文章编号: 1000_0887(2000) 08_0783_09

一类三角剖分下样条空间 $S_3^1(\Delta)$ 维数*

张湘伟[1], 林 意[2]

(1. 汕头大学 工学院 机电系, 广东 汕头 515063; 2. 无锡轻工业大学 信控系, 江苏 无锡 214036)

(我刊编委张湘伟来稿)

摘要: 首次提出了一种判别样条空间 $S_3^1(\Delta)$ 维数不依赖剖分几何性质的协调条件• 依此, 在一类较一般的三角剖分下, 获得了 $S_3^1(\Delta)$ 的维数•

关 键 词: 三角剖分; 样条空间; 协调方程
中图分类号: O189.12 文献标识码: A

引 言

样条空间 $S_3^1(\Delta)$ 的维数问题悬而未决[1], 文献[2] 提出了分层三角剖分下, $S_3^1(\Delta)$ 的维数不依赖剖分的几何性质• 本文通过对三角剖分拓扑性质的分析, 提出了一种更一般的三角剖分, 在这种剖分下, $S_3^1(\Delta)$ 的维数不依赖剖分的几何性质•

定义 1 设 Ω 为平面单连通多边形, $\Delta=\left\{T_i\right\}_{i=1}^r$ 为 Ω 的三角剖分• 对于 $0 \leqslant \mu \leqslant k-1$, 定义二元样条空间为:

$$S_k^\mu(\Delta)=\left\{S \in C^\mu(\Omega) \mid S \mid T_i \in H_k\right\}, \qquad i=1,2,\cdots,r,$$

其中 H_k 表示二元 k 次多项式的全体•

显然, Δ 中 T_i 的顶点有两种情况, 1° 顶点在 Ω 的边界上, 2° 顶点在 Ω 的内部• 若顶点在 Ω 的内部, 则叫内剖分点, 否则叫边界点• 而 T_i 的边又有两种情况, 1° 至少一个顶点在边界线, 2° 两个顶点都是内剖分点• 前者若仅有一个顶点在边界上, 称为边界剖分线, 后者称为内剖分线• 只有一个内剖分点的标准三角剖分[3] 叫域•

引理 1 设 Δ 是任意三角剖分, E、V 分别表示剖分线数和剖分点数• 若 E、V 有限, 则存在一内剖分点 O, 使得它至少是两条边界剖分线的公共顶点•

证明 设内剖分点 O_1 仅有一条剖分线与边界点 A 相连• 由于 Δ 是三角剖分, 所以 O_1 属于某个域 O_1, 即 O_1 至少与两个和边界相连的剖分点 O_{11}、O_{12} 相连• 如图 1 所示•

设 O_{11} 也仅有一条剖分线与边界相连, (否则取 O_{11} 便可), 又因 O_{11} 属于某个域 O_{11}, 所以 $O_{11}A$ 便为 O_{11} 与边界相连的剖分线• 于是 O_{11} 又与一个有一条剖分线与边界相连的内剖分点 O_{12} 相连• 如图 2 所示• 又因 O_{12} 属于某个域 O_{12}, 所以 $O_{12}A$ 便是这条连接边界的剖分线, 如图 2 所示•

* 收稿日期: 1999_06_26; 修订日期: 2000_04_25
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(59975057)
作者简介: 张湘伟(1950—), 男, 山西闻喜人, 教授, 工学博士, 博士生导师, 汕头大学校长.

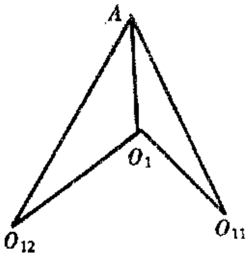


图 1

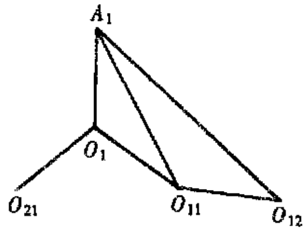


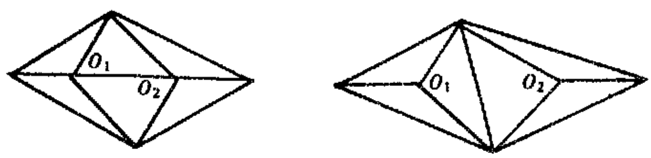
图 2

即 O_{11}, A, O_{12} 组成三角形 $\triangle O_{11}O_{12}A$, 故 $\angle AO_{11}O_{12} < 180°$•

