

文章编号: 1000-0887(2000) 09-0925-08

# 时变参数系统的非完全分岔及其在 Duffing 方程中的应用\*

化存才, 陆启韶

(北京航空航天大学 理学院, 北京 100083)

(李家春推荐)

摘要: 提出新的方法从本质上研究时变参数系统的非完全分岔问题. 通过建立时变参数系统的解的线性近似定理去分析时变分岔方程运动的分岔转迁滞后和跃迁现象. 利用  $V$  函数预测分岔转迁值, 将新方法应用于 Duffing 方程, 获得一些新的分岔结果和关于解对初值和参数的敏感性结论.

关键词: 时变参数系统; 分岔转迁; 非完全分岔; Duffing 方程

中图分类号: O175; O315. 3; O322 文献标识码: A

## 引 言

在物理, 力学, 化学, 生物中大量存在含慢变参数的分岔问题:

$$\dot{x} = f(x, \lambda) \quad (x \in \mathbf{R}^n, \lambda \in \mathbf{R}), \quad (1)$$

其中  $\lambda$  是分岔控制参数,  $f(x, \lambda) \in \mathbf{R}^n$  是  $n$  维向量场. 参数  $\lambda$  为常数时的分岔问题称为定常分岔, 这是人们研究得较多的分岔问题. 参数  $\lambda$  随时间变化的分岔问题称为时变分岔, 或非定常分岔; 当参数  $\lambda$  随时间缓慢变化经过定常分岔值  $\lambda_c$  时, (1) 的分岔图一般不再保持, 并出现稳定性交换的分岔转迁滞后和跃迁现象. 在实际应用中, 由于介质的不均匀性、非对称性、噪声等扰动因素的影响, 经常需要讨论含时变参数非线性系统的非完全分岔问题:

$$\dot{x} = f(x, \lambda(\varepsilon), \alpha) \quad (x \in \mathbf{R}^n, \lambda, \alpha \in \mathbf{R}), \quad (2)$$

其中分岔参数  $\lambda(\varepsilon)$  单调变化经过  $\lambda_c$ ,  $0 \leq \varepsilon \leq 1$  是小参数, 非完全分岔参数  $0 \leq \alpha \leq 1$ . 非完全分岔参数  $\alpha$  对 (2) 的分岔现象有重要影响, 而且在理论、实验和应用上都是很有用的.

对于具有时变参数系统的分岔问题, 文[1] 研究了一阶和二阶常微分方程的分岔转迁和突跃现象, 通过摄动分析预测了分岔转迁滞后的可能性与存在性. 文[2] 研究了当系统参数随时间变化经过鞍结分岔点时一类二阶常微分方程的动力学行为, 用频率关系预测失稳点, 文[3, 4] 用平均方法和数值方法研究了两个具有双稳态的力学系统的分岔方程, 文[5] 基于分界线横截理论和数值计算研究了单自由度 Hamilton 系统的动态分岔, 得出了一些具有统计性的结果,

\* 收稿日期: 1999\_05\_26; 修订日期: 2000\_05\_25

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19872010); 航空科学基金资助项目(98B51125); 育部博士点基金资助项目(98000619)

作者简介: 化存才(1964—), 云南玉溪人, 博士.

但文[1~5]的方程中不含非完全分岔参数。文[6,7]由摄动分析给出了预测饱和吸收半经典激光方程的分岔转迁滞后值的近似公式、物理解释和数值结果。文[8,9]研究了含2,3次非线性项的一阶微分方程的非完全分岔问题,但文[6~9]对一些数值结果未给出理论解释。文[10]提出了新的简便的方法研究了半经典 Laser-Lorenz 方程的时变分岔。

因为时变分岔问题(2)通常是具有奇异性和强非线性的非自治系统,慢变量  $T = \varepsilon$  使得(2)成为奇异摄动问题,慢变平衡解的渐近展式在定常分岔值  $\lambda_c$  附近由于奇异性而变得非一致有效,所以对非定常分岔问题(2)的研究较定常分岔问题更为困难和复杂,到目前为止还只能采用奇异摄动方法和数值方法,尚未形成一般性的定性分析方法。

此外,方程(2)代表着一个物理运动系统,分岔转迁的存在使方程(2)的运动变得更为复杂和不可预测,即表现出对初值和参数的敏感性,但对这种公认的现象及其确定性或随机性还没有根本上的理论探讨。

