

文章编号: 1000-0887(2000)09-0984-07

单广义位移的深梁理论和中厚板理论*

龚 克

(无锡工程设备研究所, 江苏 无锡 214035)

(吴培德推荐)

摘要: 经典的梁板弯曲理论由于未考虑横向剪切变形的影响而只能适用于细长梁和薄板, 传统的多广义位移的深梁理论和中厚板理论由于忽视了转角与挠度之间的内在关系而只能适用于短粗梁和中厚板。这两种理论存在着转角的独立性与不独立性之间的矛盾, 因而不相兼容。鉴于此从基本假设出发, 既考虑了横向剪切影响, 又确定了转角与挠度的关系, 导出了单广义位移的深梁理论和中厚板理论, 给出了几种简单梁的解析解, 并用数值算例验证了这一理论的适用性。

关键词: 梁; 板; 弯曲理论; 横向剪切影响; 通用有限单元

中图分类号: O341; TB301 文献标识码: A

引 言

梁和板是工程结构中应用最为广泛的构件, 经典的梁板弯曲理论已有一百多年的历史, 但由于其没有考虑到横向剪切变形的影响而只能适用于细长梁和薄板。随着工程技术的发展, 短粗梁和厚板的问题越来越多, 特别是涉及到高阶振动时, 梁和板的有效跨度将大大减小, 使得表面上看来是细长梁和薄板的问题, 实际上也成为短粗梁和厚板的问题。人们发现, 在这类问题中, 横向剪切变形起着不可忽视的作用, 因此, Timoshenko^[1]于 1921 年提出了具有两个广义位移的深梁理论, Reissner^[2]于 1944 年提出了具有三个广义位移的中厚板理论。这类理论均将转角作为独立的位移变量, 考虑了横向剪切变形的影响, 但由于其忽视了转角与挠度之间的内在关系, 与经典理论存在着位移的独立性与不独立性的矛盾, 只能适用于短粗梁和中厚板。这给实际的工程应用带来了一定的麻烦, 因此在采用有限元法进行工程计算时, 人们在不断地追求一种既适用于细长梁和薄板, 又适用于短粗梁和厚板的通用有限单元。本文将从基本假设出发, 导出一种适用范围更广、且只有一个广义位移的梁板弯曲理论。

1 单广义位移的深梁理论

1.1 基本假设

取梁的中心线为 x 轴, 梁的挠曲面为 xy 平面, 对梁的变形情况作如下假设:

- 1) 梁的中性轴的轴向位移不计, y 方向的挤压变形不计;
- 2) 变形前垂直于中心线的平面在变形后仍保持为平面(不一定垂直于挠曲线);
- 3) 剪切转角 γ 随 x 的二阶变化率不计。

* 收稿日期: 1998_10_01; 修订日期: 2000_06_03

作者简介: 龚克(1962—), 男, 江苏江阴人, 助理研究员, 硕士。

1.2 基本公式的推导

根据弹性理论的几何方程, 剪应变为

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x},$$

得位移分量为

$$u = - \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \gamma \right) y + f(y).$$

因为 w 仅为 x 的函数, 且根据第一条假设有 $f(y) = 0$, 所以

$$u = - \left(\frac{dw}{dx} - \gamma \right) y = - \phi y,$$

其中的 ϕ 即为梁的转角, 根据物理方程和平衡条件, 梁中的弯矩和剪力为

$$M = - D \frac{d\phi}{dx} = - D \left(\frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{d\gamma}{dx} \right),$$

$$Q = \frac{dM}{dx} = - D \left(\frac{d^3 w}{dx^3} - \frac{d^2 \gamma}{dx^2} \right),$$