同样 O_{12} 又同一个与边界有一条剖分线相连的剖分点 O_{13} 相连, 而且 $O_{13}A$ 便为剖分线, $\angle AO_{12}O_{13} < 180°$• 由此可见, 这样与边界相连的剖分点不断向 O_1O_{11} 一侧发散• 同理, O_{21} 也如此, 相应那些剖分点向 O_1O_{21} 一侧散发• 所以, 要么剖分点数 ⊳无限大, 要么存在一剖分点有二条或二条以上的边界剖分线与边界相连, (至少一条从 O_{1n} 方向来, 一条从 O_{2n} 方向来)• 由题设知, 引理成立•

1 三角剖分的拓扑性质

对于由二个内剖分点 O_1、O_2 组成的三角剖分有下列两种情况, 1° O_1O_2 为内剖分线, 2° O_1O_2 不是内剖分线, 如图 3 所示•



(a) (b)

图 3

定义 2 若 Δ 中任意二内剖分点, 可以用内剖分线联接起来, 则称三角剖分 Δ 为紧三角剖分•

显然, 图 3(a) 为紧三角剖分, 图 3(b) 不是紧三角剖分• 本文仅限于讨论紧三角剖分• 对非紧三角剖分, 结论不难推广•

把与边界相连的内剖分点记为 $V_1 = \left\{ Q_{1i} \mid i = 1, 2, \cdots, k \right\}$, 显然把这些剖分点按内剖分线相连便成一个拟圈 G'[2]• V_1 称为第 1 层内剖分点集• 若把第 1 层内剖分点中连接边界的剖分线去掉, 若仍成三角剖分, 则把其圈 C 作为边界点, 又可得第 2 层内剖分点集• 如此, 可得第 3 …第 n 层内剖分点集• 因此, 紧三角剖分为分层三角剖分•

引理 2 分层三角剖分为紧三角剖分•

证明 事实上, 若 O_1 在第 i 层, O_2 在第 j 层, 若 $i = j$, 则因 O_1、O_2 同在一个拟圈上, 故 O_1、O_2 有内剖分线相联• 若 $i \neq j$, 不妨设 $i < j$, 则第 i 层与第 $i+1$ 层有剖分点相连, 设 O_i'、O_{i+1}' 为第 i 层与第 $i+1$ 层相连的剖分点, 因而 O_i 与 O_{i+1}' 有内剖分线相连• 如此类推, O_i 与 O_j 有内剖分线相联•

定义 3 在紧三角剖分中, 若任意一层的三角剖分点有 3 条剖分线或 3 条以上剖分线与

上层剖分点相连, 对第 1 层剖分点, 有 3 条或 3 条以上剖分线与边界相连, 则称三角剖分为 L 型的•

2 三角剖分的协调方程

如图 4 所示, 设二维样条多项式 $S(x,y)$ 为:

$$S(x,y)=\begin{cases}p_1(x,y), & (x,y)\in\triangle AO_1O_2,\\ p_2(x,y), & (x,y)\in\triangle BO_1O_2\text{•}\end{cases}$$

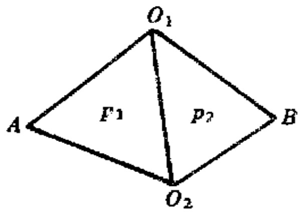


图 4

于是为了 $S(x,y)\in S_3^1(\Omega)$, 则其充分必要条件为: 存在 $Q(x,y)\in H^1(\Omega)$, 使得:

$$p_1(x,y)-p_2(x,y)=[l(x,y)]^2\cdot Q(x,y),$$

其中 $$l(x,y)=y-y_1-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

为 O_1O_2 的方程• $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ 为 O_1,O_2 的坐标• 令 $(y_2-y_1)/(x_2-x_1)=a$, 因为 $\left\{1,y-y_1,y-y_1+a(x-x_1)\right\}$ 是 $H^1(\Omega)$ 的基, 所以, 有:

$$Q(x,y)=C_{11}+C_{21}(y-y_1)+C_{22}[(y-y_1)+a(x-x_1)],$$

因而, 有:

引理 3 $S(x,y)\in S_3^1(\Delta)$ 的充要条件是存在 C_{11}、C_{21}、C_{22}, 使

$$p_1(x,y)-p_2(x,y)=[(y-y_1)-a(x-x_1)]^2\{C_{11}+C_{21}(y_2-y_1)+C_{22}[(y-y_2)+a(x-x_1)]\}\text{•}$$

这里, $S(x,y)$ 从 $p_1(x,y)$ 变化到 $p_2(x,y)$, 可以看成是 O_1 从 $\triangle AO_1O_2$ 到 $\triangle BO_1O_2$ 的• 同理, 绕 O_2 从 $\triangle AO_1O_2$ 到 $\triangle BO_1O_2$ 时, 由于 $\left\{1,y-y_2,y-y_2+a(x-x_2)\right\}$ 为 $H^1(\Omega)$ 的基• 故

$$Q(x,y)=C_{11}+C_{21}(y-y_2)+C_{22}[(y-y_2)+a(x-x_2)]$$

所以

$$p_2(x,y)-p_1(x,y)=[(y-y_2)-a(x-x_2)]^2\{C_{11}+C_{21}(y-y_2)+C_{22}[(y-y_2)+a(x-x_2)]\}\text{•}$$

因而, 有下列恒等式:

$$C_{11}+C_{21}(y-y_1)+C_{22}[(y-y_1)+a(x-x_1)]=-\{C_{11}+C_{21}(y-y_2)+C_{22}[(y-y_2)+a(x-x_2)]\}\text{•}$$

注意到: $y_1-ax_1=y_2-ax_2$, 因此

$$\left.\begin{aligned}&C_{11}+C_{11}+C_{21}(y-y_2)=0,\\&C_{21}-C_{21}=0,\\&C_{22}-C_{22}=0\text{•}\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

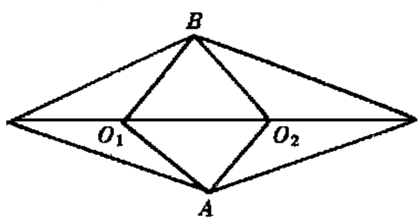


图 5

对于两个剖分点情况•

如图 5 所示, 域 O_1 中有 n_1 个三角形, 域 O_2 中有 n_2 个三角形, O_1 坐标设为 (x_1,y_1), O_2 坐标为 (x_2,y_2)• 首先分析 O_1 域情况• 把 $\triangle AO_1O_2$ 作为第 1 个三角形, 然后按逆时针排序• 设 $\triangle AO_1O_2$ 中 $S(x,y)=S_0(x,y)$•

于是在 $\triangle BO_1O_2$ 中, 即第 2 个三角形中:

$$S(x,y)=S_0(x,y)+[l_{11}(x,y)]^2\Big\{C_{111}^{(1)}+C_{121}^{(1)}(y-y_1)+ C_{122}^{(1)}[(y-y_1)+a_{11}(x-x_1)]\Big\},$$

其中 $C_{111}^{(1)}$、$C_{121}^{(1)}$、$C_{122}^{(1)}$ 是绕过 O_1O_2 而产生的系数, 称为 O_1O_2 的协调系数• $l_{11}(x,y)$ 是 O_1O_2 的方程• 同理, 从第 2 个三角形到第 3 个三角形后,

$$S(x,y)=S_0(x,y)+[l_{11}(x,y)]^2\Big\{C_{111}^{(1)}+C_{121}^{(1)}(y-y_1)+C_{122}^{(1)}[(y-y_1)+ a_{11}(x-x_1)]\Big\}+[l_{12}(x,y)]^2\Big\{C_{211}^{(1)}+C_{221}^{(1)}(y-y_1) + C_{222}^{(1)}[(y-y_1)+a_{12}(x-x_1)]\Big\}•$$