本文提出新的方法研究具有时变参数  $\lambda = \lambda(\varepsilon) = \lambda_0 + \varepsilon$  的非完全分岔问题(2)。分析和探讨由于参数随时间慢变而带来的(2)的分岔转迁滞后和跃迁现象,应用于 Duffing 方程。在第1节中建立(2)的新的理论分析定性方法,在第2节中具体分析 Duffing 方程的时变分岔。

## 1 时变分岔方程(2)的理论分析

假设在方程(2)中的向量场  $f(x, \lambda, \alpha)$  是  $x, \lambda, \alpha$  的连续可微函数,  $f(0, \lambda, 0) = 0$ , 且关于  $x$  满足局部 Lipschitz 条件。

为简便计,在本文中总取初始时刻  $t_0 = 0$ , 范数  $\|x\| = \sum_{i=1}^n |x_i|$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ 。

对应于方程(2)的退化定常分岔问题(即令  $\varepsilon = 0, \alpha = 0$  时的分岔)是:

$$\dot{x} = f(x, \lambda, 0), \quad (3)$$

其中  $\lambda$  为常数(即  $\lambda \neq 0$ )。由前面的假设,对任何的  $\lambda$  方程(3)都有平衡解  $x = 0$ 。设方程(3)中的  $f$  存在静态分岔,分岔值为  $\lambda = \lambda_c$ , 且  $x = 0$  是方程(3)的非双曲不动点, Jacobi 矩阵  $f_x(0, \lambda_c, 0)$  至少有一个零特征值。设  $x = 0$  当  $\lambda < \lambda_c$  时是方程(3)的渐近稳定的平衡解,当  $\lambda > \lambda_c$  时不稳定,同时从  $x = 0$  分岔出新的渐近稳定的平衡解  $x = x_s(\lambda)$ 。

定常分岔方程(3)的研究方法(见[11],[12])一般很难应用于时变分岔方程(2),本文采用新方法研究(2)。

先建立关于分岔方程(2)的解的线性近似定理。将方程(2)改写为

$$\dot{x} = f(x, \lambda(\varepsilon), \alpha) = f(0, \lambda(\varepsilon), \alpha) + f_x(0, \lambda(\varepsilon), \alpha)x + g(x, \lambda(\varepsilon), \alpha), \quad (4)$$

其中  $g(x, \lambda(\varepsilon), \alpha) = o(\|x\|)$ , 满足  $\|g(x, \lambda(\varepsilon), \alpha)\| \leq k\|x\|$ ,  $k$  为某个常数。

方程(4)的线性近似系统为:

$$\dot{x} = f(0, \lambda(\varepsilon), \alpha) + f_x(0, \lambda(\varepsilon), \alpha)x, \quad (5)$$

如记  $A(t) = f_x(0, \lambda(\varepsilon), \alpha)$ , 则方程(4)与(5)分别写成

$$\dot{x} = A(t)x + f(0, \lambda(\varepsilon), \alpha) + g(x, \lambda(\varepsilon), \alpha), \quad (4)'$$

$$\dot{x} = A(t)x + f(0, \lambda(\varepsilon), \alpha). \quad (5)'$$

设基本解矩阵  $\Phi(t)$  满足:  $\Phi(t) = A(t)\Phi(t)$ ,  $\Phi(0) = I$  (单位矩阵)。设存在某个时间  $t > 0$ , 常数  $c_1, c_2$ , 使得

$$\|\Phi(t)\| \leq c_1, \quad \|\Phi^{-1}(t)\| \leq c_2 \quad (0 \leq t \leq t). \quad (6)$$

定理 1 记方程(5)与(4)满足同样初值  $x(0) = x_0$  的解分别为  $x_1(t), x_2(t), g(x, \lambda, \alpha)$  关于  $x$  的 Lipachitz 常数为  $L(\lambda, \alpha)$ 。对于任给适当小的常数  $m > 0$ , 如果对  $0 \leq t \leq t$ , 有  $\|x_1(t)\| < m$ , 则存在  $\varepsilon_c, \alpha_c > 0$ , 使得当  $\varepsilon < \varepsilon_c, \alpha < \alpha_c$  时,

$$\|x_2(t) - x_1(t)\| \leq mM \quad (0 \leq t \leq t), \tag{7}$$

其中  $M = c_1 c_2 k t \exp\left[\int_0^t c_1 c_2 L(\lambda(\varepsilon), \alpha) ds\right]$ 。

