

文章编号: 1000_0887(2000) 09_0890_07

非线性粘弹性柱的稳定性和混沌运动^{*}

陈立群^{1,2}, 程昌钧^{1,2}

(1. 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072; 2. 上海大学 力学系, 上海 201800)

(本刊编委程昌钧来稿)

摘要: 研究了受轴向周期力作用的各向同性简支柱的动力学稳定性。假定粘弹性材料满足 Leaderman 非线性本构关系, 导出运动方程为非线性偏微分-积分方程, 并利用 Galerkin 方法简化为非线性微分-积分方程。应用平均法进行了稳定性分析, 并用数值结果进行验证。数值结果还表明系统可能存在混沌运动。

关键词: 稳定性; 混沌; 平均法; Galerkin 方法; 粘弹性柱

中图分类号: O322 **文献标识码:** A

引 言

由于粘弹性材料的应力-应变关系常导致微分-积分型的运动方程, 粘弹性结构稳定性的问題远比弹性结构的稳定性问題复杂。在线性粘弹性柱的早期研究中, 平均法^[1]和弹簧-粘性壶表示^[2~4]被用于稳定性分析。近来在[5]中 Cederbaum 和 Mond 应用多尺度法研究了周期径向荷载作用下的粘弹性柱的稳定性, 在[6]中 Suire 和 Cederbaum 利用 Liapunov 指数的概念研究了具有几何非线性的粘弹性柱稳定性。在他们的研究中采用了描述线性粘弹性材料的 Boltzmann 叠加原理。

然而众所周知许多粘弹性材料是非线性的, 为充分描述其行为需要非线性模型。比较研究^[7]表明从对材料行为的预期和表达的简洁方面考虑 Leaderman 模型^[8]是种最有用的表达。

作者在本文中导出了在周期轴向力作用下各向同性、简支 Leaderman 本构关系描述的粘弹性柱的运动方程为积分-偏微分方程。采用 Galerkin 方法进行简化。利用平均法得到了使平衡点失稳的激励参数临界值。应用数值方法对解析结果进行了验证。数值工作还发现系统存在的混沌运动。

1 粘弹性柱的运动方程及其简化

考虑受周期轴向力作用的各向同性、简支柱的横向运动。记横向位移为 $y(x, t)$, 柱单位

* 收稿日期: 1999_06_25; 修订日期: 2000_05_25

基金项目: 国家自然科学基金资助(19727027); 中国博士后科学基金资助; 上海科技发展基金资助(98JC14032, 98SHB1417)

作者简介: 陈立群(1963—), 上海市人, 博士, 教授。

程昌钧(1937—), 女, 重庆市人, 教授, 博导。研究方向: 非线性固体力学, 已发表论文 100 余篇; 多次获得省部级以上各种奖励, 1998 年获教育部科技进步(甲类)一等奖。

长度质量为 ρ , 周期外力为 $F(t) = F_0 \cos \Omega t$, 截面弯矩为 $M(x, t)$. 则柱的动力学方程为

$$\rho \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} + F(t) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M(x, t)}{\partial x^2} = 0, \quad (1)$$

其中 $M(x, t) = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma(x, z, t) dz, \quad (2)$

而 $\sigma(x, z, t)$ 为轴向应力分量, h 为柱的宽度.

对于非线性粘弹性材料, Leaderman 本构关系为^[8]

$$\sigma(x, z, t) = E_0 g(x, z, t) + \int_0^t E(t - \tau) g(\varepsilon(x, z, \tau)) d\tau, \quad (3)$$

其中 $E(t)$ 为松弛函数而其 $t = 0$ 时的值, E_0 为材料的初始弹性模量, $\varepsilon(x, z, t)$ 为轴向应变, 而非线性函数

$$g(\varepsilon(x, z, t)) = \varepsilon(x, z, t) + \beta \varepsilon^2(x, z, t) + \gamma \varepsilon^3(x, z, t), \quad (4)$$

其中常数 β 和 γ 使得在小应变时 $g(\varepsilon) \rightarrow \varepsilon$

对于小变形, 应变_位移关系为

$$\varepsilon(x, z, t) = -z \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2}. \quad (5)$$

