t) = \gamma_1(x, y, t),\ u(x, y, 1, t) = \gamma_2(x, y, t) \qquad (0 \leqslant x, y \leqslant 1;\ t \geqslant 0)• & (5)
\end{cases}
$$

用差分方法解上述问题, 隐格式计算量很大, 显格式在[1]、[2]中已有研究• 两文中的格式都是高精度(截断误差为 $O(\Delta t^2 + \Delta x^4)$), 但稳定性较差, [1] 是 $r \leqslant 1/6$, [2] 是 $r \leqslant 1/4$• 为维持格式的稳定性, 实际计算时 Δt 必须取得很小, 这也增加了不少的计算工作量• 本文构造的显格式, 保持了上述格式的高精度性, 但将稳定性条件改善为 $r < 1/2$, 计算工作量较[1]、[2] 减少很多•

1 差分格式的构造

设 Δt 为时间步长, Δx, Δy, Δz 依次为 x, y, z 方向空间步长• 为简便起见, 取 $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 1/M$ (M 为正整数)• 用如下的含参数差分方程逼近微分方程(1):

* 收稿日期: 1998_08_03; 修订日期: 2000_06_08
基金项目: 河南省教委自然科学基础研究立项项目(97110007)
作者简介: 马明书(1941—), 男, 河南修武县人, 教授, 研究方向: 偏微分方程数值解法, 已发表论文 20 余篇.

$$
\begin{aligned}
&\Delta_t u_{ijk}^n + \eta_1 \Delta_t u_{ijk}^{n-1} + \eta_2 \Delta_t \left(\frac{1}{2} \diamond u_{ijk}^{n-1} \right) + \eta_3 \Delta_t \boxdot u_{ijk}^{n-1} + \eta_4 \Delta_t \square u_{ijk}^{n-1} = \\
&\quad \eta_5 (\delta_x^2 + \delta_y^2 + \delta_z^2) u_{ijk}^n + \eta_6 (\delta_x^2 + \delta_y^2 + \delta_z^2) u_{ijk}^{n-1} + \eta_7 [\delta_x^2 ({}_x\diamond + {}_x\square) + \\
&\quad \delta_y^2 ({}_y\diamond + {}_y\square) + \delta_z^2 ({}_z\diamond + {}_z\square)] u_{ijk}^n + \eta_8 [\delta_x^2 ({}_x\diamond + {}_x\square) + \delta_y^2 ({}_y\diamond + {}_y\square) + \\
&\quad \delta_z^2 ({}_z\diamond + {}_z\square)] u_{ijk}^{n-1},
\end{aligned} \tag{6}
$$

其中 u_{ijk}^n 表示 u 在节点 $(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t)$ 处的值, Δ_t 是关于 t 的一阶向前差商, δ_x^2、δ_y^2、δ_z^2 是关于 x、y、z 的二阶中心差商

$$
\begin{aligned}
\boxdot u_{ijk}^n = {} & u_{i+1,j+1,k+1}^n + u_{i-1,j+1,k+1}^n + u_{i+1,j+1,k-1}^n + u_{i-1,j+1,k-1}^n + u_{i+1,j-1,k-1}^n + \\
& u_{i-1,j-1,k-1}^n + u_{i+1,j-1,k+1}^n + u_{i-1,j-1,k+1}^n,
\end{aligned}
$$

$$
\diamond u_{ijk}^n = ({}_x\diamond + {}_y\diamond + {}_z\diamond) u_{ijk}^n, \quad \square u_{ijk}^n = ({}_x\square + {}_y\square + {}_z\square) u_{ijk}^n,
$$

$$
{}_x\diamond u_{ijk}^n = u_{i,j+1,k}^n + u_{i,j-1,k}^n + u_{i,j,k+1}^n + u_{i,j,k-1}^n,
$$

$$
{}_x\square u_{ijk}^n = u_{i,j+1,k+1}^n + u_{i,j-1,k+1}^n + u_{i,j+1,k-1}^n + u_{i,j-1,k-1}^n,
$$

