应用数学和力学, 第 21 卷 第 8 期(2000 年 8 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2000) 08_0797_06

双解析函数、双调和函数和平面弹性问题*

郑神州[1], 郑学良[2]

(1. 北方交通大学 数学系, 北京 100044; 2 台州师范专科学校 数学系, 浙江临海 317000)

(何福保推荐)

摘要: 通过考虑双解析函数和双调和函数的关系, 对单连通区域上平面弹性问题中只有重力体力作用的应力函数建立了唯一性和存在性结果; 并对单位圆区域得到了类似于 Poisson 公式解的积分表示式•

关 键 词: Airy 函数; 双解析函数; 双调和函数; 解的唯一性; 解的积分表示式
中图分类号: O343. 32; O174. 5 文献标识码: A

1 平面弹性体的应力函数方程及定解条件

解析函数对平面弹性力学和流体力学问题有着重要的应用[1, 2, 3]• 对于有源有旋的向量场, 用文献[4, 5, 6]引入的双解析函数的方法来研究, 许多平面上的数学和物理问题将变得更为明确而又简洁• 本文通过研究双解析函数和双调和函数之间的关系, 来考察双解析函数在平面弹性理论问题中求解应力函数的一些重要应用•

平面弹性理论中, 一个最重要的问题是重力作为唯一体力的情形下的弹性平衡问题• 在此条件下, 文献[2, § 14, (19)]中用差分方法来建立二维弹性体平衡微分方程组如下:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}=0,\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\rho g=0, \tag{1}$$

这里的 ρ 为单位体积的质量, g 为重力加速度, σ_x、σ_y 为平面上分别平行于 x、y 的正应力分量, τ_{xy} 为剪应力分量• 在同样的条件下, 即物体所受的重力是唯一的体力时, 应力分量所表示的相容方程为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x+\sigma_y)=0, \tag{2}$$

参见文[2, § 16, 式(24)]• 而且此时的正应力分量、剪应力和单位面力所满足的边界条件是

$$X=l\sigma_x+m\tau_{xy},\ Y=m\sigma_y+l\tau_{xy}, \tag{3}$$

其中 X 和 Y 为边界 Γ 上一点处单位面力的坐标分量, 而 l、m 为边界 Γ 上的法向余弦, 参见文[2, 式(20)]•

通过引入应力函数 $\Phi(x, y)$(又称 Airy 函数), 使其满足

$$\sigma_x=\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}+\rho g y,\quad \sigma_y=\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}+\rho g y,\quad \tau_{xy}=-\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\partial y}•$$

* 收稿日期: 1998_09_02; 修订日期: 2000_02_02
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(49805005); 北方交通大学攀登计划资助项目
作者简介: 郑神州(1965—), 男, 浙江临海人, 副教授, 理学博士, 基础数学部副主任.

这样上述关于应力分量的平衡微分方程组(1)和相容方程(2),就可以转化为如下形式的关于应力函数 $\Phi(x,y)$ 的双调和方程,见文献[2,式(30)]·

$$\Delta\Delta\Phi=\frac{\partial^4\Phi(x,y)}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\Phi(x,y)}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\Phi(x,y)}{\partial y^4}=0,\qquad (x,y)\in\Omega,\tag{4}$$

相应的边界条件(3)成为

$$\Phi|_\Gamma=\mu(x,y),\ \left.\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right|_\Gamma=\nu(x,y),\qquad (x,y)\in\partial\Omega\cdot\tag{5}$$

另一方面,如果所受的体力为较一般的情形:当体力是一个有势场时· 假设 X、Y 代表单位体积的体力分量,则有

$$X=-\frac{\partial V(x,y)}{\partial x},\quad Y=-\frac{\partial V(x,y)}{\partial y}\cdot$$

其中 $V(x,y)$ 是一个势函数· 于是应力函数由如下关系确定

$$\sigma_x-V=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2},\quad \sigma_y-V=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2},\quad \tau_{xy}=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\cdot$$

将上式应力函数代入相应的相容方程,得到

$$\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4}=-(1-\kappa)\left(\frac{\partial^2V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2V}{\partial y^2}\right),\tag{6}$$

