

文章编号: 1000-0887(2000) 09-0881-09

# 变厚度夹层截顶扁锥壳的非线性稳定性分析<sup>\*</sup>

徐加初<sup>1</sup>, 王 乘<sup>1</sup>, 刘人怀<sup>2</sup>

(1 华中理工大学 力学系, 武汉 430074; 2 暨南大学 应用力学研究所, 广州 510632)

(本刊编委刘人怀来稿)

摘要: 对具有变厚度夹层截顶扁锥壳的非线性稳定问题进行了研究。利用变分原理导出表层为等厚度而夹心为变厚度的夹层截顶扁锥壳的非线性稳定问题的控制方程和边界条件, 采用修正迭代法求得了具有双曲型变厚度夹层截顶扁锥壳的非线性稳定性问题的解析解, 得到了内边缘与一刚性中心固结而外边缘为可移夹紧固支的变厚度夹层截顶扁锥壳临界屈曲载荷的解析表达式, 讨论了几何参数和物理参数对壳体屈曲行为的影响

关键词: 变厚度夹层截顶扁锥壳; 非线性稳定性; 修正迭代法

中图分类号: O343.9 文献标识码: A

## 引 言

夹层板壳由于具有重量轻、刚度大等优良性能而成为航空、航天和海洋工程的重要结构元件。近年来, 众多学者在等厚度夹层板壳的非线性研究方面已取得了一些成果, 其中 Reissner<sup>[1]</sup>, Yu<sup>[2]</sup>, Kan<sup>[3]</sup>, Struk<sup>[4]</sup>, 刘人怀<sup>[5-11]</sup> 等分别对夹层矩形板、夹层圆形板、夹层环形板和夹层扁壳的非线性弯曲和非线性振动问题进行了研究。

由于对减轻重要的需要以及结构性能上的要求, 变厚度夹层板壳常用于飞行器结构中。在以往有关变厚度夹层板壳问题的研究中, 仅有 Paydar 和 Libove<sup>[12]</sup>, Paydar<sup>[13]</sup>, Lu 和 Libove<sup>[14]</sup>, Jeon 和 Hong<sup>[15]</sup> 等对变厚度夹层矩形板的线性问题进行过研究。有关变厚度夹层壳的非线性问题尚无人涉及。

本文研究的夹层截顶扁锥壳是由两个薄的等厚度表层和一个厚而软的变厚度夹心组成。在对壳体的变形进行分析时, 采用类似 Reissner<sup>[1]</sup> 假设, 即假定表层处于薄膜应力状态, 夹心横向不压缩, 夹心只能承受横向载荷作用, 壳的中面的法线变形时保持为直线。基于这一假设, 本文应用变分原理建立变厚度夹层扁锥壳在均布横向压力作用下的非线性稳定性理论, 采用修正迭代法<sup>[16-18]</sup> 对夹心具有双曲型变厚度的夹层截顶扁锥壳在内边缘与一刚性中心固结而外边缘为可移夹紧固支情况下的非线性稳定问题进行了分析, 所有的结果以曲线的形式给出。

## 1 基本方程

考虑一均布横向压力  $q$  作用下, 外半径为  $a$ , 内半径为  $b$ , 锥体斜角为  $\alpha$  的变厚度夹层载顶

\* 收稿日期: 1999\_07\_05; 修订日期: 2000\_05\_25

作者简介: 徐加初(1964—), 湖南人, 博士。

刘人怀(1940—), 成都人, 教授, 博导, 中国工程院院士。

扁锥壳(如图1所示),其夹心的厚度为 $h$ , $h$ 是径向坐标 $r$ 的函数,表层的厚度为 $t$ ( $t \ll h_{\min}$ )。以 $r$ 表示径向坐标, $\theta$ 表示周向坐标, $z$ 表示夹层壳内任一点到中面的距离,下标1,2,3分别对应上层、夹心和下表层。