其余类推, $\eta_1 \sim \eta_8$ 是待定参数•

将(6)式中各节点上的 u 以其在节点 $(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t)$ 处展开的 Taylor 级数代入, 并利用(1)式, 经整理可得

$$
\begin{aligned}
&(1 + \eta_1 + 6\eta_2 + 8\eta_3 + 12\eta_4) \frac{\partial u}{\partial t} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\eta_1}{2} - 3\eta_2 - 4\eta_3 - 6\eta_4 \right) \Delta t \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \\
&\quad (\eta_2 + 4\eta_3 + 4\eta_4) \Delta x^2 \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial y^2 \partial z^2} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial z^2 \partial x^2} \right) = \\
&\quad (\eta_5 + \eta_6 + 8\eta_7 + 8\eta_8) \frac{\partial u}{\partial t} + \left(\frac{\eta_5}{12} + \frac{\eta_6}{12} + \frac{2\eta_7}{3} + \frac{2\eta_8}{3} \right) \Delta x^2 \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} \right) - \\
&\quad (\eta_6 + 8\eta_8) \Delta t \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 6(\eta_7 + \eta_8) \Delta x^2 \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial z^2 \partial x^2} \right) + \\
&\quad O(\Delta t^2 + \Delta t \Delta x^2 + \Delta x^4) \bullet
\end{aligned}
$$

当下列诸方程

$$
\left.
\begin{aligned}
&1 + \eta_1 + 6\eta_2 + 8\eta_3 + 12\eta_4 = \eta_5 + \eta_6 + 8\eta_7 + 8\eta_8, \\
&1/2 - \eta_1/2 - 3\eta_2 - 4\eta_3 - 6\eta_4 = -\eta_6 - 8\eta_8, \\
&\eta_2 + 4\eta_3 + 4\eta_4 = \eta_5/12 + \eta_6/12 + 2\eta_7/3 + 2\eta_8/3 \bullet \\
&\eta_2 + 4\eta_3 + 4\eta_4 = 3(\eta_7 + \eta_8) \bullet
\end{aligned}
\right\} \tag{7}
$$

同时成立时, (6)式的截断误差可达 $O(\Delta t \Delta x^2 + \Delta t^2 + \Delta x^4)$, 由于 $O(\Delta t \Delta x^4) \leqslant \max\{O(\Delta t^2), O(\Delta x^4)\}$, 这个误差阶实为 $O(\Delta t^2 + \Delta x^4)$ 解(7)式得

$$
\eta_1 = -1 + 16\eta_3 + 12\eta_4 + 18\eta_7 + 18\eta_8, \ \eta_2 = -4\eta_3 - 4\eta_4 + 3\eta_7 + 3\eta_8,
$$

$$
\eta_5 = 1 + 10\eta_7 + 18\eta_8, \ \eta_6 = -1 + 18\eta_7 + 10\eta_8 \bullet
$$

将以上各值代入(6)式, 注意到

$$
\delta_{x_x}^2 \diamond u_{ijk}^n = -2_x \diamond u_{ijk}^n + {}_y\square u_{ijk}^n + {}_z\square u_{ijk}^n,
$$

$$
\delta_{x_x}^2 \square u_{ijk}^n = -2_x \square u_{ijk}^n + \boxdot u_{ijk}^n \bullet
$$

其余类推, 可得如下的四参数三层高精度显式差分格式

$$
u_{ijk}^{n+1} = \mathscr{L} u_{ijk}^n + \mathscr{F} u_{ijk}^{n-1}, \tag{8}
$$

其中

$$
\mathscr{L} u_{ijk}^n = (2 - 16\eta_3 - 12\eta_4 - 18\eta_7 - 18\eta_8 - 60r\eta_7 - 108r\eta_8 - 6r) u_{ijk}^n +
$$