证明 方程(5)与(4)的解分别为:

$$x_1(t) = \Phi(t)x_0 + \Phi(t) \int_0^t \Phi^{-1}(s)f(0, \lambda(\varepsilon), \alpha) ds,$$

$$x_2(t) = \Phi(t)x_0 + \Phi(t) \int_0^t \Phi^{-1}(s)[f(0, \lambda(\varepsilon), \alpha) + g(x_2(s), \lambda(\varepsilon), \alpha)] ds.$$

因此有:

$$\begin{aligned} x_2(t) - x_1(t) &= \Phi(t) \int_0^t \Phi^{-1}(s)g(x_2(s), \lambda(\varepsilon), \alpha) ds = \\ &\Phi(t) \int_0^t \Phi^{-1}(s)\{[g(x_2(s), \lambda(\varepsilon), \alpha) - g(x_1(s), \lambda(\varepsilon), \alpha)] + \\ &g(x_1(s), \lambda(\varepsilon), \alpha)\} ds. \end{aligned}$$

利用所给条件得  $\|g(x_1(t), \lambda(\varepsilon), \alpha)\| \leq k \|x_1(t)\| \leq km, 0 \leq t \leq t$ , 于是就有

$$\begin{aligned} \|x_2(t) - x_1(t)\| &\leq \|\Phi(t)\| \cdot \int_0^t \|\Phi^{-1}(s)\| \cdot [ \|g(x_2(s), \lambda(\varepsilon), \alpha) - \\ &g(x_1(s), \lambda(\varepsilon), \alpha)\| ] ds + \\ &\|\Phi(t)\| \cdot \int_0^t \|\Phi^{-1}(s)\| \cdot \|g(x_1(s), \lambda(\varepsilon), \alpha)\| ds \leq \\ &c_1 c_2 \int_0^t L(\lambda(\varepsilon), \alpha) \cdot \|x_2(s) - x_1(s)\| + km] ds. \end{aligned}$$

再根据 Gronwall 不等式, 就有

$$\|x_2(t) - x_1(t)\| \leq c_1 c_2 k m t \exp\left[\int_0^t c_1 c_2 L(\lambda(\varepsilon), \alpha) ds\right] \leq mM \quad (0 \leq t \leq t),$$

即(7)成立。证毕。

定理 1 表明, 在给定的条件下, 如果线性近似系统(5)的解  $x_1(t)$  在  $[0, t]$  内足够小, 则它可近似表示(4)的解  $x_2(t)$ 。通过式(6)去确定  $t$  是重要的。

定理 2 记方程(3)与(4)满足同样初值  $x(0) = x(0) = x_0$  解分别为  $x(t), x(t)$ 。设定常分岔问题(3)的分岔解  $x_s(\lambda)$  当  $\lambda > \lambda_c$  时渐近稳定, 吸引域是  $D$ , 且  $x'_s(\lambda) = dx/d\lambda$  有界; 又设存在时间  $t_{nc} \geq t_c$  (其中  $t_c$  满足  $\lambda(\varepsilon_c) = \lambda_c$ ), 使得当  $t \geq t_{nc}$  时, 方程(4)的解  $x(t) \in D$ , 即解曲线进入  $D$ , 则对任何  $e > 0$ , 存在  $\varepsilon_c, \alpha_c > 0, t^* \geq t_{nc}$ , 使得当  $\varepsilon < \varepsilon_c, \alpha < \alpha_c$  时, 有

$$x(t) = x_s(\lambda(\varepsilon)) + x_e(t) \quad (t \geq t^*), \tag{8}$$

其中  $x_e(t)$  是下列线性近似系统的解:

$$\dot{x}_e = f_x(x_s(\lambda(\varepsilon)), \lambda(\varepsilon), \alpha)x_e + o(\varepsilon, \alpha), \tag{9}$$

且满足

$$\|x_e(t)\| < e \quad (t \geq t^*). \tag{10}$$

证明 首先, 由  $x'_s(\lambda)$  的有界性和  $\lambda(\varepsilon)$  的单调增加性, 对于任何的  $e > 0$ , 存在  $\varepsilon_{c1} > 0, t_1 \geq t_c$  (其中  $t_c$  满足:  $\lambda(\varepsilon_c) = \lambda_c$ ), 使得当  $\varepsilon < \varepsilon_{c1}, t > t_1$  时  $|\lambda(\varepsilon) - \lambda_c|$  足够小, 从而

$$\|x_s(\lambda \vartheta) - x_s(\lambda)\| < e/3 \quad (t \geq t_1).$$

其次, 根据假设条件, 当  $\lambda > \lambda_c$  时, (3) 的分岔解  $x_s(\lambda)$  是渐近稳定的, 故对于前面的  $e > 0$ , 存在  $t_2 > t_c$ , 使得(3) 的解  $x(t) \in D(t \geq t_2)$ , 且满足