其中 κ 是一个被称为泊松比的常数,它的值由材料本身决定;而其边界条件仍同(5)·

特殊地,当体力只有重力时,这时势函数 $V=-\rho gy$· 于是式(6)就是方程(4)了· 为方便,我们不妨将方程(6)的右端记为

$$f(x,y)=-(1-\kappa)\left(\frac{\partial^2V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2V}{\partial y^2}\right)\cdot$$

2 双解析函数和双调和函数

用 $\mathbf{C}$ 来表示复平面,Ω 为 $\mathbf{C}$ 上的一个区域,记:

$$z=x+\mathrm{i}y\in\Omega,\ f(x,y)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right),\ \frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

和平面Laplace 算子 $\Delta=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$· 根据解析函数理论的有关结果,一个函数 $f(x,y)$ 为解析函数的充要条件是 $\partial f/\partial z=0$,易从此方程得到其实函数方程组的表示(即 Cauchy_Riemann 方程组):

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\cdot$$

定义 2.1 设复区域 $\Omega\subset\mathbf{C}$,$W(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)\in C^2(\Omega,\mathbf{C})$· 如果 $W(z)$ 满足复微分方程

$$\frac{\partial^2W}{\partial z^2}=0,\qquad z\in\Omega,\tag{7}$$

我们就称 $W(z)$ 为区域 Ω 上的双解析函数· 本文中把 Ω 上所有双解析函数用函数类 $\mathscr{D}^2(\Omega)$ 来表示,

从此定义可知,解析函数类是双解析函数类 $\mathscr{D}^2(\Omega)$ 的子集· 为了更明白地观察方程(7)所反映的实形式下所表示的意义,我们进一步考察其实方程形式,将复函数 $W(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 和算子

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

形式地代入(7), 得到实形式方程组

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=2\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x\partial y},\\&\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2}=-2\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\partial y}.\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

方程组(8)是双解析函数所对应的实形式方程表示, 其表示形式正好与 Cauchy_Riemann 方程组对应. 这里我们暂且称其为重 C_R 方程组.

进一步地考察方程组(8), 将其方程组两边分别求两阶偏导数 $\partial^2/\partial x^2$, $\partial^2/\partial y^2$ 和 $\partial^2/\partial x\partial y$, 得到

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial x^4}-\frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial x^2\partial y^2}-2\frac{\partial^4 v(x,y)}{\partial x^3\partial y}=0,\\&\frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial x^2\partial y^2}-\frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial y^4}-2\frac{\partial^4 v(x,y)}{\partial x\partial y^3}=0,\\&\frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial x^3\partial y}-\frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial x\partial y^3}-2\frac{\partial^4 v(x,y)}{\partial x^2\partial y^2}=0,\\&\frac{\partial^4 v(x,y)}{\partial x^4}-\frac{\partial^4 v(x,y)}{\partial x^2\partial y^2}+2\frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial x^3\partial y}=0,\\&\frac{\partial^4 v(x,y)}{\partial x^2\partial y^2}-\frac{\partial^4 v(x,y)}{\partial y^4}+2\frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial x\partial y^3}=0,\\&\frac{\partial^4 v(x,y)}{\partial x^3\partial y}-\frac{\partial^4 v(x,y)}{\partial x\partial y^3}+2\frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial x^2\partial y^2}=0.\end{aligned}$$

从上述方程组中的第1、第2和第6个方程, 可得到

$$\Delta\Delta u(x,y)=\frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial y^4}=0.\tag{9}$$

同样地, 从方程第3、第4和第5, 可得到

$$\Delta\Delta v(x,y)=\frac{\partial^4 v(x,y)}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 v(x,y)}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 v(x,y)}{\partial y^4}=0.\tag{10}$$

为了下面分析的方便, 也为了与解析函数有个比较, 正象解析函数的实部和虚部满足互为共轭的调和方程一样, 我们将从双解析函数得到的一对双调和方程(9)和(10)并称为互为共轭的双调和方程.