式中的 $D = EI$ 为梁的弯曲刚度, 根据第三条假设, γ 的二阶导数为零, 又由第二条假设, γ 取横断面上的平均值, 有

$$\gamma = \frac{Q}{C} = - \frac{D}{C} \frac{d^3 w}{dx^3},$$

其中, $C = GAk'$ 为梁的剪切刚度, k' 为剪切系数, 对于特定的截面形状由剪切应变能相等的原理得到, 对于矩形截面而言, $k' = \frac{5}{6}$. 将上式回代到前面各式, 可以得到梁中物理量与挠度的关系

$$\phi = \frac{dw}{dx} + \frac{D}{C} \frac{d^3 w}{dx^3}, \tag{1}$$

$$M = - D \left(\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{D}{C} \frac{d^4 w}{dx^4} \right), \tag{2}$$

$$Q = - D \frac{d^3 w}{dx^3}, \tag{3}$$

且平衡方程为

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} = q. \tag{4}$$

1.3 几种简单梁的解析解

1) 均布载, 两端简支

$$w = \frac{q}{24D} x^4 - \frac{ql}{12D} x^3 - \frac{q}{2C} x^2 + \left(\frac{ql^3}{24D} + \frac{ql}{2C} \right) x,$$

$$\text{中点挠度 } w_{\max} = \frac{5ql^4}{384D} \left(1 + \frac{48}{5} \frac{D}{Cl^2} \right).$$

2) 均布载, 两端固支

$$w = \frac{q}{24D} x^4 - \frac{ql}{12D} x^3 + \left(\frac{ql^2}{24D} - \frac{q}{2C} \right) x^2 + \frac{ql}{2C} x,$$

$$\text{中点挠度 } w_{\max} = \frac{ql^4}{384D} \left(1 + 48 \frac{D}{Cl^2} \right).$$

3) 均布载, 悬臂梁

$$w = \frac{q}{24D}x^4 - \frac{ql}{6D}x^3 + \left(\frac{ql^2}{4D} - \frac{q}{2C} \right)x^2 + \frac{ql}{C}x,$$

$$\text{自由端挠度 } w_{\max} = \frac{ql^4}{8D} \left(1 + 4 \frac{D}{Cl^2} \right).$$

4) 悬臂梁, 自由端集中力

$$w = -\frac{P}{6D}x^3 + \frac{Pl}{2D}x^2 + \frac{P}{C}x,$$

$$\text{自由端挠度 } w_{\max} = \frac{Pl^3}{3D} \left(1 + 3 \frac{D}{Cl^2} \right).$$

5) 两端简支, 中点集中力

$$w = \begin{cases} -\frac{P}{12D}x^3 + \left(\frac{Pl^2}{16D} + \frac{P}{2C} \right)x & (0 \leq x \leq l/2), \\ \frac{P}{12D}x^3 - \frac{Pl}{4D}x^2 + \left(\frac{3Pl^2}{16D} - \frac{P}{2C} \right)x - \frac{Pl^3}{48D} + \frac{Pl}{2C} & (l/2 \leq x \leq l), \end{cases}$$

$$\text{中点挠度 } w_{\max} = \frac{Pl^3}{48D} \left(1 + 12 \frac{D}{Cl^2} \right).$$

6) 两端固支, 中点集中力

$$w = \begin{cases} -\frac{P}{12D}x^3 + \frac{Pl}{16D}x^2 + \frac{P}{2C}x & (0 \leq x \leq l/2), \\ \frac{P}{12D}x^3 - \frac{3Pl}{16D}x^2 + \left(\frac{Pl^2}{8D} - \frac{P}{2C} \right)x - \frac{Pl^3}{48D} + \frac{Pl}{2C} & (l/2 \leq x \leq l), \end{cases}$$

$$\text{中点挠度 } w_{\max} = \frac{Pl^3}{192D} \left(1 + 48 \frac{D}{Cl^2} \right).$$

1.4 单广义位移深梁理论的适用范围

下面以中点受集中载的简支梁为例, 验证本文理论的适用性。梁的横截面是以 a 为边长的正方形, 分别采用两种理论用有限元方法进行计算, 共划分 20 个单元。一是采用本文理论, 挠度用三次函数插值, 可导出单元刚度矩阵的显式^[3]; 另一种方法则采用具有两个广义位移的梁理论, 挠度和转角均采用线性插值。计算结果见图 1, 图中结果是以梁中点挠度与经典理论值之比给出的, 横坐标为梁的截面尺寸与梁长之比。