如此下去, 回到 $\triangle AO_1O_2$ 时便有:

$$\sum_{k=1}^{n_1}[l_{1k}(x,y)]^2\Big\{C_{k11}^{(1)}+C_{K21}^{(1)}(y-y_1)+ C_{k22}^{(1)}[(y-y_1)+a_{1k}(x-x_1)]\Big\}\equiv 0,\qquad 对\ \forall(x,y)\in\triangle AO_1O_2•$$

展开后, 令系数为 0, 则

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & & & & & & & \\ 2a_{11} & 2a_{12} & \cdots & 2a_{1n_1} & & & & & & & \\ a_{11}^2 & a_{12}^2 & \cdots & a_{1n_1}^2 & & & & & & & \\ & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ & & & & 2a_{11} & 3a_{11} & 2a_{12} & 3a_{12} & \cdots & 2a_{1n_1} & 3a_{1n_1} \\ & & & & a_{11}^2 & 3a_{11}^2 & a_{12}^2 & 3a_{12}^2 & \cdots & a_{1n_1}^2 & 3a_{1n_1}^2 \\ & & & & & a_{11}^3 & 0 & a_{12}^3 & \cdots & & a_{1n_1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_{111}^{(1)} \\ \vdots \\ C_{n_1 11}^{(1)} \\ C_{121}^{(1)} \\ C_{122}^{(1)} \\ \vdots \\ C_{n_1 21}^{(1)} \\ C_{n_1 22}^{(1)} \end{bmatrix}=0,\qquad (2)$$

同理, 对 O_2 域中绕 O_2 一圈后, 得:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & & & & & & & \\ 2a_{21} & 2a_{22} & \cdots & 2a_{2n_1} & & & & & & & \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n_2} & & & & & & & \\ & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ & & & & 2a_{21} & 3a_{21} & 2a_{22} & 3a_{22} & \cdots & 2a_{2n_2} & 3a_{2n_2} \\ & & & & a_{21}^2 & 3a_{21}^2 & a_{22}^2 & 3a_{22}^2 & \cdots & a_{2n_2}^2 & 3a_{2n_2}^2 \\ & & & & 0 & a_{21}^3 & 0 & a_{22}^3 & \cdots & 0 & a_{2n_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_{111}^{(2)} \\ \vdots \\ C_{n_2 11}^{(2)} \\ C_{121}^{(2)} \\ C_{122}^{(2)} \\ \vdots \\ C_{n_2 21}^{(2)} \\ C_{n_2 22}^{(2)} \end{bmatrix}=0•\qquad (3)$$

注意, $a_{2n_2}=a_{11}$ 为 O_1O_2 斜率•

于是, 联立(1)、(2)、(3) 便得下列方程组:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & & & \\ & A_{12} & & \\ & & A_{21} & \\ & & & A_{22} \\ B_{11} & \mathbf{0} & B_{12} & B_{13} \\ \mathbf{0} & B_{21} & \mathbf{0} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = 0, \tag{4}$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2a_{11} & 2a_{12} & \cdots & 2a_{1n_1} \\ a_{11}^2 & a_{12}^2 & \cdots & a_{1n_1}^2 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2a_{11} & 3a_{11} & 2a_{12} & 3a_{12} & \cdots & 2a_{1n_1} & 3a_{1n_1} \\ a_{11}^2 & 3a_{11}^2 & a_{12}^2 & 3a_{12}^2 & \cdots & a_{1n_1}^2 & 3a_{1n_1}^2 \\ 0 & a_{11}^3 & 0 & a_{12}^3 & \cdots & 0 & a_{1n_1}^3 \end{bmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2a_{21} & 2a_{22} & \cdots & 2a_{2n_2} \\ a_{21}^2 & a_{22}^2 & \cdots & a_{2n_2}^2 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2a_{21} & 3a_{21} & 2a_{22} & 3a_{22} & \cdots & 2a_{2n_2} & 3a_{2n_2} \\ a_{21}^2 & 3a_{21}^2 & a_{22}^2 & 3a_{22}^2 & \cdots & a_{2n_2}^2 & 3a_{2n_2}^2 \\ 0 & a_{21}^3 & 0 & a_{22}^3 & \cdots & 0 & a_{2n_2}^3 \end{bmatrix},$$

$$B_{11} = (1, 0, \cdots, 0), \quad B_{12} = (0, \cdots, 0, 1), \quad B_{13} = (0, \cdots, 0, y_1 - y_2, 0),$$

$$B_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{22} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(4) 式称为三角剖分的协调矩阵.