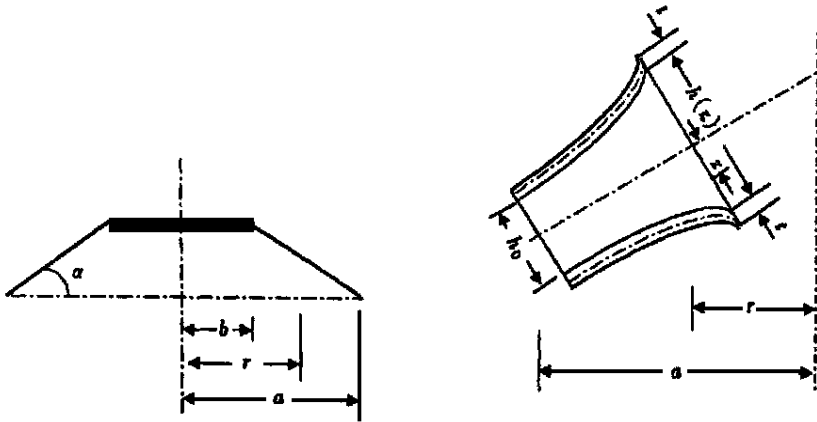


图1 变厚度夹层截顶扁锥壳的几何尺寸

设 $u_i, v_i$ 和 $w_i$ ( $i = 1, 2, 3$ )分别是上层、夹心和下表层的径向位移、周向位移和轴向位移, $u$ 和 $w$ 是中面上的径向位移和挠度。在轴对称条件以及对变形所做的上述假设下,夹层扁壳内任一点的位移可近似表示成:

$$u_1 = u + \frac{1}{2}h\phi, \quad v_1 = 0, \quad w_1 = w, \quad (1)$$

$$u_3 = u - \frac{1}{2}h\phi, \quad v_3 = 0, \quad w_3 = w, \quad (2)$$

$$u_2 = u + z\phi, \quad v_2 = 0, \quad w_2 = w, \quad (3)$$

这里 $\phi$ 是壳体未变形中面的法向转角。

设 $\epsilon_{ri}, \epsilon_{\theta i}, \epsilon_{zi}, \gamma_{\theta i}$ 和 $\gamma_{zi}$ ( $i = 1, 2, 3$ )是夹层截顶扁锥壳内任一点的应变,则应变位移关系为:

$$\epsilon_i = \frac{du_i}{dr} + \frac{dw_i}{dr} \left[ \alpha + \frac{1}{2} \frac{dw_i}{dr} \right], \quad \epsilon_{\theta i} = \frac{u_i}{r},$$

$$\epsilon_{zi} = \gamma_{r\theta i} = \gamma_{\theta z i} = \gamma_{rz i} = 0 \quad (i = 1, 3), \quad (4)$$

$$\gamma_{rz2} = \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{dw_2}{dr}, \quad \epsilon_2 = \epsilon_{\theta 2} = \gamma_{r\theta 2} = \gamma_{\theta z 2} = 0 \quad (5)$$

将式(1)~(3)代入(4)和(5)中,我们得到上层:

$$\epsilon_1 = \frac{du}{dr} + \frac{h}{2} \frac{d\phi}{dr} + \frac{\phi}{2} \frac{dh}{dr} + \frac{dw}{dr} \left[ \alpha + \frac{1}{2} \frac{dw}{dr} \right], \quad \epsilon_{\theta 1} = \frac{u}{r} + \frac{h}{2} \frac{\phi}{r}. \quad (6)$$

下表层:

$$\epsilon_3 = \frac{du}{dr} - \frac{h}{2} \frac{d\phi}{dr} - \frac{\phi}{2} \frac{dh}{dr} + \frac{dw}{dr} \left[ \alpha + \frac{1}{2} \frac{dw}{dr} \right], \quad \epsilon_{\theta 3} = \frac{u}{r} - \frac{h}{2} \frac{\phi}{r}. \quad (7)$$

夹心:

$$\gamma_{rz2} = \phi + \frac{dw}{dr}. \quad (8)$$

设 $\sigma_i, \alpha_{\theta i}, \alpha_{zi}, \tau_{\theta i}, \tau_{\theta z i}$ 和 $\alpha_{\theta z i}$ ( $i = 1, 2, 3$ )分别是上层、夹心和下表层内任一点的应力, $E$ 和 $\nu$ 分别是表层材料的弹性模量和泊松比; $G_2$ 是夹心的横向剪切模量。将式(6)~(8)代入

下列 Hooke 定律:

$$\alpha_{ri} = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_i + \nu\epsilon_{0i}), \quad \alpha_{0i} = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_{0i} + \nu\epsilon_i), \quad \alpha_{zi} = \tau_{r0i} = \tau_{0zi} = \tau_{rzi} = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (9)$$

$$\tau_{rz2} = G_2 \gamma_{rz2}, \quad \alpha_{r2} = \sigma_{02} = \alpha_{z2} = \gamma_{0z2} = \gamma_{r02} = 0 \quad (10)$$

我们得到

上层表:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{r1} &= \alpha_{r0} + \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \left( \frac{d\phi}{dr} + \frac{\nu}{r}\phi + \frac{d \ln h}{dr} \phi \right), \\ \alpha_{01} &= \alpha_{00} + \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \left( \frac{\phi}{r} + \nu \frac{d\phi}{dr} + \nu \frac{d \ln h}{dr} \phi \right). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