$$(4\eta_3 - 3\eta_7 - 3\eta_8 + 4\eta_4 + 6r\eta_7 + 18r\eta_8 + r)\left(\frac{1}{2}\Diamond u_{ijk}^n\right) +$$
$$(-\eta_3 + 3r\eta_7)\boxdot u_{ijk}^n - \eta_4 \Box u_{ijk}^n,$$
$$\mathscr{F} u_{ijk}^{n-1} = (16\eta_3 + 12\eta_4 + 18\eta_7 + 18\eta_8 - 108r\eta_7 - 60r\eta_8 + 6r - 1)u_{ijk}^{n-1} +$$
$$(-4\eta_3 - 4\eta_4 + 3\eta_7 + 3\eta_8 + 18r\eta_7 + 6r\eta_8 - r)\left(\frac{1}{2}\Diamond u_{ijk}^{n-1}\right) +$$
$$(\eta_3 + 3r\eta_8)\boxdot u_{ijk}^{n-1} + \eta_4 \Box u_{ijk}^{n-1},$$

其中 $r = \Delta t/\Delta x^2$.

2 稳定性分析

与(8)等价的两层方程组为

$$u_{ijk}^{n+1} = \mathscr{L} u_{ijk}^n + \mathscr{F} v_{ijk}^n,\quad v_{ijk}^{n+1} = u_{ijk}^n. \tag{9}$$

根据稳定性分析的 Fourier 方法, 令

$$u_{ijk}^n = u^n \exp[\mathrm{i}(i\theta + j\varphi + k\psi)],\quad v_{ijk}^n = v^n \exp[\mathrm{i}(i\theta + j\varphi + k\psi)], \tag{10}$$

其中 $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$, 经计算可知

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2}\Diamond u_{ijk}^n = (6 - 4s_1)u_{ijk}^n,\\ &\boxdot u_{ijk}^n = (8 - 4s_2)u_{ijk}^n,\\ &\Box u_{ijk}^n = (12 - 4s_3)u_{ijk}^n. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

其中

$$s_1 = \sin^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\varphi}{2} + \sin^2\frac{\psi}{2} \in [0, 3],$$
$$s_2 = \sin^2\frac{\theta+\varphi+\psi}{2} + \sin^2\frac{\varphi+\psi-\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta+\varphi-\psi}{2} + \sin^2\frac{\varphi-\theta-\psi}{2} \in [0, 4],$$
$$s_3 = \sin^2\frac{\theta+\varphi}{2} + \sin^2\frac{\varphi+\psi}{2} + \sin^2\frac{\psi+\theta}{2} + \sin^2\frac{\varphi-\psi}{2} + \sin^2\frac{\theta-\varphi}{2} + \sin^2\frac{\psi-\theta}{2} \in [0, 6].$$

将(10)式代入(9)式并利用(11)式可得

$$\begin{bmatrix} u^{n+1} \\ v^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u^n \\ v^n \end{bmatrix} = \boldsymbol{G}(s_1, s_2, s_3)\begin{bmatrix} u^n \\ v^n \end{bmatrix},$$

其中

$$g_{11} = 2 - 16\eta_3 - 12\eta_4 - 18\eta_7 - 18\eta_8 - 60r\eta_7 - 108r\eta_8 - 6r +$$
$$(4\eta_3 + 4\eta_4 - 3\eta_7 - 3\eta_8 + 6r\eta_7 + 18r\eta_8 + r)(6 - 4s_1) +$$
$$(-\eta_3 + 3r\eta_7)(8 - 4s_2) - \eta_4(12 - 4s_3),$$
$$g_{12} = -1 + 16\eta_3 + 12\eta_4 + 18\eta_7 + 18\eta_8 - 108r\eta_7 - 60r\eta_8 + 6r +$$
$$(-4\eta_3 - 4\eta_4 + 3\eta_7 + 3\eta_8 + 18r\eta_7 + 6r\eta_8 - r)(6 - 4s_1) +$$
$$(\eta_3 + 3r\eta_8)(8 - 4s_2) + \eta_4(12 - 4s_3),$$
$$g_{21} = 1,\ g_{22} = 0.$$