$$\|x(t) - x_s(\lambda)\| < e/3, \quad (t \geq t_2).$$

再次, 由于方程(3) 是(4) 的退化定常分岔问题, 且(4) 的解  $x(t)$  满足下列等价问题:

$$x' = f(x, \lambda, \alpha), \quad x = \varepsilon$$

故由解对参数  $\varepsilon$ ,  $\alpha$  和时间  $t$  的连续依赖性[12], 对于前面的  $e > 0$ , 存在  $\varepsilon_2, \alpha_c > 0$  和  $t_3 \geq t_{nc}$ , 使得当  $\varepsilon < \varepsilon_2, \alpha < \alpha_c$  时, 就有(4) 的解  $x(t) \in D, t \geq t_3$  和  $|\lambda \vartheta - \lambda|$  足够小, 且

$$\|x(t) - x(t)\| < e/3 \quad (t \geq t_3).$$

最后归纳一下, 对任何  $e > 0$ , 存在  $\varepsilon_c = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2), \alpha_c > 0$  和时间  $t^* = \max\{t_1, t_2, t_3\} \geq t_{nc}$ , 使得当  $\varepsilon < \varepsilon_c, \alpha < \alpha_c$  时, (4) 的解  $x(t)$  满足

$$\|x(t) - x_s(\lambda \vartheta)\| \leq \|x(t) - x(t)\| + \|x(t) - x_s(\lambda)\| + \|x_s(\lambda) - x_s(\lambda \vartheta)\| < e \quad (t \geq t^*),$$

即式(10) 成立.

作变换  $x = x_s(\lambda \vartheta) + x_e$ , 由于  $f(x_s(\lambda \vartheta), \lambda \vartheta, 0) = \mathbf{0}$ , 故(4) 可化为下列方程:

$$x_e' = f_x(x_s(\lambda \vartheta), \lambda \vartheta, \alpha) x_e + g(x_e, \lambda \vartheta, \alpha) - x_s'(\lambda \vartheta) \varepsilon \quad (\lambda \vartheta > \lambda_c), \quad (11)$$

其中  $g(x, \xi, \alpha)$  是  $\alpha$  的高次项, 满足  $g(\mathbf{0}, \xi, 0) = \mathbf{0}$ . 方程(11) 的系统就是方程(9). 类似于定理 1 的证明过程, 对充分小的  $\varepsilon < \varepsilon_c, \alpha < \alpha_c$ , (9) 的解  $x_e(t)$  在  $t \geq t^*$  时适当小, 并且(8) 成立. 证毕.

现在研究(4) 的分岔转迁. 为此给出

定义 1 记方程(4) 的解为  $x(t)$ . 如果存在  $t_{nc} > 0$ , 使得当  $t < t_{nc}$  (即  $\lambda < \lambda_{nc} = \lambda(\vartheta_{nc})$ ) 时  $x(t)$  趋于方程(3) 的稳定平衡解  $x = \mathbf{0}$ , 当  $t \geq t_{nc}$  (或  $\lambda \geq \lambda_{nc}$ ) 时  $x(t)$  很快地趋于方程(3) 的稳定分岔解  $x = x_s(\lambda)$ , 亦即方程(4) 的解  $x(t)$  在  $t_{nc}$  (或  $\lambda_{nc}$ ) 附近发生稳定性交换, 那么称方程(4) 发生了分岔转迁.  $t_{nc}$  称为(4) 的分岔转迁临界时间, 相应的  $\lambda_{nc}$  称为(4) 的分岔转迁值(或稳定平衡解  $x = \mathbf{0}$  的失稳值). 若  $\lambda_{nc} > \lambda_c$ , 则(4) 的分岔转迁是滞后的.

由定理 1 和 2 得, 在远离分岔转迁值  $\lambda_{nc} (\geq \lambda \vartheta)$  的地方, (4) 的解是可以由线性近似确定的, 且趋于定常分岔问题(3) 的稳定平衡解, 故对于充分小的  $\alpha$ , 有

$$dx/d\lambda \approx f(\mathbf{0}, \lambda \vartheta, 0)/\varepsilon = \mathbf{0} \quad (\lambda \vartheta \ll \lambda_{nc}),$$

$$dx/d\lambda \approx f_x(x, (\lambda \vartheta), \lambda \vartheta, 0)/\varepsilon = \mathbf{0} \quad (\lambda \vartheta \gg \lambda_{nc}),$$