3 双调和方程在定解条件下解的唯一性

对于双调和方程(4)或更一般的非齐次方程(6), 在相应的定解条件(5)下, 我们考虑其解的唯一性问题. 如果方程除了解 $\Phi(x,y)$ 外, 还有另一个解 $\Phi_1(x,y)$. 我们令 $\Phi_0(x,y)=\Phi(x,y)-\Phi_1(x,y)$, 则 $\Phi_0(x,y)$ 适合于具有相应齐次边界的齐次方程, 所以原问题的唯一性就成为关于齐次边界的齐次方程的零解问题.

定理 3.1(唯一性定理) 设 Ω 是平面 $\mathbf{R}^2$ 上一个区域, 记: $\Gamma=\partial\Omega$, n 为 $\partial\Omega$ 上的外法向. 如果双调和方程

$$\Delta\Delta\Phi_0=\frac{\partial^4\Phi_0(x,y)}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\Phi_0(x,y)}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\Phi_0(x,y)}{\partial y^4}=0,\qquad(x,y)\in\Omega$$

满足边界条件

$$\Phi_0|_\Gamma = 0, \quad \frac{\partial \Phi_0}{\partial n}\Big|_\Gamma = 0, \tag{11}$$

则 $\Phi_0(x, y) = 0, \ \forall (x, y) \in \Omega$•

证明 根据如下的 Green 第二积分公式,

$$\iint_\Omega (\psi\Delta\varphi - \varphi\Delta\psi)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \oint_\Gamma \left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)\mathrm{d}s, \tag{12}$$

这里 ds 表示 Γ 上的面积元素• 如果在上式中令 $\varphi = \Phi_0$, $\psi = \Delta\Phi_0$, 并由已知条件 $\Phi_0|_\Gamma = 0$, $\partial\Phi_0/\partial n|_\Gamma = 0$ 和 $\Delta\Delta\Phi_0 = 0$, 则有

$$\iint_\Omega (\Delta\Phi_0)^2 \mathrm{d}s = 0, \tag{13}$$

因此有 $\Delta\Phi_0 = 0$• 这说明了 Φ_0 是一个调和方程•

再次利用边界条件 $\Phi_0|_\Gamma = 0$, 于是有

$$\Phi_0(x, y) = 0, \qquad \forall (x, y) \in \Omega•$$

4 定解条件下解的存在性及表达式

假设 Ω 是单连通区域, 根据 Riemann 映照定理[7, Ch.6], 我们通过一个保角映射 $\phi: \Omega \to B \subset \mathbf{C}$, 将 Ω 映为复平面 $\mathbf{C}$ 上的一个单位圆 B• 进一步地, 对于保角映射 $\phi(z)$ (单叶的解析函数) 和双解析函数 $W(z)$ 的复合函数 $W \circ \phi(z)$ 仍是一个双解析函数• 事实上, 通过链规则: 设 $\xi = \phi(z)$, 由于 $\phi(z)$ 是解析函数: $\partial\phi/\partial\bar{z} = 0$, 所以

$$\frac{\partial(W\circ\phi)}{\partial\bar{z}} = \frac{\partial W(\xi)}{\partial\xi}\frac{\partial\phi}{\partial\bar{z}} + \frac{\partial W(\xi)}{\partial\bar{\xi}}\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial\bar{z}} = \frac{\partial W(\xi)}{\partial\bar{\xi}}\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial\bar{z}}•$$

再根据 $\partial^2 W(\xi)/\partial\bar{\xi}^2 = 0$, 则

$$\frac{\partial^2(W\circ\phi)}{\partial\bar{z}^2} = \left(\frac{\partial^2 W(\xi)}{\partial\xi\partial\bar{\xi}}\frac{\partial\phi}{\partial\bar{z}} + \frac{\partial^2 W(\xi)}{\partial\bar{\xi}^2}\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial\bar{z}}\right) + \frac{\partial^2\bar{\phi}}{\partial\bar{z}\partial\bar{z}} = 0•$$