下层表:

$$\alpha_{r3} = \alpha_{r0} - \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \left( \frac{d\phi}{dr} + \frac{\nu}{r}\phi + \frac{d \ln h}{dr} \phi \right), \quad \alpha_{03} = \alpha_{00} - \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \left( \frac{\phi}{r} + \nu \frac{d\phi}{dr} + \nu \frac{d \ln h}{dr} \phi \right) \quad (12)$$

夹心:

$$\gamma_{rz2} = G_2 \left( \phi + \frac{dw}{dr} \right). \quad (13)$$

这里  $\alpha_{r0}$  和  $\alpha_{00}$  分别是中面上的径向应力和周向应力,

$$\alpha_{r0} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} + \frac{dw}{dr} \left( \alpha + \frac{1}{2} \frac{dw}{dr} \right) \right], \quad \alpha_{00} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} + \nu \frac{dw}{dr} \left( \alpha + \frac{1}{2} \frac{dw}{dr} \right) \right] \quad (14)$$

弹性体的变形能  $U$  为

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V (\alpha_r \epsilon_r + \alpha_0 \epsilon_0 + \alpha_z \epsilon_z + \tau_{r0} \gamma_{r0} + \tau_{0z} \gamma_{0z} + \tau_{rz} \gamma_{rz}) r dr d\theta dz \quad (15)$$

由此可得到表层和夹心的应变能公式为

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{2E} \iiint_{V_1} [(\alpha_{r1} + \alpha_{01})^2 - 2(1+\nu)\alpha_{r1}\alpha_{01}] r dr d\theta \quad (i = 1, 3), \\ U_2 &= \frac{1}{2G_2} \iiint_{V_2} \tau_{rz2}^2 r dr d\theta. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

横向载荷的外力功为

$$V = \iint_S qvr dr d\theta \quad (17)$$

应用势能原理, 我们有

$$\delta(U_1 + U_2 + U_3 - V) = 0 \quad (18)$$

经过一系列代入和进行变分、分部积分运算, 我们得到均布横向载荷作用下夹层截顶扁锥壳大挠度理论的平衡方程

$$\alpha_{00} - \frac{d}{dr}(r\alpha_{r0}) = 0, \quad (19)$$

$$2t \frac{d}{dr} \left[ r\alpha_{r0} \left( \alpha + \frac{dw}{dr} \right) \right] + G_2 \frac{d}{dr} \left[ hr \left( \phi + \frac{dw}{dr} \right) \right] + qr = 0, \quad (20)$$

$$D \left\{ r \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\phi) + \left[ \frac{d}{dr} \left( r \frac{d \ln h}{dr} \right) - r \left( \frac{d \ln h}{dr} \right)^2 - 2\nu \frac{d \ln h}{dr} \right] \phi + \right.$$

$$r \left\{ \frac{d\phi}{dr} + \frac{d \ln h}{dr} \phi + \frac{\nu \phi}{r} \right\} \frac{d \ln D}{dr} - G_2 h r \left( \phi + \frac{dw}{dr} \right) = 0 \quad (21)$$

以及边界条件

当  $r = b$  或  $r = a$  时,

$$tr\sigma_0 = 0 \text{ 或 } \delta u = 0, \quad 2tr\sigma_0 \left( \alpha + \frac{dw}{dr} \right) + G_2 h r \left( \phi + \frac{dw}{dr} \right) = 0 \text{ 或 } \delta w = 0, \quad (22)$$

$$Dr \left\{ \frac{dw}{dr} + \frac{d \ln h}{dr} \phi + \frac{\nu \phi}{r} \right\} = 0 \text{ 或 } \delta \phi = 0,$$

式中  $D = Eth^2/2(1 - \nu^2)$ .

从方程(14)中消去  $u$ , 我们得到下列相容方程

$$\sigma_0 - \frac{d}{dr}(r\sigma_0) + \nu \left[ \frac{d}{dr}(r\sigma_0) - \sigma_0 \right] - E \frac{dw}{dr} \left( \alpha + \frac{1}{2} \frac{dw}{dr} \right) = 0 \quad (23)$$

将方程(19)代入(23)中, 我们得到

$$r \frac{d^2}{dr^2}(r\sigma_0) + \frac{d}{dr}(r\sigma_0) - \sigma_0 + E \frac{dw}{dr} \left( \alpha + \frac{1}{2} \frac{dw}{dr} \right) = 0 \quad (24)$$

方程(20)对  $r$  积分一次并解出  $\phi$ , 我们得到

$$\phi = - \frac{2t}{G_2 h} \sigma_0 \left( \alpha + \frac{dw}{dr} \right) - \frac{q(r^2 - b^2)}{2G_2 h r} - \frac{dw}{dr}. \quad (25)$$