结果表明, 本文理论的结果在细长梁范围内与经典理论吻合, 在短粗梁范围内又与具有两个广义位移的深梁理论一致, 具有更广的适用范围。

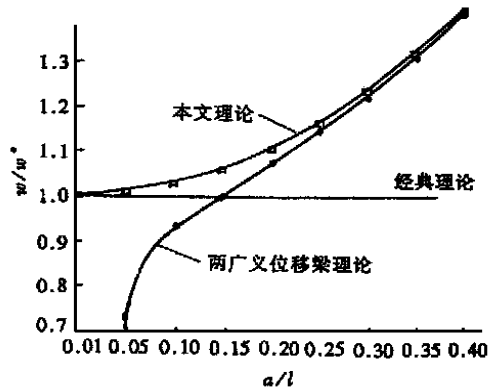


图 1 中点受集中载简支梁的最大挠度比

2 单广义位移的中厚板理论

2.1 基本假设

取板的中面为 xy 平面, z 轴垂直于 xy 平面按右手法则确定, 对板的变形作如下假设:

- 1) 挤压应力 α_z 是最次要的, 它所引起的形变可以不计; 挤压应变 ε_z 极其微小, 可以不计;
- 2) 应力分量 τ_{xz} , τ_{yz} 比较小, 其形变分量 v_{xz} , v_{yz} 随 x, y 的二阶导数可以不计, 并在板厚方向保持不变;

3) 中面位移不计

2.2 基本公式的推导

先考虑位移分量, 根据几何方程有

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \gamma_{zx}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \gamma_{yz}.$$

根据 1), 2) 两条基本假设, $w, \gamma_{zx}, \gamma_{yz}$ 与 z 无关, 即有

$$u = \left[\gamma_{zx} - \frac{\partial w}{\partial x} \right] z + f_1(x, y), \quad v = \left[\gamma_{yz} - \frac{\partial w}{\partial y} \right] z + f_2(x, y).$$

由第 3) 条基本假设, $f_1 = f_2 = 0$, 所以

$$u = -\phi_x z, \quad v = -\phi_y z, \tag{5}$$

其中的 ϕ_x, ϕ_y 即为中面法线的转角, 且

$$\phi_x = \frac{\partial w}{\partial x} - \gamma_{zx}, \quad \phi_y = \frac{\partial w}{\partial y} - \gamma_{yz}. \tag{6}$$

再考虑应变分量, 由几何方程有

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial \phi_x}{\partial x} z = \chi_{xz}, \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial \phi_y}{\partial y} z = \chi_{yz}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\left[\frac{\partial \phi_y}{\partial x} + \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \right] z = 2\chi_{xy} z, \end{aligned} \right\} \tag{7}$$

其中曲率及扭率的表达式为

$$\left. \begin{aligned} \chi_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial x}, \\ \chi_y &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial y}, \\ \chi_{xy} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right]. \end{aligned} \right\} \tag{8}$$

下面考虑应力分量, 因为不计 σ_z 引起的变形, 物理关系为

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y), \quad \gamma_{yz} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{yz}, \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x), \quad \gamma_{zx} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{zx}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \tag{9}$$

由前三式并将应变分量的表达式代入后即有

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial y} \right] \right], \\ \sigma_y &= -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial y} + \mu \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial x} \right] \right], \\ \tau_{xy} &= -\frac{Ez}{1+\mu} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right] \right]. \end{aligned} \right\} \tag{10}$$