传播矩阵 $\boldsymbol{G}$ 的特征方程为

$$\lambda^2 - g_{11}\lambda - g_{12} = 0. \tag{12}$$

引理 1[3] 实系数二次方程(12)的两根按模小于等于 1 的充要条件是

$$|g_{11}| \leqslant 1 - g_{12} \leqslant 2.$$

引理 2[3] 差分格式(9)或(8)稳定，即矩阵族 $\boldsymbol{G}^n(s_1, s_2, s_3)((s_1, s_2, s_3) \in [0, 3] \times [0, 4] \times [0, 6], n = 1, 2, \cdots)$ 一致有界的充要条件是

1) $|\lambda_{1,2}| \leqslant 1$（$\lambda_{1,2}$ 是(12)式的根）;

2) 使 $1 - \frac{1}{4}g_{11}^2 = g_{11}^2 + 4g_{12} = 0$ 成立的(s_1, s_2, s_3)或者不存在，或者不属于区域$[0, 3] \times [0, 4] \times [0, 6]$.

定理 1 差分格式(9)稳定的一个充分条件是

$$\left.\begin{aligned} &\eta_3 + 3r\eta_8 \leqslant \min\{0, (1 - 6r)/16\}, \ \eta_4 \leqslant 0, \\ &0 < \eta_7 + \eta_8 \leqslant [4(\eta_3 + 3r\eta_8) + 4\eta_4 + r]/(3 + 18r). \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

证明 当 $g_{12} \neq -1$ 时，$1 - \frac{1}{4}g_{11}^2 = g_{11}^2 + 4g_{12} = 0$ 对任何的(s_1, s_2, s_3)均不成立. 根据引理 1 和引理 2 知，格式(9)稳定的条件变为

$$-1 + g_{12} \leqslant g_{11} \leqslant 1 - g_{12} < 2.$$

由 $g_{11} \leqslant 1 - g_{12}$ 得$(8s_1 + s_2)(\eta_7 + \eta_8) \geqslant 0$，故有

$$\eta_7 + \eta_8 \geqslant 0. \tag{14}$$

由 $1 - g_{12} < 2$ 得

$$\begin{aligned} -9(\eta_7 + \eta_8) + s_1[3(1 + 6r)(\eta_7 + \eta_8) - 4(\eta_3 + 3r\eta_8) - 4\eta_4 - r] + \\ s_2(\eta_3 + 3r\eta_8) + s_3\eta_4 < 0. \end{aligned}$$

此式成立的一个充分条件是

$$\begin{cases} \eta_7 + \eta_8 > 0, & (15) \\ 3(1 + 6r)(\eta_7 + \eta_8) - 4(\eta_3 + 3r\eta_8) - 4\eta_4 - r \leqslant 0, & (16) \\ \eta_3 + 3r\eta_8 \leqslant 0, & (17) \\ \eta_4 \leqslant 0. & (18) \end{cases}$$

由 $-1 + g_{12} \leqslant g_{11}$ 得

$$\begin{aligned} 18(\eta_7 + \eta_8) + 2s_1[r - 3(1 + 2r)(\eta_7 + \eta_8) + 4\eta_4 + 4(\eta_3 + 3r\eta_8)] + \\ s_2[3r(\eta_7 + \eta_8) - 2(\eta_3 + 3r\eta_8)] - 2s_3\eta_4 \leqslant 1. \end{aligned} \tag{19}$$

注意到(15)式~(18)式以及 s_1, s_2, s_3 的取值范围知，若

$$\begin{aligned} 18(\eta_7 + \eta_8) + 6[r - 3(1 + 2r)(\eta_7 + \eta_8) + 4\eta_4 + 4(\eta_3 + 3r\eta_8)] + \\ 4[3r(\eta_7 + \eta_8) - 2(\eta_3 + 3r\eta_8)] - 12\eta_4 \leqslant 1, \end{aligned}$$

即

$$6r - 24r(\eta_7 + \eta_8) + 16(\eta_3 + 3r\eta_8) + 12\eta_4 \leqslant 1. \tag{20}$$

成立时(19)式必成立. 注意到(15)与(18)两式，知(20)式成立的一个充分条件是 $6r + 16(\eta_3 + 3r\eta_8) \leqslant 1$，即

$$\eta_3 + 3r\eta_8 \leqslant (1 - 6r)/16. \tag{21}$$

由(16)式得

$$\eta_7 + \eta_8 \leqslant [4(\eta_3 + 3r\eta_8) + 4\eta_4 + r]/(3 + 18r). \tag{22}$$

综合(15)、(17)、(18)、(21)与(22)五式，即证得本定理.