式(4)和(5)代入式(3)得到

$$\begin{aligned} \sigma(x, z, t) = E_0 & \left[-z \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} + \beta z^2 \left(\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right)^2 - \gamma z^3 \left(\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right)^3 \right] + \\ & \int_0^t E(t - \tau) \left[-z \frac{\partial^2 y(x, \tau)}{\partial x^2} + \beta z^2 \left(\frac{\partial^2 y(x, \tau)}{\partial x^2} \right)^2 - \gamma z^3 \left(\frac{\partial^2 y(x, \tau)}{\partial x^2} \right)^3 \right] d\tau. \end{aligned} \quad (6)$$

因而有弯矩的表达式

$$\begin{aligned} M(x, t) = E_0 & \left[\frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} + \gamma \frac{h^5}{80} \left(\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right)^3 \right] + \\ & \int_0^t E(t - \tau) \left[\frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 y(x, \tau)}{\partial x^2} + \gamma \frac{h^5}{80} \left(\frac{\partial^2 y(x, \tau)}{\partial x^2} \right)^3 \right] d\tau. \end{aligned} \quad (7)$$

利用式(7), 式(1)可改写为

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} + F(t) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} + E_0 & \left[\frac{h^3}{12} \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + \gamma \frac{h^5}{80} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right)^3 \right] + \\ & \int_0^t E(t - \tau) \left[\frac{h^3}{12} \frac{\partial^4 y(x, \tau)}{\partial x^4} + \gamma \frac{h^5}{80} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 y(x, \tau)}{\partial x^2} \right)^3 \right] d\tau = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

带有时变系数的非线性积分_偏微分方程(8)通常难以得到精确解. 我们用 Galerkin 方法^[9]确定未知位移 $y(x, t)$. 为满足柱在两个简支端点 $x = 0$ 和 $x = l$ 的边界条件 $y(0, t) = M(0, t) = 0$, 将解进行 Fourier 级数展开

$$y(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad (9)$$

其中 l 为柱的长度. 以下仅在式(9)中考虑 $k = 1$ 的项, 并令 $q_1(t) = q(t)$. 式(9)代入式(8)得到

$$\begin{aligned} \rho \dot{q}(t) \sin \frac{\pi x}{l} - F(t) \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 q(t) \sin \frac{\pi x}{l} + \frac{E_0 h^3}{12} \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 \left[q(t) + \int_0^t E(t - \tau) q(\tau) d\tau \right] \sin \frac{\pi x}{l} + \\ \gamma \frac{E_0 h^5}{80} \left(\frac{\pi}{l} \right)^8 \left[q^3(t) + \int_0^t E(t - \tau) q^3(\tau) d\tau \right] \left[\sin^2 \frac{\pi x}{l} - 2 \cos^2 \frac{\pi x}{l} \right] \sin \frac{\pi x}{l} = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\text{其中 } D(t) = \frac{E(t)}{E_0}. \quad (11)$$

式(10)两边同乘以 $\sin(\pi x/l)$ 并在区间 $[0, l]$ 上对 x 积分得到

$$\ddot{q} + \omega^2(1 - 2\eta \cos \Omega t)q + kq^3 = -\omega^2 \int_0^t D(t-\tau)q(\tau) d\tau - k \int_0^t D(t-\tau)q^3(\tau) d\tau, \quad (12)$$

$$\text{其中 } \omega^2 = \frac{E_0 h^3}{12\rho} \left(\frac{\pi}{l}\right)^4, \quad \eta = \frac{6F_0}{E_0 h^3} \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2, \quad k = \frac{3\gamma E_0 h^5}{320} \left(\frac{\pi}{l}\right)^8. \quad (13)$$

对于线性粘弹性材料, $\gamma = 0$ 故 $k = 0$, 式(12)约化为线性粘弹性柱的运动方程^[5].

2 平均化系统及其分析

假设式(3)中的松弛函数为

$$E(t) = A + B e^{-\alpha t}. \quad (14)$$

相应地 $D(t)$ 为

$$D(t) = a + b e^{-\alpha t}. \quad (15)$$

$$\text{其中 } a = \frac{A}{A+B}, \quad b = \frac{B}{A+B}. \quad (16)$$

式(15)代入式(12)得到

$$\ddot{q} + \omega^2(1 - 2\eta \cos \Omega t)q + kq^3 = -\alpha b e^{-\alpha t} \left[\omega^2 \int_0^t e^{\alpha \tau} q(\tau) d\tau + k \int_0^t e^{\alpha \tau} q^3(\tau) d\tau \right]. \quad (17)$$

以下将应用平均法的观点^[10]分析其长期动力学行为.

