文章编号: 1000_0887(2000) 09_942_07

一类抛物型 H_半变分不等式*

刘振海

(长沙电力学院 数学系, 长沙 410077)

(张石生推荐)

摘要: 研究一类拟线性抛物型 H_半变分不等式, 即研究具有非凸、非光滑泛函的抛物型变分不等式. 这类问题的研究来自力学. 利用 Clarke 广义梯度和伪单调算子理论, 证明了一类拟线性抛物型H_半变分不等式解的存在性.

关 键 词: 抛物型 H_半变分不等式; 多值映象; 存在性结果
中图分类号: O175.25　　文献标识码: A

引　　言

设 Ω 是 N_维欧氏空间 R^N 中有界开子集, $0 < T < \infty$, $2 \leqslant p < \infty$, $Q = \Omega \times (0, T)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. 为了方便起见, 往下记 $V = W_0^{1,p}(\Omega)$, $V' = W^{-1,p'}(\Omega)$. 那么, V 在 $L^p(\Omega)$ 中稠且紧嵌入于 $L^p(\Omega)$. 记 $\|\cdot\|_B$ 为任何给定 Banach 空间 B 的范数, $\langle\cdot, \cdot\rangle_B$ 表示 B 和其对偶空间 B' 之对偶积. 对任何 $r > 0$, 我们用 $L^r(I, B)$ 表示 $I = [0, T]$ 到 B 的满足 $\int_I \|b(t)\|_B^r \mathrm{d}t < +\infty$ 的可测函数 $b(t)$ 的全体. 令 $X = L^p(I, V)$, $X' = L^{p'}(I, V')$ (见[1], p412).

定义算子 $A: X \to X'$, 由下列微分算子产生:

$$\langle Au, v\rangle_X = \int_Q \sum_{i=1}^N a_i(x, t, u, \nabla u) \frac{\partial v}{\partial x_i} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_Q a_0(x, t, u, \nabla u) v\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \quad (\forall u, v \in X), \tag{1}$$

其中 $a_i(x, t, \eta, \zeta)$ $(i = 0, 1, \dots, N)$ 满足适当的正则性和增长性假设.
我们研究下列抛物型 H_半变分不等式:

问题(P): 寻求 $u \in X$, $u(0) = 0$, 使得

$$\langle \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}, v\rangle_X + \langle Au, v\rangle_X + \int_Q g^0(x, t, u, v)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \geqslant \langle f, v\rangle_X \quad (\forall v \in X),$$

其中 $f \in X'$, 算子 A 由(1) 定义, $g^0(x, t, \cdot, \cdot)$ 表示 Clarke 方向导数.

变分不等式理论日臻完善. 它的研究与能量泛函的凸性密切相关. 事实上, 变分不等式

* 收稿日期: 1998_12_27; 修订日期: 2000_04_15
基金项目: 留学归国人员基金和电力部新星基金资助项目, 湖南省自然科学基金资助项目(98JJY2053)
作者简介: 刘振海(1958—), 男, 湖南益阳人, 教授, 匈牙利科学院博士, 系主任.

解的存在性是基于单调方法[2~5]•

如果对应的能量泛函是非凸、不可微,这类不等式被称为H_半变分不等式• 它们的导出是基于 Clarke 广义梯度• 几类力学和物理学中导出的椭圆型 H_半变分不等式已有研究(见[6~9])•

然而,对抛物型H_半变分不等式的研究却刚刚起步• 就我们所知,仅仅最近,Miettinen[10]利用 Galerkin 方法证明了一类半线性抛物型H_半变分不等式解的存在性•

本文的目的是利用不同的方法,推广 Miettinen[10]的工作• 我们结合多值伪单调算子理论和 Clarke 广义梯度,证明问题(P)的解存在•

1 基本假设

对于 Banach 空间 B 上定义的局部 Lipschitz 函数 $h: B \to R$, 一般说来, 它既不凸也不可微• 对这类函数,可以定义广义方向导数(见[11, 12]):

$$h^0(u,v) = \limsup_{w\to u,\ \lambda\to 0^+} \lambda^{-1}[h(w+\lambda v) - h(w)] \qquad (u,v,w \in B)\,•$$