3 参数的选取与差分格式的确定

参数 $\eta_3, \eta_4, \eta_7, \eta_8$ 应选取使其满足(13)式，现提供下列两种方法:

Ⅰ) 当 $1 - 6r \geqslant 0$ 即 $r \leqslant 1/6$ 时，根据条件(13)的第一式，应有 $\eta_3 + 3r\eta_8 \leqslant 0$，为确定起见，

取 $\eta_3+3r\eta_8=0$; 根据条件(13) 的第三式得 $0<\eta_7+\eta_8\leqslant(4\eta_4+r)/(3+18r)$, 为确定起见取 $\eta_7+\eta_8=(4\eta_4+r)/(3+18r)$, 尚需 $4\eta_4+r>0$; 注意到条件(13) 的第二式, 应有 $-r/4<\eta_4\leqslant 0$• 于是得

定理 2 在差分格式(8) 中, 若取

$\eta_3+3r\eta_8=0,\ \eta_7+\eta_8=(4\eta_4+r)/(3+18r),\ \eta_4=\eta$•

则得如下一族三层显格式

$$u_{ijk}^{n+1}=\frac{2-56r^2-8(3+10r)\eta}{1+6r}u_{ijk}^n+\frac{8r^2+4(2r-1)\eta}{1+6r}\left(\frac{1}{2}\diamond u_{ijk}^n\right)+\frac{r^2+4r\eta}{1+6r}\boxdot u_{ijk}^n-\eta\square u_{ijk}^n+\frac{6r-1+24(1-6r)\eta}{1+6r}u_{ijk}^{n-1}+4\eta\left(\frac{1}{2}\diamond u_{ijk}^{n-1}\right)+\eta\square u_{ijk}^{n-1}, \tag{23}$$

它当 $r\leqslant 1/16,\ -r/4<\eta\leqslant 0$ 时稳定, 截断误差为 $O(\Delta t^2+\Delta x^4)$•

II) 当 $1-6r\leqslant 0$, 即 $r\geqslant 1/6$ 时, 根据条件(13) 的第一式应有 $\eta_3+3r\eta_8\leqslant(1-6r)/16$, 为确定起见, 取 $\eta_3+3r\eta_8=(1-6r)/16$; 根据条件(13) 的第三式得 $0<\eta_7+\eta_8\leqslant(1-2r+16\eta_4)/(12+72r)$, 为确定起见, 取 $\eta_7+\eta_8=(1-2r+16\eta_4)/(12+72r)$, 尚需 $1-2r+16\eta_4>0$, 即 $16\eta_4>2r-1$; 根据条件(13) 的第二式得 $r<1/2,\ (2r-1)/16<\eta_4\leqslant 0$• 于是有

定理 3 在差分格式(8) 中, 若取

$\eta_3+3r\eta_8=(1-6r)/16,\ \eta_7+\eta_8=(1-2r+16\eta_4)/(12+72r),\ \eta_4=\eta,$

则得如下一族三层显格式

$$u_{ijk}^{n+1}=\frac{20r^2+8r-1-16(3+10r)\eta}{2(1+6r)}u_{ijk}^n+\frac{2r-4r^2+4(2r-1)\eta}{1+6r}\left(\frac{1}{2}\diamond u_{ijk}^n\right)+\frac{28r^2+4r-1+16r\eta}{16(1+6r)}\boxdot u_{ijk}^n-\eta\square u_{ijk}^n+\frac{36r^2-24r+3+48(1-6r)\eta}{2(1+6r)}u_{ijk}^{n-1}+4\eta\left(\frac{1}{2}\diamond u_{ijk}^{n-1}\right)+\frac{1-6r}{16}\boxdot u_{ijk}^{n-1}+\eta\square u_{ijk}^{n-1}• \tag{24}$$