由此可见在方程(4) 的分岔转迁值  $\lambda_{nc}$  附近,  $\|dx/d\lambda\|$  较大. 利用(4) 的线性近似解可估计  $\lambda_{nc}$  (即由(6) 式可近似确定  $t_{nc}$ ), 但通常不够准确. 注意到对  $\alpha = 0$  的情形,  $x = \mathbf{0}$  当  $\lambda < \lambda_c$  时是方程(4) 的稳定平衡解, 我们给出估计  $\lambda_{nc}$  的如下更好的方法:

定理 3 设存在  $x = \mathbf{0}$  的一个邻域  $\Omega$ , 时间  $t > 0$ ,  $\varepsilon_c > 0$  和定义在  $[0, t) \times \Omega$  上的连续可微函数  $V(t, x)$ , 当  $\varepsilon < \varepsilon_c$  时满足:

$$i) \quad V(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}; V(t, x) > \mathbf{0}, \text{ 对 } x \neq \mathbf{0}, t \in [0, t]; \text{ 和 } V(t, x) < \mathbf{0}, t > t,$$

$$ii) \quad V_{\lambda}(t, x) \leq \mathbf{0}, t \in [0, t),$$

则(4) 的分岔转迁临界时间  $t_{nc} \approx t$ , 从而  $\lambda_{nc} \approx \lambda(\vartheta)$ .

证明 对  $\alpha = 0$  的情形. 任给  $e > 0$ , 取邻域  $\Omega_e = \{\|x\| < e, x \in \Omega\}$ , 并记  $c = c(\varepsilon)$

$= \min_{0 \leq t \leq T, x \in \partial \Omega_e} V(t, x)$ 。由条件 i) 知  $c > 0$ , 再由  $V(t, 0) = 0$  和  $V(t, x)$  的连续性得, 存在  $\delta = \delta(c) > 0, \delta < e$ , 使得当  $\|x(0)\| < \delta$  时, 有  $x(0) \in \Omega_e$  和  $V(0, x(0)) < c$ 。

又由条件 ii) 得,  $V(t, x)$  沿方程(4) 的解  $x(t)$  不增, 故只要取  $t = 0$  时从  $x(0) \in \Omega_e$  出发的解  $x(t)$ , 就有

$$V(t, x(t)) \leq V(0, x(0)) < c \quad (0 \leq t < t^*)$$

由于  $c$  是  $V(t, x)$  在  $[0, t^*] \times \partial \Omega_e$  上的最小值, 故上式表明, 对于  $0 \leq t < t^*$ , 方程(4) 的解曲线  $x(t)$  都不会达到  $\partial \Omega_e$ , 更不会离开  $\Omega_e$ , 从而必有  $\|x(t)\| < e, 0 \leq t < t^*$ 。所以方程(4) 的解  $x(t)$  当  $t \in [0, t_{nc})$  时将保持在  $x = 0$  的邻域内。另一方面, 由所给的条件和非自治系统的 Liapunov 不稳定性定理[12],  $x = 0$  不稳定且(4) 的解  $x(t)$  将最终离开  $\Omega_e$ , 即  $x = 0$  失稳。

总之, (4) 的解  $x(t)$  将在  $t$  附近发生分岔转迁, 所以有  $t_{nc} \approx t$ , 从而  $\lambda_{nc} \approx \lambda(\vartheta)$ 。对充分小的  $\alpha$ , 亦有类似的结果。这可由微分方程的解对参数  $\alpha$  的连续性得到。证毕。

下面给出三个基本的结论:

i) 当  $\varepsilon, \alpha$  充分小且  $\lambda_{nc} \approx \lambda_c$  时, 方程(4) 的分岔曲线与方程(3) 的定常分岔图大致相同。但是如果  $\lambda_{nc} > \lambda_c$ , 那么方程(4) 就发生了分岔转迁滞后现象; 反之, 如果  $\lambda_{nc} < \lambda_c$ , 那么就出现了分岔转迁超前现象。

ii) 对于  $x = 0$  的邻域内的初值, 方程(4) 的解  $x(t)$  的运动最初基本上是在方程(3) 的平衡解  $x = 0$  的邻域内的线性运动, 随后是在分岔转迁值  $\lambda_{nc}$  附近的非线性跃迁运动, 最后是在方程(3) 的稳定定常分岔解  $x_s(\lambda)$  的邻域内的线性运动。

iii) 由于方程(4) 在  $t_{nc}$  (或者  $\lambda_{nc}$ ) 处的分岔转迁, 方程(4) 的  $x(t)$  会出现不同类型的稳定性交换和不同的趋向, 从而表现出对参数和初值的敏感性。