我们定义广义(Clarke)梯度

$$\partial h(u) = \left\{ w \in B' : h^0(u,v) \geqslant \langle w, v\rangle_B,\ \forall v \in B \right\}•$$

设 $g(x,t,s): Q\times R \to R$, 关于 (x,t) 在 Q 上是可测函数, 关于 s 在 R 上是局部 Lipschitz 函数; 并且在 Q 上几乎处处有 $g(x,t,0) = 0$• 则我们有

$$g^0(x,t,\zeta,\eta) = \limsup_{\xi\to\zeta,\ \lambda\to 0^+} \lambda^{-1}[g(x,t,\xi+\lambda\eta) - g(x,t,\xi)], \quad (\forall \xi,\eta,\zeta \in R)\,•$$

$$\partial g(x,t,\zeta) = \left\{ \eta \in R : g^0(x,t,\zeta,\xi) \geqslant \eta\xi,\ \forall \xi \in R \right\}•$$

我们还假设函数 g 满足下列增长性条件

H$_1$) $|w| \leqslant a_1 + a_2|s|^{p-1} \qquad (\forall w \in \partial g(x,t,s),\ s\in R,\ \text{a.e.}\,(x,t)\in Q)$,

其中 a_1, a_2 是正常数•

由假设H$_1$)和 Lebourg 中值定理(见[12, p41])推出

$$|g(x,t,s)| = |w(x,t,s)s| \leqslant a_1' + a_2'|s|^p \qquad (\forall s\in R,\ \text{a.e.}\,(x,t)\in Q),$$

其中 a_1', a_2' 是正常数,而 $w(x,t,s) \in \partial g(x,t,s)$, s 属于以0和 s 为端点的线段• 由此可知,泛函 $G: L^p(Q) \to R$ •

$$G(u) = \int_Q g(x,t,u(x,t))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \qquad (\forall u \in L^p(Q))\,•$$

在 $L^p(Q)$ 上是局部 Lipschitz 泛函• 它在点 u 的广义梯度是

$$\partial(G|_{L^p})(u) = \left\{ w \in L^{p'}(Q) : G^0(u,v) \geqslant \langle w,v\rangle_{L^p},\ \forall v \in L^p(Q) \right\},$$

其中 $$G^0(u,v) = \limsup_{w\to u,\ \lambda\to 0^+} \lambda^{-1}[G(w+\lambda v) - G(w)]\,•$$

往下我们还假设:

H$_2$) 函数 $a_i(x,t,\eta,\zeta)\ (i = 0,1,\dots,N)$ 满足 Caratheodory 条件,且有

$$|a_i(x,t,\eta,\zeta)| \leqslant k_1(x,t) + a|\eta|^{p-1} + a|\zeta|^{p-1}$$
$$(\text{a.e.}\,(x,t)\in Q,\ \forall \eta\in R,\ \zeta\in R^N),$$

其中 $k_1(x,t) \in L^{p'}(Q)$, a 是正常数•

H$_3$) 对于 a.e. $(x,t)\in Q$, $\forall \eta \in R$, $\zeta, \zeta' \in R^N$ 且 $\zeta \neq \zeta'$, 有

$$\sum_{i=1}^{N}(a_i(x,t,\eta,\zeta)-a_i(x,t,\eta,\zeta'))(\zeta_i-\zeta_i')>0.$$

H$_4$) 存在正常数 γ 和 $k_2(x,t)\in L^1(Q)$, 使得

$$\sum_{i=1}^{N}a_i(x,t,\eta,\zeta)\zeta_i+a_0(x,t,\eta,\zeta)\eta\geqslant\gamma|\zeta|^p-k_2(x,t)$$

$$(\text{a.e.}(x,t)\in Q,\ \forall\eta\in R,\ \zeta\in R^N).$$

定义 $Lu=u'$, 且它的定义域 $D(L)=\{v\in X: v'\in X', v(0)=0\}$. 这里 u' 表示 u 的广义导数, 即:

$$\int_0^T u'(t)\varphi(t)\mathrm{d}t=-\int_0^T u(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t\quad(\forall\varphi\in C_0^\infty(0,T)).$$

那么,

$$\langle Lu,v\rangle_X=\int_0^T\langle u'(t),v(t)\rangle_v\mathrm{d}t\quad(u\in D(L),v\in X).$$

由[1]知, L 是稠定闭的极大单调线性算子.