设式(17)的解具有形式

$$q = r \cos \varphi, \quad \varphi = \omega t + \phi, \quad \dot{q} = -\omega r \sin \varphi \quad (18)$$

其中 ϕ 为时间的慢变量. 因而解满足条件

$$r \dot{\cos} \varphi - \dot{\varphi} \sin \varphi = 0. \quad (19)$$

式(18)代入式(17)并像以往工作[5]和[6]一样仅考虑 $\Omega = 2\omega$ 的情形, 得到

$$-r \dot{\sin} \varphi - r \dot{\phi} \cos \varphi = 2\eta \omega r \cos 2(\varphi - \phi) \cos 2\varphi - \frac{k}{\omega} r^3 \cos^3 \varphi + \frac{1}{\omega} f(r, \varphi, \phi, t), \quad (20)$$

$$\text{其中 } f(r, \varphi, \phi, t) = \alpha b r \left[\frac{(4\omega^2 + 3kr^2)(\alpha \cos \phi + \omega \sin \phi)}{4(\alpha^2 + \omega^2)} + \frac{kr^2(\alpha \cos 3\phi + 3\omega \sin 3\phi)}{4(\alpha^2 + 9\omega^2)} \right] (1 - e^{-\alpha t}). \quad (21)$$

在计算积分时, 慢变量 ϕ 作为常数处理. 对于长期动力学行为, $e^{-\alpha t}$ 项迅速衰减而可以忽略因而 $f(r, \varphi, \phi)$ 可写作

$$f(r, \varphi, \phi) = \alpha b r \left[\frac{(4\omega^2 + 3kr^2)(\alpha \cos \phi + \omega \sin \phi)}{4(\alpha^2 + \omega^2)} + \frac{kr^2(\alpha \cos 3\phi + 3\omega \sin 3\phi)}{4(\alpha^2 + 9\omega^2)} \right]. \quad (22)$$

从式(19)和(20)中可解出

$$\left. \begin{aligned} r_{\geq} &= - \left[2\eta\omega r \cos 2(\varphi - \psi) \cos 2\varphi - \right. \\ &\quad \left. \frac{k}{\omega} r^3 \cos^3 \varphi + \frac{1}{\omega} f(r, \varphi, \psi) \right] \sin \varphi, \\ r_{\leq} &= - \left[2\eta\omega r \cos 2(\varphi - \psi) \cos 2\varphi - \right. \\ &\quad \left. \frac{k}{\omega} r^3 \cos^3 \varphi + \frac{1}{\omega} f(r, \varphi, \psi) \right] \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

在区间 $[0, 2\pi]$ 上平均式(23) 得到平均化系统

$$\left. \begin{aligned} r_{\geq} &= - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[2\eta\omega r \cos 2(\varphi - \psi) \cos 2\varphi - \right. \\ &\quad \left. \frac{k}{\omega} r^3 \cos^3 \varphi + \frac{1}{\omega} f(r, \varphi, \psi) \right] \sin \varphi d\varphi, \\ r_{\leq} &= - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[2\eta\omega r \cos 2(\varphi - \psi) \cos 2\varphi - \right. \\ &\quad \left. \frac{k}{\omega} r^3 \cos^3 \varphi + \frac{1}{\omega} f(r, \varphi, \psi) \right] \cos \varphi d\varphi \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

式(22)代入式(24)并计算相应积分得到

$$\left. \begin{aligned} r_{\geq} &= r \left[- \left(\frac{\eta\omega}{2} \sin 2\psi + \frac{\omega^2}{2} C \right) - \frac{3}{8} kCr^2 \right], \\ r_{\leq} &= r \left[- \left(\frac{\eta\omega}{2} \cos 2\psi + \frac{\omega\alpha}{2} C \right) + \frac{3}{8} k \left(1 - \frac{\alpha}{\omega} C \right) r^2 \right], \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

$$\text{其中 } C = \frac{\alpha b}{\alpha^2 + \omega^2} \quad (26)$$

式(17)的稳态运动对应于式(25)的平衡状态,即

$$\left. \begin{aligned} r \left[- \left(\frac{\eta\omega}{2} \sin 2\psi + \frac{\omega^2}{2} C \right) - \frac{3}{8} kCr^2 \right] &= 0, \\ r \left[- \left(\frac{\eta\omega}{2} \cos 2\psi + \frac{\omega\alpha}{2} C \right) + \frac{3}{8} k \left(1 - \frac{\alpha}{\omega} C \right) r^2 \right] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