同理, 对 n 个剖分点的三角剖分, 协调方程为:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & & & & & & \\ & A_{12} & & & & & \\ & & A_{21} & & & & \\ & & & A_{22} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & A_{n1} & \\ & & & & & & A_{nn} \\ B_{11} & B_{11} & B_{12} & B_{12} & \cdots & B_{n1} & B_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{n1} & B_{n1} & B_{n2} & B_{n2} & \cdots & B_{nn} & B_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix} = 0, \tag{5}$$

其中,

$$B_{ij} = \begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

而* 为 0 或 1, 若 O_i 与 O_i' 相连时, 即 O_iO_i' 内剖分线时, 设它在 O_i 域是第 k 条剖分线, 则 B_{ij} 的

第 k 列的 * 为 1, 否则为0。 同样,

$$B_{ij}=\begin{bmatrix} V & 0 & \cdots & V & 0 \\ * & 0 & \cdots & * & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

这里* 取值同上, 即 O_iO_i' 为内部分线时, 相应位置 * 为1, 而且对应地 V 为 $y_i'-y_i$ ((x_i, y_i) 为 O_i 坐标, (x_i', y_i) 为 O_i' 坐标), 否则 * 为0, 而且相对应地 V 也为0。 若 $B_{i'i}$ 中 V 不为0, 则 $B_{i'i}$ 中的对应 V 为0。

3 L 型三角剖分下 $S_3^1(\Delta)$ 的维数

定理 L 型三角剖分下 $S_3^1(\Delta)$ 的维数不依赖于剖分的几何性质。

证明 作一坐标系, 使得所有内剖分线斜率都不为 0 或∞。

当内剖分点数 $n=1$ 时, 命题成立。

假设当内剖分点数 $n\leqslant k$ 时, 命题成立。

当内剖分点数 $n=k+1$ 时, 取边界点相连的内剖分点 O 进行分析, 如图 6 所示。 A, B, C 为边界点。

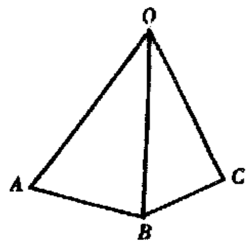


图 6

此时, 去掉 $\triangle OAB$ 和 $\triangle OBC$, 则三角剖分便成了 $n=k$ 个剖分点的 L 型三角剖分。 这时, 由归纳假设, 下列协调方程的系数矩阵 A 满秩。 即

$$\begin{bmatrix} A_{11} & & & & & & \\ & A_{12} & & & & & \\ & & A_{21} & & & & \\ & & & A_{22} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & A_{k1} & \\ & & & & & & A_{k2} \\ B_{11} & B_{11} & B_{12} & B_{12} & \cdots & B_{1k} & B_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{k1} & B_{k1} & B_{k2} & B_{k2} & \cdots & B_{1k} & B_{1k} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ C_k \end{bmatrix}=0, \tag{6}$$

有非零解。 这里注意到矩阵 A 的列数为 $14r_1+7r_2$, r_1 为内剖线, r_2 为边界剖分线数, 行数为 $10k$。 列数 - 行数 $=7(r_1+r_2)+7r_1-10k$, 而 r_1+r_2 为剖分线数, 由欧拉定理, $r_1+r_2\geqslant 3k$, 故列数 - 行数 >0。