式(25)代入方程(21), 我们得到

$$\begin{aligned} D \left\{ r \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dw}{dr} + \left[ \frac{d}{dr} \left( r \frac{d \ln h}{dr} \right) - r \left( \frac{d \ln h}{dr} \right)^2 - 2\nu \frac{d \ln h}{dr} \right] \frac{dw}{dr} + \right. \\ \left. \left[ r \frac{d^2 w}{dr^2} + \left( r \frac{d \ln h}{dr} + \nu \right) \frac{dw}{dr} \right] \frac{\ln D}{dr} + \frac{2t}{G_2} \left[ r \frac{d}{dt} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \frac{\sigma_0}{h} \left( \alpha + \frac{dw}{dr} \right) + \right. \right. \\ \left. \left[ \frac{d}{dr} \left( r \frac{d \ln h}{dr} \right) - r \left( \frac{d \ln h}{dr} \right)^2 - 2\nu \frac{d \ln h}{dr} \right] \frac{\sigma_0}{h} \left( \alpha + \frac{dw}{dr} \right) + \left[ r \frac{d}{dr} \frac{\sigma_0}{h} \left( \alpha + \frac{dw}{dr} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. \left[ r \frac{d \ln h}{dr} + \nu \right] \frac{\sigma_0}{h} \left( \alpha + \frac{dw}{dr} \right) \right] \frac{d \ln D}{dr} \right\} + \frac{q}{2G_2} \left[ r \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{r^2 - b^2}{h} \right) + \right. \\ \left. \left[ \frac{d}{dr} \left( r \frac{d \ln h}{dr} \right) - r \left( \frac{d \ln h}{dr} \right)^2 - 2\nu \frac{d \ln h}{dr} \right] \left( \frac{r^2 - b^2}{hr} \right) + \left[ r \frac{d}{dr} \left( \frac{r^2 - b^2}{hr} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. \left[ r \frac{d \ln h}{dr} + \nu \right] \left( \frac{r^2 - b^2}{hr} \right) \right] \frac{d \ln h}{dr} \right\} - 2tr\sigma_0 \left( \alpha + \frac{dw}{dr} \right) - \frac{1}{2} q(r^2 - b^2) = 0 \quad (26) \end{aligned}$$

方程(24)和(26)就是变厚度夹层扁锥壳在均匀横向载荷作用下非线性稳定问题的控制方程。

## 2 双曲型变厚度的夹层扁锥壳大挠度方程

当夹心的厚度为双曲型变厚度时, 夹心的厚度  $h(r)$  可写成

$$h(r) = h_0 \left( \frac{a}{r} \right)^\lambda. \quad (27)$$

这里  $h_0$  是夹层扁锥壳外边缘  $r = a$  处夹心的厚度,  $\lambda$  是夹心厚度变化参数。

将式(27)代入方程(26), 我们得到

$$\begin{aligned} r^2 \frac{d^3 w}{dr^3} + (1 - 2\lambda) r \frac{d^2 w}{dr^2} + (\lambda^2 - 1) \frac{dw}{dr} = \\ \frac{2t}{D_0 a^{2\lambda}} 2^{\lambda+2} \sigma_0 \left( \alpha + \frac{dw}{dr} \right) - \frac{2t}{G_2 h_0 a^\lambda} \left[ r^2 \frac{d^2}{dr^2} + \right. \end{aligned}$$

$$(1 - 2\lambda)r \frac{d^2}{dr^2} + \lambda^2 - 1 \Big] r^{\lambda-1} \sigma_0 \left[ \alpha + \frac{dw}{dr} \right] + \frac{q}{2D_0 a} 2N^{2\lambda-1} (r^2 - b^2). \quad (28)$$

方程(24),可重新写成

$$r^2 \frac{d^2(r\sigma_{r0})}{dr^2} + r \frac{d(r\sigma_{r0})}{dr} - r\sigma_{r0} = -Er \frac{dw}{dr} \left[ \alpha + \frac{1}{2} \frac{dw}{dr} \right]. \quad (29)$$

其中  $D_0 = Eth_0^2/2(1 - \nu^2)$ .

方程(28)和(29)就是具有双曲型变厚度夹层扁锥壳的大挠度问题基本方程.