由[11, p109]定理3.4, 有

$$\partial(G|_X)(u)\subseteq\partial(G|_{L^p})(u)\qquad(\forall u\in X).\tag{2}$$

为了方便起见, 我们给出

定义1.1 我们称算子 $A: X\to X'$, 关于 $D(L)$ 具有 (S_+)_性质, 如果下列条件满足: 对于任何 $\{u_n\}\subset D(L)$, 在 X 中 $u_n\to$(弱) u, 在 X' 中 $Lu_n\to$(弱) Lu 且

$$\limsup\langle Au_n,u_n-u\rangle_X\leqslant 0,$$

那么, 在 X 中有 $u_n\to u$.

定义1.2 设 X 是自反Banach空间, $L: D(L)\subseteq X\to X'$ 是线性稠定极大单调算子, 而 $T: X\to 2^{X'}\setminus\{\phi\}$ 是具有弱紧和凸值的多值算子. 我们称算子 T 关于 $D(L)$ 是伪单调, 如果下列条件满足:

对于任何 $\{u_n\}\subset D(L)$, 在 X 中 $u_n\to$(弱) u, 在 X' 中 $Lu_n\to$(弱) Lu 且 $w_n\in Tu_n$, $n\geqslant 1$, 在 X' 中 $w_n\to$(弱) w. 若

$$\limsup\langle w_n,u_n\rangle_X\leqslant\langle w,u\rangle_X,$$

则有 $W\in Tu$ 和 $\langle w_n,u_n\rangle_X\to\langle w,u\rangle_X$.

注: 令 $W=\{u\in X(=L^p(I,V)): u'\in X'(=L^{p'}(I,V))\}$. 在 W 中引进范数 $\|u\|_w=\|u\|_X+\|Lu\|_{X'}$, W 成为一个Banach空间且紧嵌入于 $L^p(Q)$ (见[1, p450]).

引理1.1[13] 假设H$_2$)~H$_4$)满足. 那么由(1)定义的算子 $A: X\to X'$ 是有界的连续算子, 并且关于 $D(L)$ 具有 (S_+) 性质.

引理1.2[14] 设 X 是自反Banach空间, $L: D(L)\subseteq X\to X'$ 是线性极大单调算子. $F: X\to 2^{X'}\setminus\{\phi\}$ 是具有弱紧和凸值的多值算子, 且满足有界、弱上半连续、强制性(即 $\inf\{\langle w,u\rangle_X: w\in F(u)\}/\|u\|_X\to\infty$, 当 $\|u\|_X\to\infty$ 时)条件. 若 F 关于 $D(L)$ 是多值伪单调算子, 那么, $R(L+F)=X'$ (即 $(L+F)(\cdot)$ 是满射).

2 主要结果

为了证明本文的主要定理, 我们首先证明

引理 2.1　设 H_1) 满足• 则下列不等式成立

$$G^0(u,v)\leqslant c(1+\|u\|_{L^p}^{p-1})\|v\|_{L^p}\qquad(\forall u,v\in L^p(Q)),\tag{3}$$

$$\|w\|_{L^{p'}}\leqslant c(1+\|u\|_{L^p}^{p-1})\qquad(\forall w\in\partial(G\mid L^p)(u),\ u\in L^p(Q)),\tag{4}$$

这里 c 是正常数•

证明　由文献[12] 命题 2.1.2 和 Hölder 不等式, 有

$$\begin{aligned}G^0(u,v)\leqslant&\int_Q g^0(x,t,u(x,t),v(x,t))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t=\\&\int_Q\max\Big\{w(x,t)v(x,t)\mid w\in\partial g(x,t,u(x,t))\Big\}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t\leqslant\\&\int_Q\max\Big\{|w(x,t)||v(x,t)|\ w\in\partial g(x,t,u(x,t))\Big\}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t\leqslant\\&\int_Q(a_1+a_2|u(x,t)|^{p-1})|v(x,t)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\leqslant\\&\Big[\int_Q(a_1+a_2|u(x,t)|^{p-1})^{p'}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big]^{1/p'}\|v\|_{L^p}=\\&c(1+\|u\|_{L^p}^{p-1})\|v\|_{L^p},\end{aligned}$$