注意到当把 $\triangle AOB$、$\triangle BOC$ 拼回剖分时, 除了增加剖分域 O 外, 其余没有变化, 因而, 这时协调方程为:

$$
A^*C^* = \begin{bmatrix}
A_{11} & & & & & & & & \\
 & A_{12} & & & & & & & \\
 & & A_{21} & & & & & & \\
 & & & A_{22} & & & & & \\
 & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & & A_{k1} & & & \\
 & & & & & & A_{k2} & & \\
 & & & & & & & A_{k+1\,1} & \\
 & & & & & & & & A_{k+1\,2} \\
B_{11} & B_{11} & B_{12} & B_{12} & \cdots & B_{1k} & B_{1k} & B_{1\,k+1} & B_{1\,k+1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
B_{k1} & B_{k1} & B_{k2} & B_{k2} & \cdots & B_{kk} & B_{kk} & B_{k\,k+1} & B_{k\,k+1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
B_{k+1\,1} & B_{k+1\,1} & B_{k+1\,2} & B_{k+1\,2} & \cdots & B_{k+1\,k} & B_{k+1\,k} & B_{k+1\,k+1} & B_{k+1\,k+1}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} C_1^* \\ C_2^* \\ \vdots \\ \vdots \\ C_k^* \\ C_{k+1}^* \end{bmatrix} = 0, \tag{7}
$$

当 A^* 满秩时, 样条空间便有固定维数了• 若 O 与 $O_1, O_2, \cdots, O_s$ 剖分点相连, 其剖分线斜率 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$, 而 OB, OA, OC 的斜率为 $\alpha_{s+1}, \alpha_{s+2}, \alpha_{s+3}$• 其余若 O 仍有与边界相连的剖分线, 则其斜率记为 $\alpha_{s+4}\cdots\alpha_{s+t}$, 此时, O_i 域的 A_{i1}, A_{i2} 比(6) 式中的 A_{i1}, A_{i2} 项多

$$
\begin{bmatrix} 1 \\ 2\alpha_i \\ \alpha_i^2 \end{bmatrix} \text{ 和 } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2\alpha_i & 3\alpha_i \\ \alpha_i^2 & 3\alpha_i^2 \\ & \alpha_i^3 \end{bmatrix}
$$

列, 其余 B_{ij}、B_{ij} 一样, 仍记为 B_{ij} 和 B_{ij}•

这样:

$$
A_{k+1\,1} = \begin{bmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
2\alpha_1 & 2\alpha_2 & \cdots & 2\alpha_s & 2\alpha_{s+1} & \cdots & 2\alpha_{s+t} \\
\alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_s^2 & \alpha_{s+1}^2 & \cdots & \alpha_{s+t}^2
\end{bmatrix},
$$

$$
A_{k+1\,2} = \begin{bmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
2\alpha_1 & 3\alpha_1 & \cdots & 2\alpha_s & 3\alpha_s & \cdots & 2\alpha_{s+t} & 3\alpha_{s+t} \\
\alpha_1^2 & 3\alpha_1^2 & \cdots & \alpha_s^2 & 3\alpha_s^2 & \cdots & \alpha_{s+t}^2 & 3\alpha_{s+t}^2 \\
 & \alpha_1^3 & \cdots & & \alpha_s^3 & \cdots & & \alpha_{s+t}^3
\end{bmatrix},
$$

而

$$
B_{k+1\,k+1} = \begin{bmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{bmatrix},
$$

$$
B_{k+1\,k+1} = \begin{bmatrix}
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0
\end{bmatrix}•
$$

取

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{k+1\,1} & \boldsymbol{A}_{k+1\,2} \\ \boldsymbol{B}_{k+1\,k+1} & \boldsymbol{B}_{k+1\,k+1} \end{pmatrix}$$