考虑变厚度截顶扁锥壳的外边缘为可移夹紧固定,内边缘与一刚性中心固结,因此,边界条件可表示成

$$\text{当 } r = b \text{ 时, } \psi = 0, u = 0. \quad (30)$$

$$\text{当 } r = a \text{ 时, } w = 0, \psi = 0, r\sigma_{r0} = 0. \quad (31)$$

其中

$$u = \frac{1}{E} \left[ r \frac{dr\sigma_{r0}}{dr} - vr\sigma_{r0} \right]. \quad (32)$$

为了方便,引进下列量纲为一的参量

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{r}{a}, \quad W = \sqrt{2(1 - \nu^2)} \frac{w}{h_0}, \quad \Phi = k_1 + \frac{dW}{d\rho}, \quad S = \frac{2ta}{D_0} r\sigma_{r0}, \\ P &= \sqrt{2(1 - \nu^2)} \frac{qa^4}{2D_0 h_0^3}, \quad k = \frac{D_0}{G_2 h_0 a^2}, \quad k_1 = \sqrt{2(1 - \nu^2)} \frac{a}{h_0} \alpha, \\ \rho_0 &= \frac{b}{a}. \end{aligned} \quad (33)$$

利用上述量纲为一的参量,方程(28)、(29)以及边界条件(30)和(31)转化成量纲为一的形式

$$L_1(\Phi) = (\rho^{\lambda-3} - kL_1)(\rho^{\lambda-2}S\Phi) + k_1(\lambda^2 - 1) + \rho^{2\lambda-1}(\rho^2 - \rho_0^2)P, \quad (34)$$

$$L_2(S) = -\rho(\Phi^2 - k_1^2), \quad (35)$$

$$\text{当 } \rho = \rho_0 \text{ 时, } k\rho^{\lambda-1}[S\Phi + (\rho^2 - \rho_0^2)P] + \Phi - k_1 = 0, \quad \rho \frac{dS}{d\rho} - \nu S = 0, \quad (36)$$

$$\text{当 } \rho = 1 \text{ 时, } k\rho^{\lambda-1}[S\Phi + (\rho^2 - \rho_0^2)P] + \Phi - k_1 = 0, \quad S = 0, \quad (37)$$

其中  $L_1$  和  $L_2$  是微分算子

$$L_1 = \rho^2 \frac{d^2}{d\rho^2} + (1 - 2\lambda)\rho \frac{d}{d\rho} + (\lambda^2 - 1),$$

$$L_2 = \rho^2 \frac{d^2}{d\rho^2} + \rho \frac{d}{d\rho} - 1. \quad (38)$$

### 3 非线性边值问题的求解

我们利用修正迭代法求非线性边值问题(34)~(37)的近似解,选取夹层截顶扁锥壳内边缘处的量纲为一的挠度  $W_0 = W|_{\rho=\rho_0}$  作为迭代参数

$$W_0 = - \int_{\rho_0}^1 (\Phi - k_1) d\rho \quad (39)$$

在一次近似中,略去方程(34)中的非线性项  $S\Phi$ ,得到下列线性边值问题:

$$L_1(\Phi_1) = k_1(\lambda^2 - 1) + P\rho^{2\lambda-1}(\rho^2 - \rho_0^2), \quad (40)$$

$$L_2(S) = -\rho(\Phi_1 - k_1^2). \quad (41)$$

$$\text{当 } \rho = \rho_0 \text{ 时, } k\rho^{\lambda-1}(\rho^2 - \rho_0^2)P + \Phi_1 - k_1 = 0, \rho \frac{dS}{d\rho} - S_1 = 0 \quad (42a, b)$$

$$\text{当 } \rho = 1 \text{ 时, } k\rho^{\lambda-1}(\rho^2 - \rho_0^2)P + \Phi_1 - k_1 = 0, S_1 = 0 \quad (43a, b)$$

为使推导简便, 我们首先定义两个函数

$$g(x) = x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 1, h(y) = y^2 - 1 \quad (44)$$

方程(40)在边界条件(42a)和(43a)下的解是

$$\Phi_1 = k_1 + P(a_1\vartheta^1 + a_2\vartheta^2 + a_3\vartheta^3 + a_4\vartheta^4), \quad (45)$$

其中

$$x_1 = \lambda - 1, x_2 = \lambda + 1, x_3 = 2\lambda + 3, x_4 = 2\lambda + 1, \quad (46)$$

$$a_3 = \frac{1}{g(x_3)}, a_4 = -\frac{\vartheta^2}{g(x_4)}$$

$a_1$  和  $a_2$  由条件(42a)和(43a)确定。

将式(45)代入式(39)中, 我们得到

$$P = \alpha_0 W_0, \quad (47)$$

其中

$$\alpha_0 = \frac{1}{\sum_{i=1}^4 \frac{a_i}{x_i + 1} \vartheta^i - \sum_{i=1}^4 \frac{a_i}{x_i + 1}} \quad (48)$$

将式(47)代入式(45), 式(45)写成

$$\Phi_1 = k_1 + \alpha_0 W_0(a_1\vartheta^1 + a_2\vartheta^2 + a_3\vartheta^3 + a_4\vartheta^4) \quad (49)$$

将式(49)代入方程(41), 方程(41)可整理成

$$L_2(S_1) = \alpha_0^2 W_0^2 \sum_{k=3}^{N_1} \sum_{k=3}^{N_1} b'_k \vartheta^k + k_1 \alpha_0 W_0 \sum_{k=N_1+3}^{N_2} b'_k \vartheta^k \quad (50)$$