## 2 在 Duffing 方程中的应用

本节利用前面提出的新方法研究含时变参数的 Duffing 方程的非完全分岔问题, 分析其分岔转迁滞后现象。

考虑含时变参数的 Duffing 方程:

$$\ddot{x} + k\dot{x} = \lambda(\vartheta)x - x^3 + \alpha, \tag{12}$$

其中  $\lambda(\vartheta) = \lambda_0 + \vartheta$  ( $\lambda_0 < 0$ ) 是慢变频率,  $k$  是阻尼系数,  $\alpha$  是常值力。方程(12) 代表一个含慢变系数和三次强非线性项的振动方程, 它也是一个典型的含时变参数的非完全分岔问题,  $\lambda(\vartheta)$  是分岔参数,  $\alpha$  是非完全分岔参数, 表示扰动的大小。

对应于方程(12) 的退化定常分岔问题是:

$$\dot{x} + kx = \lambda x - x^3, \tag{13}$$

其中  $\lambda$  为常数。通过线性化稳定性理论分析易知,  $x = 0$  当  $\lambda = 0$  时是(13) 的非双曲平衡解, 当  $\lambda < 0$  时渐近稳定, 当  $\lambda > 0$  时不稳定。当  $\lambda > 0$  时还分岔出两个新的渐近稳定的双曲平衡解  $x = \pm \sqrt{\lambda}$ 。(13) 的分岔图是超临界的叉形分岔, 分岔点是  $(x_c, \lambda_c) = (0, 0)$ , 见图 1。图中还标出了叉形分岔的各平衡解的吸引域。

方程(12) 的等价系统是:

$$\dot{x} = y, \dot{y} = \lambda(\vartheta)x - ky - x^3 + \alpha \tag{14}$$

我们先讨论方程(12) 所代表的质点运动过程。据第 2 节给出的结论, 对给定的充分小的参数  $\varepsilon, \alpha$  和初值  $x(0) = x_0, x'(0) = y_0$ , 质点最初是在(13) 的零平衡解  $x = 0$  的邻域内作一段

时间的缓慢的线性振动, 然后是在分岔转迁值附近作非线性的迅速跃迁, 最后是在方程(13)的稳定定常分岔解  $x = \pm\sqrt{\lambda}$  之一的邻域内作缓慢的线性振动. 不难得出方程(12)的线性化近似振动解为

$$\begin{aligned}
 x &= A_1 e^{-kt/2} \cos \left[ \int_0^t \sqrt{-k^2 - 4\lambda(\vartheta)} dt + \varphi_1 \right] + o(\alpha) \quad (t < t_{nc}), \\
 x &= \pm \sqrt{\lambda(\vartheta)} + A_2 e^{-kt/2} \cos \left[ \int_0^t \sqrt{-k^2 + 8\lambda(\vartheta)} dt + \varphi_2 \right] + o(\varepsilon, \alpha) \quad (t > t_{nc}),
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

其中  $A_1, A_2, \varphi_1, \varphi_2$  由初值确定.

其次我们研究参数  $\varepsilon, \alpha$  对方程(12)的分岔转迁值的影响. 对充分小的  $\alpha$ , 注意到由于  $\lambda = \varepsilon > 0$ , 方程(12)的解曲线总以小速率横穿定常分岔点  $(x_c, \lambda_c) = (0, 0)$  的邻域(参看图2), 故通常会导致  $\lambda_{nc} > \lambda_c$ , 即分岔转迁出现滞后现象. 但对较大的  $\alpha$ , 方程(12)的分岔转迁有可能提前于定常分岔出现. 为确定方程(12)在  $\alpha = 0$  时的分岔转迁值  $\lambda_{nc}$ , 我们作函数

$$V(t, x, y) = y^2/2 - \lambda(\vartheta)x^2/2 + x^4/4,$$

据定理3, 可由式

$$V_{(14)} = -\varepsilon^2/2 - ky^2 \leq 0, \quad V_{(14)} = V_0 - \int_0^t (\varepsilon^2/2 + ky^2) dt \geq 0 \tag{16}$$

确定分岔转迁临界时间  $t_{nc}$ , 进而确定分岔转迁值  $\lambda_{nc} = \lambda(\vartheta_{nc})$ . 于是  $t_{nc}$  应至少满足

$$\int_0^{t_{nc}} (\varepsilon^2/2 + ky^2) dt \leq V_0 = V(0, x_0, y_0).$$

由此还可见(12)的分岔转迁值  $\lambda_{nc}$  一般会对初值和参数具有敏感性, 这是与一阶时变分岔方程(见文[8, 9])不同的性质.