其中 c 是一个正常数•　这就证明了(3)•

再利用[12] 命题 2.1.2 和(3) 式, 就有

$$\begin{aligned}\|w\|_{L^{p'}}=&\sup\Big\{\langle w,v\rangle_{L^p}:\ \|v\|_{L^p}\leqslant1\Big\}\leqslant\\&\sup\Big\{G^0(u,v):\ \|v\|_{L^p}\leqslant1\Big\}\leqslant\\&c(1+\|u\|_{L^p}^{p-1})\qquad(\forall w\in\partial(G\mid_{L^p})(u),\ u\in L^p(Q))\bullet\end{aligned}$$

到此为止, 我们就证明了引理 2.1•

众所周知, 在 Banach 空间 $V(=W_0^{1,p}(\Omega))$ 中, 我们可以定义等价范数

$$\|u\|_V=\Big(\int_\Omega|\nabla u|^p\mathrm{d}x\Big)^{1/p}\qquad(\forall u\in V)\bullet$$

并且, 有 Poincare 不等式[11, p62]

$$\Big(\int_\Omega|u|^p\mathrm{d}x\Big)^{1/p}\leqslant\rho\|u\|_v\qquad(\forall u\in V)\bullet$$

从而, 有

$$\|u\|_{L^p}\leqslant\rho\|u\|_X\qquad(\forall u\in X)\bullet\tag{5}$$

这里 ρ 是嵌入常数•

利用(2) 式, 对任何 $w\in\partial(G\mid_X)(u)\subseteq\partial(G\mid_{L^p})(u)$, 有

$$\langle w,u\rangle_X=\langle w,u\rangle_{L^p}\qquad(\forall u\in X),\tag{6}$$

即　$$\langle w,u\rangle_X=\int_Q wu\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\qquad(\forall u\in X)\bullet$$

由(5) 和(6), 对任何 $w\in\partial(G\mid_X)(u)$, 就有

$$\begin{aligned}\|w\|_{X'}=&\sup\Big\{\langle w,v\rangle_X:\ \|v\|_X\leqslant1\Big\}=\\&\sup\Big\{\langle w,v\rangle_{L^p}:\ \|v\|_X\leqslant1\Big\}\leqslant\\&\sup\Big\{\langle w,v\rangle_{L^p}:\ \|v\|_{L^p}\leqslant\rho\Big\}=\\&\sup\Big\{\rho\langle w,v\rangle_{L^p}:\ \|v\|_{L^p}\leqslant1\Big\}=\\&\rho\|w\|_{L^{p'}}\bullet\end{aligned}$$

因此，利用(4)式，我们有

$$\|w\|_{X'} \leqslant \rho\|w\|_{L^{p'}} \leqslant c\rho(1+\rho^{p-1}\|u\|_X^{p-1}) \qquad (\forall w \in \partial(G|_X)(u))· \tag{7}$$

现在，我们来证明

定理 2.2 设条件 $H_1)\sim H_4)$ 满足• 且 $\gamma - c\rho^p > 0$，其中 γ, c, ρ 分别是 $H_4)$，(4)，(5) 中出现的正常数• 则

$$\mathrm{Range}\{L + A + \partial(G|_X)\} = X'·$$

证明 因为 X 是自反 Banach 空间，由广义梯度的基本性质 1[11, p99]，$\partial(G|_X)(u)$ 是 X' 中的一个非空弱紧凸子集• 从而，$Au + \partial(G|_X)(u)$ 是 X' 中非空弱紧凸子集• 并且由引理 1.1 和(7) 式知算子 $A + \partial(G|_X)$ 是有界的• 而从广义梯度的基本性质6[见11, p99] 和引理2.1 容易推出 $A + \partial(G|_X)$ 是弱上半连续的•

往下证明算子 $A + \partial(G|_X)$ 关于 $D(L)$ 是伪单调的• 设$\{u_n\} \subset D(L)$，$u_n \to$ (弱) u，$Lu_n \to$ (弱) Lu，且 $w_n \in \partial(G|_X)(u_n)$，$n \geqslant 1$，满足

$$Au_n + w_n \to (\text{弱})\, y^* \tag{8}$$

$$\limsup\langle Au_n + w_n, u_n\rangle_X \leqslant \langle y^*, u\rangle_X· \tag{9}$$