在  $\Phi_1$  确定后, 系数  $b_k$  和幂指数  $y_k$  是已知的, 指标  $N_1$  和  $N_2$  也已确定, 指标从 3 和  $N_1 + 3$  开始是为待定项预留位置。方程(50)在条件(42b)和(43b)下的解是

$$S_1 = \alpha_0^2 W_0^2 (b_1\vartheta^1 + b_2\vartheta^2 + \sum_{k=3}^{N_1} b_k \vartheta^k) + k_1 \alpha_0 W_0 (b_{N_1+1}\vartheta^{N_1+1} + b_{N_1+2}\vartheta^{N_1+2} + \sum_{k=N_1+3}^{N_2} b_k \vartheta^k) \quad (51)$$

其中,  $y_{N_1+1} = y_1 = -1$ ,  $y_{N_2+2} = y_2 = 1$ , 待定系数  $b_1, b_2, b_{N_1+1}$  和  $b_{N_1+2}$  由边界条件(42b)和(43b)确定, 这里的四个待定系数只有两个是独立的, 其余系数为

$$b_k = \frac{b'_k}{h(y_k)} \quad (k = 3, \dots, N_1, N_1 + 3, \dots, N_2) \quad (52)$$

对于二次近似, 我们得到下列关于  $\Phi_2$  的边值问题

$$L_1(\Phi_2) = (\rho^{2\lambda+2} - kL_1)(\rho^{\lambda-1}S_1\Phi_1) + k_1(\lambda^2 - 1) + \rho^{2\lambda+1}(\rho^2 - \rho_0^2)P \quad (53)$$

$$\text{当 } \rho = \rho_0 \text{ 时, } \rho^{\lambda-1}[S_1\Phi_1 + (\rho^2 - \rho_0^2)P] + \Phi_2 - k_1 = 0 \quad (54)$$

$$\text{当 } \rho = 1 \text{ 时, } \rho^{\lambda-1}[S_1\Phi_1 + (\rho^2 - \rho_0^2)P] + \Phi_2 - k_1 = 0 \quad (55)$$

将所得的解(49)和(51)代入方程(53)中, 方程(53)可整理成

$$L_1(\Phi_2) = k_1(\lambda^2 - 1) + P(C'_3\vartheta^3 + C'_4\vartheta^4) + \alpha_0^3 W_0^3 \sum_{k=7}^{M_1} c'_k \vartheta^k$$

$$k_1 \alpha_0^2 W_0^2 \sum_{k=M_1+3}^{M_2} c_k \bar{\theta}^k + k_1^2 \alpha_0 W_0 \sum_{k=M_2+3}^{M_3} c_k \bar{\theta}^k \tag{56}$$

在  $\Phi_1$  和  $S_1$  确定以后, 系数  $c_k$  和幂指数  $z_k$  是已知的, 指标  $M_1, M_2$  和  $M_3$  也已确定。这样方程(56) 在条件(54) 和(55) 下的解是

$$\begin{aligned} \Phi_2 = & k_1 + P(c_1 \bar{\theta}^1 + c_2 \bar{\theta}^2 + c_3 \bar{\theta}^3 + c_4 \bar{\theta}^4) + \alpha_0^3 W_0^3 (c_5 \bar{\theta}^5 + c_6 \bar{\theta}^7 + \sum_{k=7}^{M_1} c_k \bar{\theta}^k) + \\ & k_1 \alpha_0^2 W_0^2 (c_{M_1+1} \bar{\theta}^{M_1+1} + c_{M_1+2} \bar{\theta}^{M_1+2} + \sum_{k=M_1+3}^{M_2} c_k \bar{\theta}^k) + \\ & k_1^2 \alpha_0 W_0 (c_{M_2+1} \bar{\theta}^{M_2+1} + c_{M_2+2} \bar{\theta}^{M_2+2} + \sum_{k=M_2+3}^{M_3} c_k \bar{\theta}^k), \end{aligned} \tag{57}$$