对于平凡解 $r = 0$, 式(25) 约化为

$$r_{\geq} = r \left[- \left(\frac{\eta\omega}{2} \sin 2\psi + \frac{\omega^2}{2} C \right) - \frac{3}{8} kCr^2 \right]. \quad (28)$$

基于线性化分析, 当条件

$$\eta < \eta_c = \omega C \quad (29)$$

成立时, 解 $r = 0$ 稳定. 若 $\eta > \eta_c$, 解 $r = 0$ 可能不稳定. 非平凡解对应于

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \frac{\eta\omega}{2} \sin 2\psi + \frac{\omega^2}{2} C \right\} + \frac{3}{8} kCr^2 &= 0, \\ \left\{ \frac{\eta\omega}{2} \cos 2\psi + \frac{\omega\alpha}{2} C \right\} - \frac{3}{8} k \left(1 - \frac{\alpha}{\omega} C \right) r^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

因而稳态运动的幅值满足

$$\left[\frac{3}{8} kCr_0^2 + \frac{\omega^2}{2} C \right]^2 + \left[\frac{3}{8} k \left(1 - \frac{\alpha}{\omega} C \right) r_0^2 - \frac{\omega\alpha}{2} C \right]^2 = \left[\frac{\eta\omega}{2} \right]^2. \quad (31)$$

其稳定性由在平衡点计算的 Jacobi 矩阵

$$D = \begin{bmatrix} \frac{3}{4}kCr_0^2 & \omega\alpha C - \frac{3}{4}k\left(1 - \frac{\alpha}{\omega}C\right)r_0^2 \\ -\frac{3}{4}k\left(1 - \frac{\alpha}{\omega}C\right)r_0 & -\omega^2 C - \frac{3}{4}kCr_0^2 \end{bmatrix} \quad (32)$$

的本征值确定。当矩阵 D 的本征值具有负实部时, 解 $r = r_0$ 稳定。

3 数值结果

为进行式(17)的数值研究, 先将积分-微分方程(17)转化为常微分方程。微分式(17)并利用 Leibnitz 法则, 经过一些代数运算得到

$$\ddot{q} + \alpha\dot{q} + [\omega^2(1 - 2\eta\cos\Omega t) + 3kq^2]q + [\alpha\omega^2(1 - 2\eta\cos\Omega t) + 2\eta\omega^2\Omega\sin\Omega t - \alpha b\omega^2]q + k\alpha a q^3 = 0 \quad (33)$$

在本文中取 $\Omega = 2$, $\alpha = 0.01$, $\omega = 0.01$, $a = 0.1$ 和 $b = 0.9$ 进行数值计算。此时, 根据式(29)和(26)得到 $\eta_c = 0.009$ 。现对于 η 的若干值考察式(33)的长期动力学行为。

对于 $\eta < \eta_c$ 的小激励, 系统为渐近稳定, 响应趋于零。 $\eta = 0.0042$ 的情形如图1所示。然而当激励幅值接近 η_c 时, 趋于零速度很慢, $\eta = 0.008$ 的情形如图2所示。