由此可得

$$\limsup\langle Au_n + w_n, u_n - u\rangle_X \leqslant 0·$$

根据 lim sup 的定义，存在$\{\langle Au_n, u_n - u\rangle_X\}$ 的子序列$\{\langle Au_{n_k}, u_{n_k} - u\rangle_X\}$ 使得

$$\limsup\langle Au_n, u_n - u\rangle_X = \lim_{k\to\infty}\langle Au_{n_k}, u_{n_k} - u\rangle_X·$$

因此

$$\begin{aligned}\limsup\langle Au_n + w_n, u_n - u\rangle_X &\geqslant \limsup\langle Au_{n_k} + w_{n_k}, u_{n_k} - u\rangle_X \geqslant \\ &\liminf\langle Au_{n_k}, u_{n_k} - u\rangle_X + \liminf\langle w_{n_k}, u_{n_k} - u\rangle_X = \\ &\lim_{k\to\infty}\langle Au_{n_k}, u_{n_k} - u\rangle_X + \liminf\langle w_{n_k}, u_{n_k} - u\rangle_X \geqslant \\ &\limsup\langle Au_n, u_n - u\rangle_X + \liminf\langle w_n, u_n - u\rangle_X·\end{aligned}$$

所以，我们有

$$\limsup\langle Au_n, u_n - u\rangle_X + \liminf\langle w_n, u_n - u\rangle_X \leqslant 0· \tag{10}$$

利用(2)式，$w_n \in \partial(G|_{L^p})(u_n)$•

故 $w_n \in L^{p'}(Q)$•

因此，$\langle w_n, u_n - u\rangle_X = \langle w_n, u_n - u\rangle_{L^p}$• (11)

由$\{u_n\}$ 和$\{Lu_n\}$ 分别在 X 和 X' 中的弱收敛性和第 1 节的注，有

在 $L^p(Q)$ 中，$u_n \to u$• (12)

又由引理 2.1，$\{w_n\}$ 在$L^{p'}(Q)$ 中是有界序列• 所以

$$\liminf\langle w_n, u_n - u\rangle_X = \liminf\langle w_n, u_n - u\rangle_{L^p} = 0· \tag{13}$$

利用(10) 和(13) 式，我们就有

$$\limsup\langle Au_n, u_n - u\rangle_X \leqslant 0· \tag{14}$$

根据引理 1.1，就可推出

在 X 中，$u_n \to u$， (15)

在 X' 中，$Au_n \to Au$• (16)

再利用(8)，就有

在 X' 中，$w_n \to$ (弱) $y^* - Au$．　(17)

由(15)和(17)式，有

$$\lim_{n\to\infty}\langle w_n, u_n\rangle_X = \langle y^* - Au, u\rangle_X. \tag{18}$$

再利用[12, p29]命题 2.1.5，我们有

$$y^* \in Au + \partial(G|_X)(u)$$

和

$$\lim_{n\to\infty}\langle Au_n + w_n, u_n\rangle_X = \langle y^*, u\rangle_X.$$

这就证明了 $A + \partial(G|_X)$ 关于 $D(L)$ 是伪单调的．

最后，我们证明 $A + \partial(G|_X)$ 是强制的．设 $u \in X$，$w \in \partial(G|_X)(u)$．则由 $H_4)$ 和(7)，有

$$\langle Au + w, u\rangle_X \geqslant \gamma\|u\|_X^p - \int_Q k_2(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \|w\|_{X'}\|u\|_X \geqslant$$

$$\gamma\|u\|_X^p - c\rho(1 + \rho^{p-1}\|u\|_X^{p-1})\|u\|_X - \int_Q k_2(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \geqslant$$

$$(\gamma - c\rho^p)\|u\|_X^p - c\rho\|u\|_X - \int_Q k_2(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \tag{19}$$

由于 $\gamma - c\rho^p > 0$，有

$$\inf\frac{\{\langle Au + w, u\rangle_X, w \in \partial(G|_X)(u)\}}{\|u\|_X} \to \infty,\quad \text{当 } \|u\|_X \to \infty \text{ 时} \tag{20}$$