其中  $c_k = a_k, z_k = x_k (k = 1, \dots, 4); z_5 = z_{M_1+1} = z_{m_2+1} = x_1, z_6 = z_{M_1+2} = z_{m_2+2} = x_2$ 。六个待定系数  $c_5, c_6, c_{M_1+1}, c_{M_1+2}, c_{M_2+1}, c_{M_2+2}$  只有两个是独立的, 它们由边界条件(54) 和(55) 确定, 其余系数为

$$c_k = \frac{c_k}{g(z_k)} \tag{58}$$

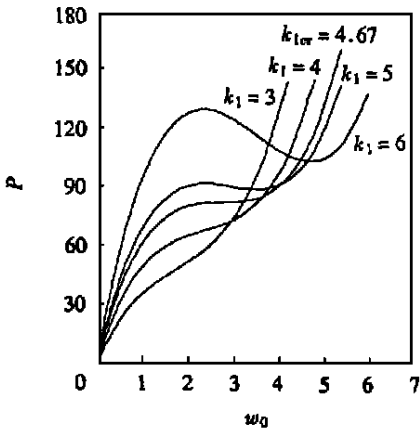


图2 不同几何参数  $k_1$  值的特征关系曲线  
( $\rho_0 = 0.3, k = 0.10, \lambda = 0.5, \nu = 0.3$ )

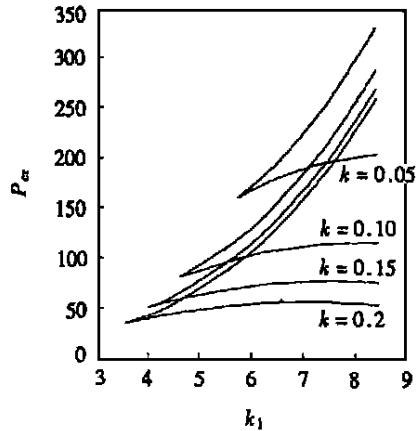


图3 不同  $k$  值时的临界屈曲压力曲线  
( $\rho_0 = 0.3, \lambda = 0.5, \nu = 0.3$ )

将式(58) 代入式(59) 中, 我们得到变厚度夹层截顶扁锥壳的非线性特征关系式:

$$P = (\alpha_0 + k_1^2 \alpha_1) W_0 + k_1 \alpha_2 W_0^2 + \alpha_3 W_0^3 \tag{59}$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 = & \alpha_0^2 \sum_{k=M_2+1}^{M_3} \left[ \frac{c_k}{z_k + 1} - \bar{\theta}_0^{k+1} \right], \\ \alpha_2 = & \alpha_0^3 \sum_{k=M_1+1}^{M_2} \left[ \frac{c_k}{z_k + 1} - \bar{\theta}_0^{k+1} \right], \\ \alpha_3 = & \alpha_0^4 \sum_{k=5}^{M_1} \left[ \frac{c_k}{z_k + 1} - \bar{\theta}_0^{k+1} \right]. \end{aligned} \right\} \tag{60}$$

从非线性特征关系式(59)和驻值条件,我们可求得临界屈曲载荷  $P_{cr}$  公式

$$P_{cr} = (\alpha_0 + k_1^2 \alpha_1) W_0^* + k_1 \alpha_2 W_0^{*2} + \alpha_3 W_0^{*3} \quad (61)$$

式中  $W_0^*$  是壳体发生屈曲时的内边缘挠度

$$W_0^* = \frac{-\alpha_2 k_1 \pm \sqrt{(\alpha_2^2 - 3\alpha_1 \alpha_3) k_1^2 - 3\alpha_0 \alpha_3}}{3\alpha_3} \quad (62)$$

由式(62)可得壳体失稳的几何条件

$$k_1 \geq k_{1cr} = \sqrt{\frac{3\alpha_0 \alpha_3}{\alpha_2^2 - 3\alpha_1 \alpha_3}} \quad (63)$$

$k_{1cr}$  是壳体屈曲时的临界几何参数。

## 4 数值结果与讨论

根据上述分析,本文进行了数值计算。图2给出当  $\rho_0 = 0.3$ ,  $k = 0.10$  和  $\lambda = 0.5$ ,在几种不同几何参数  $k_1$  值时的非线性特征关系曲线。

图2的结果显示,当  $k_1$  的值较小时,壳体的特征关系曲线是单调增加的,这表明壳体不会发生屈曲,而当  $k_1$  大于某一临界时,特征关系曲线变弯,表明壳体发生了屈曲。

图3给出对应每一特定的  $k$  值时的临界屈曲压力关系曲线,每一曲线对应两条分支,分别称为上临界屈曲压力和下临界屈曲压力,在实际工程中,只需考虑上临界屈曲压力就可以了。图3的结果表明,上临界屈曲压力随着  $k$  值的增加而减小。

图4给出在不同的内外半径比值  $\rho_0$  时壳体的上临界屈曲压力随厚度变化参数  $\lambda$  的变化规律。

从图4可以看出,壳体的上临界屈曲压力随着  $\rho_0$  的增大而增大,随着  $\lambda$  的增大而减小,但  $\lambda$  的变化对临界屈曲压力的影响不大。