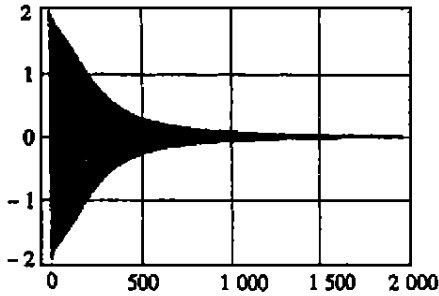


图1 $\eta = 0.0042$ 时的响应

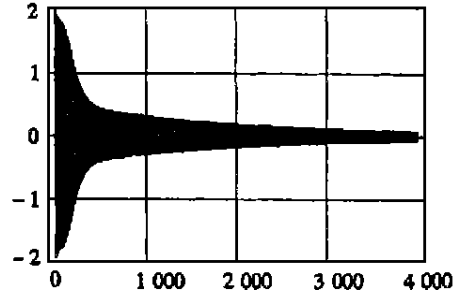


图2 $\eta = 0.008$ 时的响应

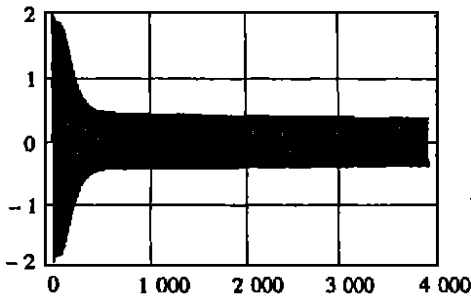


图3 $\eta = 0.0092$ 时的响应

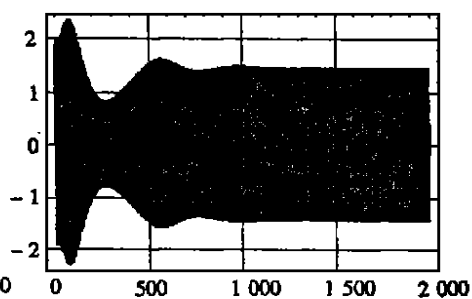
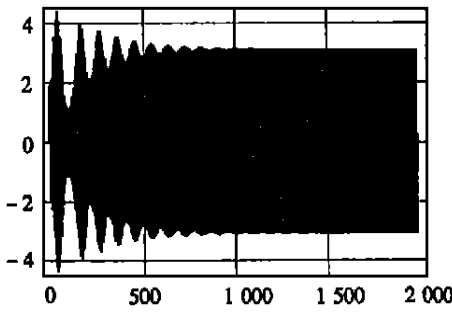
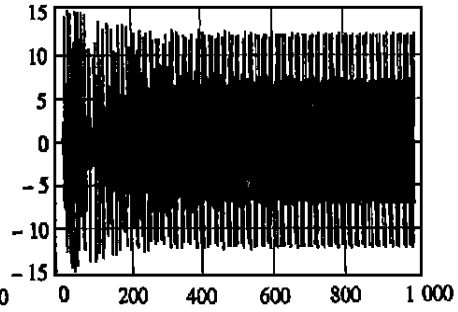
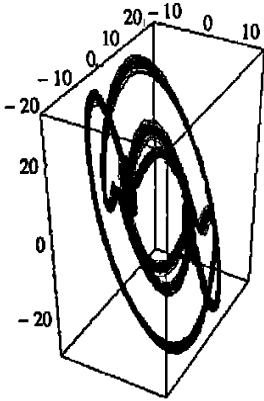
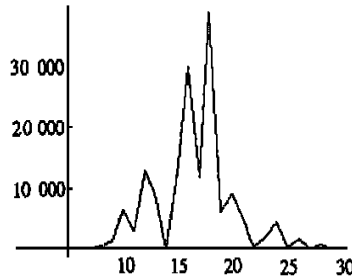


图4 $\eta = 0.018$ 时的响应

对于 $\eta > \eta_c$ 但仍然充分小的激励, 系统渐近于周期运动。若 η 仅略大于 η_c , 响应趋于稳态极限环很慢。 $\eta = 0.0092$ 的情形如图3所示。响应的幅值随着激励参数的增加而增大, $\eta = 0.018$ 和 $\eta = 0.072$ 的情形分别如图4和图5所示。

此外, 数值算例表明系统对于足够大的 η 将呈现混沌性态。 $\eta = 0.98$ 的情形如图6所示。粘弹性结构如柱、梁、板和壳中的混沌已有数值研究^[11~18]。图6对应的相轨迹和功率谱分别如图7和图8所示。它们表明图6中的不规则运动确实是混沌。

图5 $\eta = 0.072$ 时的响应图6 $\eta = 0.98$ 时的响应图7 $\eta = 0.98$ 时的相轨迹图8 $\eta = 0.98$ 的功率谱

4 结 论

建立了描述受周期轴向力作用的各项同性、简支非线性粘弹性柱的积分-偏微分方程(8)·构成柱的非线性粘弹性材料满足 Leademan 本构关系(3)·应用 Galerkin 方法将方程(8)简化为积分-微分方程(12)·

在松弛函数由式(14)给出的假设下,应用平均法的观点分析了柱的动力学行为·基于平均化系统(25),得到了激励参数的临界值(29),激励参数超过该临界值时,系统平衡状态失稳·

对应相应常微分方程(33)的数值结果表明随着激励参数 η 的增加系统相继出现渐近稳定平衡状态、周期运动和混沌·数值模拟结果证实了解析方法得到的激励参数临界值 η_c ·