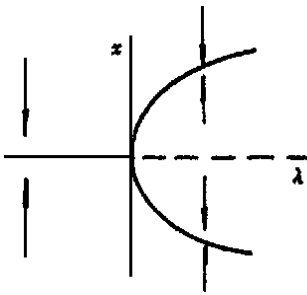


图1 方程(13)的分岔图:  
叉形分岔

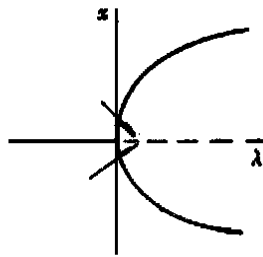
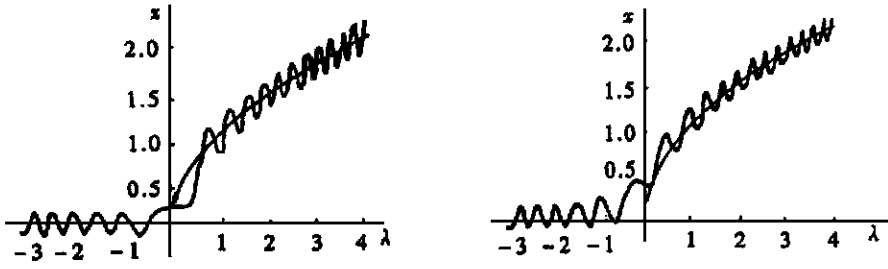


图2 方程(12)的解曲线横穿定常分岔点  $(x_c, \lambda_c) = (0, 0)$

最后我们研究方程(12)的运动对参数和初值的敏感性. 若  $y(\lambda_{nc}) = \varepsilon \cdot \frac{dx}{d\lambda} \Big|_{\lambda_{nc}} > 0$  (或  $< 0$ ), 则(12)的解  $x(t)$  (与  $\varepsilon, \alpha, k, x_0, y_0$  有关) 在分岔转迁值  $\lambda_{nc}$  附近将随  $\lambda(\vartheta)$  增加而单调增加(或减少), 由  $x = 0$  的邻域转而进入到  $x_{s1} = \sqrt{\lambda}$  (或  $x_{s2} = -\sqrt{\lambda}$ ) 的吸引域  $D_+ = \{(x, \lambda) \mid x > 0, \lambda > 0\}$  (或  $D_- = \{(x, \lambda) \mid x < 0, \lambda > 0\}$ ) 内(见图1), 再据定理2,  $x(t)$  必将很快地由  $x = 0$  的邻域转迁到(13)的稳定定常分岔解  $x_{s1} = \sqrt{\lambda}$  (或  $x_{s2} = -\sqrt{\lambda}$ ) 的邻域内. 这说明最后的运动状态是由给定的参数  $\varepsilon, \alpha, k$ , 初值  $x_0, y_0$  和速度  $y(\lambda_{nc})$  的符号和  $x_{s1} = \sqrt{\lambda}$  (或  $x_{s2} = -\sqrt{\lambda}$ ) 的吸引域共同决定的, 从而表现出对参数和初值的敏感性. 应当指出, 这种现象是确定性的, 而不是随机性的.



(a)  $\alpha = 0$ , 分岔转迁滞后,  $\lambda_{nc} \approx 0.4$       (b)  $\alpha = 0.1$ , 分岔转迁超前,  $\lambda_{nc} \approx -0.25$

图3  $\alpha$  对方程(12)的分岔转迁的影响 ( $\lambda = -3 + 0.1t$ ,  
 $k = 0.001, x(0) = -0.1, y(0) = 0.0$ )

数值结果完全证实了以上的分析。图3表明非完全分岔参数  $\alpha$  对分岔转迁的明显影响。随着  $\alpha$  增大, 分岔转迁值左移。图4给出了方程(12)的运动对参数和初值的敏感性。图4的参数取为:  $\lambda = -3 + 0.08t, \alpha = 0$ , 上、下分支的初值也不同于图3, 分别为:  $x(0) = -0.33, y(0) = 0.63564, k = 0.1$  和  $x(0) = -0.33, y(0) = 0.63563, k = 0.11$ , 图4中的分岔转迁是滞后的, 且分别有  $\lambda_{nc} \approx 0.4$  和  $\lambda_{nc} \approx 1.4$ 。这些分岔转迁值是按(16)计算得到的。图4还给出了方程(12)的线性近似解(用虚线表示)以便比较。