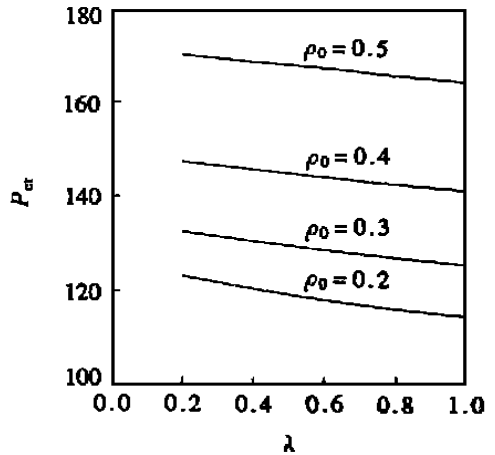


图4 厚度变化参数对临界屈曲压力的影响  
( $k = 0.10, k_1 = 6.0, \nu = 0.3$ )

## [参 考 文 献]

- [1] Reissner E. Finite deflection of sandwich plates[J]. J Aeronaut Sci, 1948, 15(7): 435~ 440; 1950, 17(2): 125—130.
- [2] Yu Y Y. Nonlinear flexural vibration of sandwich plates[J]. J Acoust Soc Amer, 1962, 34(6): 1176—1181.
- [3] Kan H K, Huang J C. Large deflection of rectangular sandwich plates[J]. AIAA J, 1967, 5(10): 1706—1708.
- [4] Stuck R. Nonlinear stability problem of an open conical sandwich shell under external pressure and compression[J]. Int J Non-Linear Mech, 1984, 19(3): 217—233.
- [5] 刘人怀, 朱金福, 张小果. 夹层环形板的非线性弯曲[J]. 暨南大学学报, 1997, 18(1): 1—11.
- [6] LIU Ren\_huai, LI Jun. Nonlinear vibration of shallow conical sandwich shells[J]. Int J Non-Linear Mech, 1995, 30(2): 97—109.



- [7] LIU Ren\_huai, CHENG Zhen\_qiang. On the nonlinear buckling of circular shallow spherical sandwich shells under the action of uniform edge moments[J]. *Int J Non\_Linear Mech*, 1995, **30**(1): 33—43.
- [8] 刘人怀, 成振强. 简支夹层矩形板的非线性弯曲[J]. *应用数学和力学*, 1993, **14**(3): 203—218.
- [9] 刘人怀, 朱金福. 夹层壳的非线性理论[M]. 北京: 机械工业出版社, 1993.
- [10] 刘人怀, 吴建成. 夹层矩形板的非线性振动[J]. *中国科学 A 辑*, 1992, **35**(4): 472—486.
- [11] 刘人怀. 夹层圆板的非线性弯曲[J]. *应用数学和力学*, 1981, **2**(2): 173—190.
- [12] Paydar N, Libove C. Bending of sandwich plates of variable thickness[J]. *J Appl Mech*, ASME, 1988, **55**(2): 419—423.
- [13] Paydar N. Stress analysis of annular sandwich plates of linearly varying thickness[J]. *Int J Solids Struct*, 1988, **24**(3): 313—320.
- [14] Lu C, Libove C. Beamlike harmonic vibration of variable thickness sandwich plates[J]. *AIAA J*, 1991, **29**(2): 299—234.
- [15] Jeon J S, Hong C S. Bending of tapered anisotropic sandwich plates with arbitrary edge conditions [J]. *AIAA J*, 1992, **30**(7): 1762—1769.
- [16] 叶开沅, 刘人怀, 平庆元, 等. 圆底扁球壳在均匀线布载荷作用下的非线性稳定性[J]. *科学通报*, 1965, (2): 142—144.
- [17] 叶开沅, 刘人怀, 平庆元, 等. 圆底扁球壳在均匀边缘力矩作用下的非线性稳定性[J]. *科学通报*, 1965, (2): 145—148.
- [18] 刘人怀. 中心开孔圆底扁球壳在均匀线布载荷作用下的非线性稳定性[J]. *科学通报*, 1965, (3): 253—257.

## Nonlinear Stability of Truncated Shallow Conical Sandwich Shell With Variable Thickness

XU Jia\_chu<sup>1</sup>, WANG Cheng<sup>1</sup>, LIU Ren\_huai<sup>2</sup>

(1. Department of Mechanics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, P R China;

2. Institute of Applied Mechanics, Jinan University, Guangzhou 510632, P R China)

**Abstract:** The theory of nonlinear stability for a truncated shallow conical shell with variable thickness under the action of uniform pressure was presented. The fundamental equations and boundary conditions were derived by means of calculus of variations. An analytic solution for the critical buckling pressure of the shell with a hyperbolically varying thickness is obtained by use of modified iteration method. The results of numerical calculations are presented in diagrams, which show the influence of geometrical and physical parameters on the buckling behavior.

**Key words:** truncated shallow conical sandwich shells with variable thickness; nonlinear stability; modified iteration method