的子矩阵:

$$\begin{bmatrix}
1 & & & 1 & 1 & 1 & & & & & & \\
2\alpha_1 & & & 2\alpha_{s+1} & 2\alpha_{s+2} & 2\alpha_{s+3} & & & & & & \\
\alpha_1^2 & & & \alpha_{s+1}^2 & \alpha_{s+2}^2 & \alpha_{s+3}^2 & & & & & & \\
 & 1 & 1 & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & 2\alpha_1 & 3\alpha_1 & & & & 2\alpha_{s+1} & 3\alpha_{s+1} & 2\alpha_{s+2} & 3\alpha_{s+2} & 2\alpha_{s+3} & 3\alpha_{s+3} \\
 & \alpha_1^2 & 3\alpha_1^2 & & & & \alpha_{s+1}^2 & 3\alpha_{s+1}^2 & \alpha_{s+2}^2 & 3\alpha_{s+2}^2 & \alpha_{s+3}^2 & 3\alpha_{s+3}^2 \\
 & & \alpha_1^3 & & & & & \alpha_{s+1}^3 & & \alpha_{s+2}^3 & & \alpha_{s+3}^3 \\
1 & 0 & 0 & & & & & & & & & \\
0 & 1 & 0 & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 1 & & & & & & & & &
\end{bmatrix}\bullet$$

显然这子矩阵满秩• 又(6) 式中系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是式(7) 中系数矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的子矩阵• 由 $\boldsymbol{A}$ 满秩, 如矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 也满秩• 故, 由归纳法知, L 型样条 $S_3^1(\Delta)$ 维数不依赖剖分的几何性质• 获证•

推论 L 型三角剖分下, 样条空间 $S_3^1(\Delta)$ 的维数 $\dim S_3^1(\Delta) = 10 + 3V> - 7E>$, 其中 E>为剖分点数, V>为剖分线数•

证明 由文[2] 知, $\dim S_3^1(\Delta) = 10 + \|\boldsymbol{A}^*\|$, $\|\boldsymbol{A}^*\|$ 为(7) 解空间维数•

把矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 中的 $\boldsymbol{B}_{ij}$ 消去, 则得等价方程组:

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix}
\boldsymbol{A}_{11} & & & & & & \\
0 & \boldsymbol{A}_{12} & & & & & \\
\boldsymbol{K}_{21} & 0 & \boldsymbol{A}_{21} & & & & \\
0 & \boldsymbol{K}_{21} & 0 & \boldsymbol{A}_{21} & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & & \\
\boldsymbol{K}_{k+1\,1} & 0 & \boldsymbol{K}_{k+1\,2} & 0 & \cdots & \boldsymbol{A}_{k+1\,1} & \\
0 & \boldsymbol{K}_{k+1\,1} & 0 & \boldsymbol{K}_{k+1\,2} & \cdots & 0 & \boldsymbol{A}_{k+1\,2}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_1 \\ \boldsymbol{C}_2 \\ \cdots \\ \boldsymbol{C}_n \end{bmatrix} = 0\bullet \tag{8}$$

$\boldsymbol{A}^*$ 的行数为 7E>, 列数为 3V>, 因此由定理知(8) 式解空间维数为 3V>- 7E>, 即

$$\dim S_3^1(\Delta) = 3V> - 7E> + 10\bullet$$ 获证•

从以上分析可看出, 样条函数 $S_3^1(\Delta)$ 在 L 型三角剖分下, 维数仅与剖分点和剖分线个数有关•

[参 考 文 献]

[1] 郭竹端, 贾荣庆. 多元样条研究中的 B网方法[J]. 数学进展, 1990, **19**(2): 189—198.

[2] 刘焕文. 二元样条的积分表示及分层三角剖分下二次样条空间的维数[J]. 数学学报, 1994, **37**(4): 534—543.

[3] Schumaker L L. In: Schemp W, Zeller K Eds. Multivariate Approximation Theory [C]. Boston: Birkhouse Verlag, 1979, 396—412.

The Dimension of Spline Space $S_3^1(\Delta)$ on a Type of Triangulation

ZHANG Xiang_wei[1], LIN Yi[2]

(1. Shantou University, Shantou, Guangdong 515063, P R China;
2. Wuxi University of Light Industry, Wuxi 214036, P R China)

Abstract: A harmonic condition that can distinguish whether the dimension of spline space $S_3^1(\Delta)$ depends on the geometrical character of triangulation is presented, then on a type of general triangulation the dimension is got.

Key words: triangulation; spline space; harmonic condition