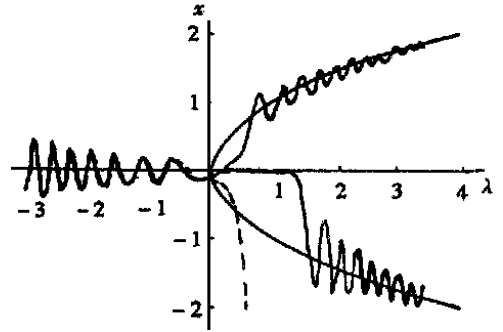


图4 方程(12)的运动对参数和初值的敏感性 ( $\lambda = -3 + 0.08t, \alpha = 0$ )

### 3 结论与讨论

本文通过建立时变参数系统的解的线性近似定理分析时变分岔方程的分岔转迁滞后和跃迁现象, 利用  $V$  函数预测分岔转迁值(即失稳值)。本文的新方法应用于 Duffing 方程, 得到了若干新的结论, 特别是解对参数和初值的敏感性。因为在文献[1~5]的方程中都不含有非完全分岔参数  $\alpha$ , 所采用的研究方法又都是经典的, 所以他们的摄动分析得不出围绕退化定常分岔问题的平衡解的振动基本上是线性振动的结论, 更不能对分岔转迁值的预测和分岔方程的解对参数和初值的敏感性等从根本上作出理论解释。本文的方法具有一般性, 可用于更为广泛的时变分岔问题, 对此我们将另文讨论。

#### [参 考 文 献]

- [1] Harberman R. Slowly\_varying jump and transition phenomena associated with algebraic bifurcation problems[J]. SIAM J Appl Math, 1979, 37(1): 69—106.
- [2] Virgin L N. Parametric studies of the dynamic evolution through a fold[J]. J Sound and Vibration, 1986, 110(1): 99—109.
- [3] Maree G J M. Slow passage through a pitchfork bifurcation[J]. SIAM Appl Math, 1996, 56(3): 889—918.
- [4] Maree G J M. Sudden exchange in a second\_order nonlinear system with a slowly\_varying parameter [J]. Int J Non\_Linear Mechanics, 1993, 28(5): 1117—1133.

- [5] Lebovitz N R, Pesci A I. Dynamic bifurcation in Hamiltonian systems with one degree of freedom[J]. SIAM J Appl Math, 1995, **55**(4): 69—100.
- [6] Mandel P, Erneux T. Laser\_Lorenz Equations with a time\_dependent parameter[J]. Phys Rey Lett, 1984, **53**(19): 1818—1820.
- [7] Erneux T, Mandel P. Stationary harmonic, and pulsed operations of an optical bistable laser with saturable absorber, II[J]. Phys Rev A, 1984, **30**(4): 1902—1909.
- [8] Erneux T, Mandel P. Imperfect bifurcation with a slowly varying control parameter[J]. SIAM J Appl Math, 1986, **46**(1): 1—15.
- [9] Mandel P, Erneux T. The slow passage through a steady bifurcation Delay and memory effects[J]. J Statistical Physics, 1987, **48**(5/6): 1059—1071.
- [10] 化存才, 陆启韶. 抽运参数随时间慢变所诱发 Laser\_Lorenz 方程的分岔与光学稳态[J]. 物理学报, 1999, **48**(3): 408—415.
- [11] Wiggins S. Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos [M]. New York: Springer\_Verlag, 1990.
- [12] 陆启韶. 常微分方程定性方法与分叉[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1989.

## Imperfect Bifurcation of Systems With Slowly Varying Parameters and Application to Duffing' s Equation

HUA Cun\_cai, LU Qi\_shao

(School of Science, Beijing University of Aeronautics and  
Astronautics, Beijing 100083, P R China)

**Abstract:** A new method is proposed for essentially studying the imperfect bifurcation problem of nonlinear systems with a slowly varying parameter. By establishing some theorems on the solution approximated by that of the linearized system, the delayed bifurcation transition and jump phenomena of the time\_dependent equation were analyzed.  $V$ \_function was used to predict the bifurcation transition value. Applying the new method to analyze the Duffing' s equation, some new results about bifurcation as well as that about the sensitivity of the solutions with respect to initial values and parameters are obtained.

**Key words:** time\_dependent parametric system; bifurcation transition; imperfect bifurcation; Duffing' s equation