然后导出横向剪应力的表达式, 因为不考虑纵向载荷, 根据平衡方程有

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}.$$

将(10)式代入,并按第2)条基本假设略去 v_{zx}, v_{yz} 的二阶导数,有

$$\frac{\partial \tau_x}{\partial z} = \frac{Ez}{1-\mu^2} \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] = \frac{Ez}{1-\mu^2} \frac{\partial}{\partial x} \dots^2 w,$$

$$\frac{\partial \tau_z}{\partial z} = \frac{Ez}{1-\mu^2} \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right] = \frac{Ez}{1-\mu^2} \frac{\partial}{\partial y} \dots^2 w.$$

注意到 w 不随 z 变化,有

$$\tau_x = \frac{Ez^2}{2(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \dots^2 w + F_1(x, y),$$

$$\tau_z = \frac{Ez^2}{2(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial y} \dots^2 w + F_2(x, y).$$

由板上下表面的边界条件, $z = \pm t/2$ 时, $\tau_{zx} = \tau_{yz} = 0$, 可以得到

$$\left. \begin{aligned} \tau_{zx} &= \frac{E}{2(1-\mu^2)} \left[z^2 - \frac{t^2}{4} \right] \frac{\partial}{\partial x} \dots^2 w, \\ \tau_{yz} &= \frac{E}{2(1-\mu^2)} \left[z^2 - \frac{t^2}{4} \right] \frac{\partial}{\partial y} \dots^2 w. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

最后利用物理关系(9)的后两式,得

$$v_{zx} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_x = \frac{1}{1-\mu} \left[z^2 - \frac{t^2}{4} \right] \frac{\partial}{\partial x} \dots^2 w,$$

$$v_{yz} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_z = \frac{1}{1-\mu} \left[z^2 - \frac{t^2}{4} \right] \frac{\partial}{\partial y} \dots^2 w.$$

为了与第2)条假设一致,可以采用 v_{zx}, v_{yz} 在厚度方向上的能量平均值 $\bar{v}_{zx}, \bar{v}_{yz}$, 根据 v_{zx} 产生的应变能相等, 即有方程

$$\int_{-t/2}^{t/2} v_{zx} \cdot \tau_x dz = \int_{-t/2}^{t/2} \bar{v}_{zx} \cdot \tau_x dz,$$

可以求得

$$\bar{v}_{zx} = - \frac{t^2}{5(1-\mu)} \frac{\partial}{\partial x} \dots^2 w = - \frac{D}{C} \frac{\partial}{\partial x} \dots^2 w, \quad (12a)$$

其中 $D = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}$ 为板的弯曲刚度, $C = \frac{5}{6}Gt$ 为板的剪切刚度, 相应地

$$\bar{v}_{yz} = - \frac{t^2}{5(1-\mu)} \frac{\partial}{\partial y} \dots^2 w = - \frac{D}{C} \frac{\partial}{\partial y} \dots^2 w. \quad (12b)$$

将(12)式回代到方程(6), 即有

$$\phi_x = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{D}{C} \frac{\partial}{\partial x} \dots^2 w, \quad \phi_y = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{D}{C} \frac{\partial}{\partial y} \dots^2 w. \quad (13)$$

这样我们就导出了中面法线转角与挠度的关系式, 将(13)式回代前面各式, 可得位移、应变、应力各分量以挠度 w 表示的公式, 也容易导出板中内力表达式为

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{D}{C} \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right] + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{D}{C} \left[\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right] \right], \\ M_y &= -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{D}{C} \left[\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right] + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{D}{C} \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right] \right], \\ M_{xy} &= -D(1-\mu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{D}{C} \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} \right] \right], \\ Q_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} \dots^2 w, \quad Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \dots^2 w. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

平衡方程为

$$D \nabla^4 w = q \quad (15)$$

需要说明的是, 这时不能采用重三角级数求解, 因不能满足第 2) 条假设的要求, 解析解是难以得到的。但在有限元计算中, 一般采用多项式函数进行插值, 只要插值函数为不超过四次的多项式, 即可满足第 2) 条假设的要求, 而且在有限单元内将剪切角假定为线性变化是完全合理的。