这就证明了 $A + \partial(G|_X)$ 是强制算子．因此，根据引理 1.2，有

$$\mathrm{Range}\{L + A + \partial(G|_X)\} = X'.$$

证毕．

定理 2.3　在定理 2.2 的条件之下，问题(P)至少存在一个解．

证明　由定理 2.2，对任何 $f \in X'$，存在 $u \in X \cap D(L)$ 使得

$$f \in Lu + Au + \partial(G|_X)(u),$$

即存在 $w \in \partial(G|_X)(u)$，使得

$$Lu + Au + w = f.$$

因此，就有

$$\langle Lu, v\rangle_X + \langle Au, v\rangle_X + \langle w, v\rangle_X = \langle f, v\rangle_X\quad (\forall v \in X). \tag{21}$$

根据[11, 12]，作为 Banach 空间 X 上的泛函 $G(u)$，有

$$G_X^0(u, v) = \lim_{w\to u,\ \lambda\to 0^+}\sup \lambda^{-1}[G(w + \lambda v) - G(w)]\quad (\forall u, v, w \in X)$$

和

$$G_X^0(u, v) \leqslant \int_Q g^0(x, t, u, v)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\quad (\forall u, v \in X). \tag{22}$$

而广义梯度

$$\partial(G|_X)(u) = \{w \in X' : G_X^0(u, v) \geqslant \langle w, v\rangle_X,\ \forall v \in X\}, \tag{23}$$

由(21)~(23)，我们就有 $u(0) = 0$

$$\langle\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}, v\rangle_X + \langle Au, v\rangle_X + \int_Q g^0(x, t, u, v)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \geqslant \langle f, v\rangle_X\qquad (\forall v \in X).$$

这就证明了定理．

[参 考 文 献]

[1] Zeidler E. Nonlinear Functional Analysis and Its Applications [M]. ⅡA and ⅡB. New York_Berlin_Heidelberg: Springer_Velag, 1990.

[2] 张石生. 变分不等式和相补问题理论及应用[M]. 上海: 上海科技出版社, 1991.

[3] ZHANG Cong_jun, ZHANG Shi_sheng. On recent developments and some open questions in the study of Browder_Hartman_Stampaccia variational inequality[J]. J Math Research and Exposition, 1995, **15**(3): 313—317.

[4] 王耀东. 变分不等方程[M]. 北京: 高等教育出版社, 1987.

[5] LIU Zhen_hai. Nonlinear evolution variational inequalities with nonmonotone perturbations[J]. Nonlinear Analysis, 1997, **29**(11): 1231—1236.

[6] 刘振海. 拟线性椭圆系统的H_半变分不等式[J]. 系统工程, 1996, **14**(6): 63—65.

[7] 刘振海. 拟线性椭圆型H_半变分不等式[J]. 应用数学和力学, 1999, **20**(2): 211—216.

[8] Panagiotopoulos P D. Hemivariational inequalities[A]. Applications in Mechanics and Engineering [M]. Berlin: Springer_Verlag, 1993.

[9] Panagiotopoulos P D. Coercive and semicoercive hemivariational inequalities[J]. Nonlinear Analysis, 1991, **16**: 209—231.

[10] Miettinen M. A parabolic hemivariational inequality[J]. Nonlinear Analysis, 1996, **26**(6): 725—734.

[11] 张恭庆. 临界点理论及其应用[M]. 上海: 上海科技出版社, 1986.

[12] Clarke F H. Optimization and Nonsmooth Analysis[M]. New York: Wiley, 1983.

[13] LIU Zhen_hai. Nonlinear degenerate parabolic equations[J]. Acta Math Hungar, 1997, **77**(1_2): 147—157.

[14] Ton B A. Nonlinear evolution equations in Banach spaces[J]. J Differential Equations, 1971, **9**(3): 608—618.

A Class of Parabolic Hemivariational Inequalities

LIU Zhen_hai

(Department of Mathematics, Changsha University of Electric Power,
Changsha 410077, P R China)

Abstract: Quasilinear parabolic hemivariational inequalities as a generalization to nonconvex functions of the parabolic variational inequalities are discussed. This extension is strongly motivated by various problems in mechanics. By use of the notion of the generalized gradient of Clarke and the theory of pseudomonotone operators, it is proved there exists at least one soluton.

Key words: parabolic hemivariational inequalities; multivalued mappings; existence results