它当 $1/6\leqslant r<1/2,\ (2r-1)/16<\eta\leqslant 0$ 时稳定, 截断误差为 $O(\Delta t^2+\Delta x^4)$• 联合使用格式(23)、(24), 则对任意 $0<r<1/2$ 就构成了一族稳定的且截断误差为 $O(\Delta t^2+\Delta x^4)$ 的三层显格式• 由于当 $r=1/6$ 时, 两格式化为同一格式, 故称它们为一族分支稳定的显格式•

4 数 值 例 子

考虑初边值问题

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, && (0<x,y,z<1;\ t>0),\\
&u(x,y,z,0)=\sin(x+y+z), && (0\leqslant x,y,z\leqslant 1),\\
&u(0,y,z,t)=\exp(-3t)\sin(y+z), && \\
&u(1,y,z,t)=\exp(-3t)\sin(1+y+z), && (0\leqslant y,z\leqslant 1;\ t\geqslant 0),\\
&u(x,0,z,t)=\exp(-3t)\sin(x+z), && \\
&u(x,1,z,t)=\exp(-3t)\sin(x+1+z), && (0\leqslant x,z\leqslant 1;\ t\geqslant 0),\\
&u(x,y,0,t)=\exp(-3t)\sin(x+y), && \\
&u(x,y,1,t)=\exp(-3t)\sin(x+y+1), && (0\leqslant x,y\leqslant 1;\ t\geqslant 0)•
\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

取 $\Delta x=\Delta y=\Delta z=1/10,\ \Delta t=r\Delta x^2=r/100,\ r=1/8,1/4,3/8,1/2$ 来计算• 用(25) 式的精确解 $u(x,y,z,t)=\exp[-3t]\sin(x+y+z)$ 计算第一层的值 u_{ijk}^1, 然后按格式(23)、(24)(均

取 $\eta=0$) 计算到 $n=200$ 时数据结果如表 1•

表 1

(i, j, k)	$r=1/8$		$r=1/4$		$r=3/8$		$r=1/2$	
	精确解	格式(23)	精确解	格式(24)	精确解	格式(24)	精确解	格式(24)
(1,1,1)	0.139 594	0.139 594	0.065 940	0.065 940	0.031 147	0.031 147	0.014 713	0.014 729
(3,3,3)	0.370 018	0.370 017	0.174 784	0.174 784	0.082 562	0.082 562	0.039 000	0.039 156
(5,5,5)	0.471 184	0.471 183	0.222 571	0.222 571	0.105 135	0.105 135	0.049 662	0.049 919
(7,7,7)	0.407 751	0.407 751	0.192 608	0.192 608	0.090 981	0.090 981	0.042 977	0.043 142
(9,9,9)	0.201 880	0.201 880	0.095 361	0.095 361	0.045 045	0.045 045	0.021 278	0.021 298

由表看出: 数值结果与理论分析完全一致• 另外, 虽然 $r=1/2$ 不满足稳定条件, 但计算结果仍然稳定, 只是精度低了些•

[参 考 文 献]

[1] 曾文平. 三维抛物型方程的一个新的高精度显式差分格式[J]. 工科数学, 1992, **18**(4): 20—25.
[2] 马明书. 解三维抛物型方程的一个新的高精度显格式[J]. 应用数学和力学, 1998, **19**(5): 465—469.
[3] 金承日. 解抛物型方程的高精度显式差分格式[J]. 计算数学, 1991, **13**(1): 38—44.

A Family of High_Order Accuracy Explicit Difference Schemes With Branching Stability for Solving 3_D Parabolic Partial Differential Equation

MA Ming_shu, Wang Tong_ke
(Department of Mathematics, Henan Normal University, Xinxiang, Henan 453002, P R China)

Abstract: A family of high_order accuracy explict difference schemes for solving 3_dimension parabolic P.D.E. is constructed. The stability condition is $r=\Delta t/\Delta x^2=\Delta t/\Delta y^2=\Delta t/\Delta z^2<1/2$, and the truncation error is $O(\Delta t^2+\Delta x^4)$.

Key words: high_order accuracy; explicit difference scheme; branching stability; 3_D parabolic P.D.E.