2.3 单广义位移中厚板理论的适用范围

下面以均布载作用下的四边简支方板的弯曲问题为例, 验证本文理论的适用性。采用本文理论按照经典方法构造十二自由度的矩形板单元^[4], 根据对称性只计算四分之一板块, 共采用了 4×4 和 10×10 两种网格划分, 计算结果见表 1。

表 1 均布载作用下简支方板的中心挠度 $w_c = (\text{表中数值}) \times \frac{q l^4}{100D}$

厚跨比 t/l	0.0001	0.001	0.01	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35
理论解	0.4062	0.4062	0.4062	0.4273	0.4536	0.4906	0.5379	0.5956	0.6641
本文(4×4)	0.4129	0.4129	0.4131	0.4343	0.4609	0.4982	0.5462	0.6048	0.6740
误差%	1.6	1.6	1.7	1.6	1.6	1.5	1.5	1.5	1.5
本文(10×10)	0.4073	0.4073	0.4075	0.4284	0.4548	0.4917	0.5391	0.5971	0.6657
误差%	0.27	0.27	0.32	0.26	0.26	0.22	0.22	0.25	0.24

表中给出了中心挠度的结果, 并与理论解进行了比较, 所谓理论解是指当厚跨比 $t/l \leq 0.01$ 时为经典理论的解, 当 $t/l \geq 0.1$ 时为厚板理论^[5]的解。表中结果表明, 本文理论的结果在薄板范围与经典理论吻合, 在中厚板范围内与厚板理论一致。这一算例说明, 本文理论从薄板到厚板均能适用。

另外, 作者曾采用这一理论构造了九自由度三角形板单元^[6], 在板的振动问题中进行了应用, 效果很好。

3 结 论

本文从基本假设出发, 既考虑了横向剪切变形的影响, 又确定了转角与挠度的关系, 导出了单广义位移的深梁理论和中厚板理论。通过算例说明: 这一理论是既适用于细长梁和薄板, 又适用于短粗梁和中厚板的通用的梁板弯曲理论, 采用这一理论所构造的有限单元即为通用单元。

[参 考 文 献]

[1] Timoshenko S P. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibration of prismatic bars[J]. Philosophical Magazine, 1921, 41: 744.
 [2] Reissner E. On the theory of bending of elastic plates[J]. Journal of Mathematics and Physics, 1944, 23: 184.
 [3] 龚克. 曲率位移非线性影响的数值分析及有限元通用单元[D]. 硕士论文. 长沙: 国防科技大学, 1986, 36-43.

- [4] 龚克. 十二自由度矩形板通用单元[A]. 见: 无锡市力学学会编: 无锡市力学学会学术交流会议论文集[C], 无锡, 1987.
- [5] 曹志远, 杨升田. 厚板动力学理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 1983, 297—383.
- [6] ZHOU Ke_jian, GONG Ke. A triangular finite element with 9_DOF in common use for thin and thick plate vibration problems[A]. In: DU Qing_hua Ed: Proceedings of the ICVPE_Xian [C]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 1986, 214—219.

Bending Theories for Beams and Plates With Single Generalized Displacement

GONG Ke

(Wuxi Institute of Engineering Equipment, Wuxi, Jiangsu 214035, P R China)

Abstract: Classical bending theories for beams and plates can not be used for short, stubby beams and thick plates since transverse shearing effect is excluded, and ordinary theories with multiple generalized displacements can not be used for long, slender beams and thin plates since the innate relation between rotation angle and deflection is ignored. These two types of theories are not consistent due to the contradiction of dependence and independence of the rotation angle. Based on several basic assumptions, a new type of theories which not only include the transverse shearing effect is presented, but also the relation between rotation angle and deflection is obtained. Analytical solutions of several simple beams are given. It has been testified by numerical examples that the new theories can be used for either long, slender beams and thin plates or short, stubby beams and thick plates.

Key words: beam; plate; bending theory; transverse shearing effect; universal finite element