[参 考 文 献]

- [1] Matyash V I. Dynamic stability of hinged viscoelastic bar[J]. Mech Poly, 1964, 2(3): 293—300.
- [2] Stevens K K. On the parametric excitation of a viscoelastic column[J]. AIAA J, 1966, 12(10): 2111—2116.
- [3] Szyskowski W, Gluckner P G. The stability of viscoelastic perfect columns: a dynamic approach [J]. Int J Solids Struct, 1985, 6(4): 545—559.
- [4] Gluckner P G, Szyskowski W. On the stability of column made of time dependent materials[J]. Encyc Civ Eng Prac Tech, 1987, 23(4): 577—626.
- [5] Cederbaum G, Mond M. Stability properties of a viscoelastic column under a periodic force[J]. J

- Appl Mech, 1992, **59**(1): 16—19.
- [6] Suire G, Cederbaum G. Elastica type dynamic stability analysis of viscoelastic columns[J]. Arch Appl Mech, 1994, **64**(3): 307—316.
- [7] Smart J, Williams J G. A comparison of single integral non_linear viscoelasticity theories[J]. J Mech Phys Solids, 1972, **20**(2): 313—324.
- [8] Leaderman H. Large longitudinal retarded elastic deformation of rubberlike network polymers[J]. Polymer Trans Soc Rheol, 1962, **6**(4): 361—382.
- [9] Nayfeh A H, Mook D T. Nonlinear Oscillations[M]. New York: Wiley, 1979.
- [10] Sanders J A, Verhulst F. Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems [M]. Berlin: Springer_Verlag, 1985.
- [11] Touati D, Cederbaum G. Dynamic stability of nonlinear viscoelastic plates[J]. Int J Solids Struct, 1994, **31**(18): 2367—2376.
- [12] Suire G, Cederbaum G. Periodic and chaotic behavior of viscoelastic nonlinear(elastica) bars under harmonic excitations[J]. Int J Mech Sci, 1995, **37**(5): 753—772.
- [13] Touati D, Cederbaum G. Influence of large deflections on the dynamic stability of nonlinear viscoelastic plates[J]. Acta Mech, 1995, **113**(2): 215—231.
- [14] Argyris J. Chaotic vibrations of a nonlinear viscoelastic beam[J]. Chaos Solitons, Fractals, 1996, **7**(1): 151—163.
- [15] ZHANG Neng_hui, CHENG Chang_jun. Chaos behavior of viscoelastic plates in supersonic flow[A]. In: CHIEN Wei_zang, CHENG Chang_jun, DAI Shi_qiang, LIU Yu_lu, Eds. Proc 3rd Inter Conf Nonlinear Mech [C]. Shanghai: Shanghai University Press, 1998, 432—436.
- [16] ZHU Yan_yan, ZHANG Neng_hui, Miura F. Dynamical behavior of viscoelastic rectangular plates [A]. In: CHIEN Wei_zang, CHENG Chang_jun, DAI Shi_qiang, LIU Yu_lu, Eds. Proc 3rd Inter Conf Nonlinear Mech [C]. Shanghai: Shanghai University Press, 1998, 445—450.
- [17] 程昌钧, 张能辉. 粘弹性矩形板的混沌和超混沌行为[J]. 力学学报, 1998, **30**(6): 690—699.
- [18] 陈立群, 程昌钧. 用输出变量反馈线性化方法控制粘弹性板的混沌振动[J]. 应用数学和力学, 1999, **20**(12): 1229—1234.

Stability and Chaotic Motion in Columns of Nonlinear Viscoelastic Material

CHEN Li_qun^{1,2}, CHENG Chang_jun^{1,2}

(1. Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics,
Shanghai 200072, P R China;

2 Department of Mechanics, Shanghai University, Shanghai 201800, P R China)

Abstract: The dynamical stability of a homogeneous, simple supported column, subjected to a periodic axial force, is investigated. The viscoelastic material is assumed to obey the Leaderman nonlinear constitutive relation. The equation of motion was derived as a nonlinear integro_partial_differential equation, and was simplified into a nonlinear integro_differential equation by the Galerkin method. The averaging method was employed to carry out the stability analysis. Numerical results are presented to compare with the analytical ones. Numerical results also indicate that chaotic motion appears.

Key words: stability; chaos; averaging method; Galerkin method; viscoelastic column