注 从上面的运算过程可以看出: 两个双解析函数的复合运算不一定是双解析函数•

这样, 下面我们只须考虑单位圆上双调和方程解的有关问题• 我们从文献[4]知道双解析函数 $W(z)$ 可以表示为

$$W(z) = \bar{z}q_1(z) + q_2(z), \tag{14}$$

其中 $q_1(z)$, $q_2(z)$ 为任意的解析函数• 从而有

$$W(z) = |z|^2 \cdot \frac{q_1(z)}{z} + q_2(z) = (|z|^2 - a^2)\cdot p(z) + q(z), \tag{15}$$

这里 $p(z)$、$q(z)$ 都是解析函数, 则 a 为任意一个实数•

考虑双解析函数的式(15)表示, 取 $a = 1$• 根据本文第 2 节的讨论, 我们得出双调和方程的一种表示形式为

$$\Phi(x, y) = (r^2 - 1)U_1(x, y) + U_2(x, y), \tag{16}$$

这里的 $U_1(x, y)$、$U_2(x, y)$ 为两个实调和函数, 其中 $r^2 = x^2 + y^2$• 为了利用圆内调和方程边界问题解的 Poisson 积分表示, 我们将平面直角坐标表示化为极坐标表示形式, 于是定义在边界圆周上 ($r = 1$) 的函数只是极角 θ 的单变量的函数, 并且沿着边界法向 n 的导数等于沿着径向的导数, 即:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n}\Big|_{r=1} = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\Big|_{r=1}•$$

定理 4.1　设 B 是一个单位圆, $\partial B=\{(r,\theta)\mid r=1\}$, 那么双调和方程

$$\Delta\Delta\Phi=\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4}=0,\qquad (x,y)\in B, \tag{17}$$

满足边界条件

$$\Phi\mid_{r=1}=\mu(\theta),\ \frac{\partial\Phi}{\partial r}\Big|_{r=1}=\nu(\theta) \tag{18}$$

解的表达式为

$$\begin{aligned}\Phi(r,\theta)=&-\frac{(r^2-1)^2}{4\pi}\Bigg(\int_0^{2\pi}\frac{\nu(\phi)}{1-2r\cos(\theta-\phi)+r^2}\mathrm{d}\phi+\\&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mu(\phi)\,\mathrm{d}\phi\int_0^{2\pi}\frac{1}{(1-\cos(\omega-\phi))(1-2r\cos(\theta-\omega)+r^2)}\mathrm{d}\omega\Bigg)+\\&\frac{1-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mu(\phi)}{1-2r\cos(\theta-\phi)+r^2}\mathrm{d}\phi,\qquad\forall 0\leqslant r\leqslant 1,\ 0\leqslant\theta<2\pi\cdot\end{aligned}$$

证明　在极坐标下, 对于单位圆内的双调和函数, 我们用式(16) 的表示形式

$$\Phi(r,\theta)=(r^2-1)U_1(r,\theta)+U_2(r,\theta), \tag{19}$$

这里的 $U_1(r,\theta)$、$U_2(r,\theta)$ 分别都是调和函数•

我们首先将 Dirichlet 边界条件 $\Phi\mid_{r=1}=\mu(\theta)$ 代入上式(19), 得到

$$\Phi\mid_{r=1}=(1^2-1)U_1(\theta)+U_2(\theta)\mid_{r=1}=U_2(\theta)\mid_{r=1}=\mu(\theta),$$

上式表明关于调和函数 $U_2(r,\theta)$ 的 Dirichlet 边界值已求得, 由调和函数的 Poisson 公式得到

$$U_2(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(1-r^2)\mu(\phi)}{1-2r\cos(\theta-\phi)+r^2}\mathrm{d}\phi,\qquad\forall 0\leqslant r\leqslant 1,\ 0\leqslant\theta<2\pi\cdot \tag{20}$$

另一方面, 式(19) 两边关于 r 分别求偏导, 然而再将 Neumann 边界条件 $\partial\Phi/\partial r\mid_{r=1}=\nu(\theta)$ 代入之, 则有

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r}\Big|_{r=1}=\left(2rU_1+(r^2-1)\frac{\partial U_1}{\partial r}+\frac{\partial U_2}{\partial r}\right)\Big|_{r=1}=\left(2U_1+\frac{\partial U_2}{\partial r}\right)\Big|_{r=1}=\nu(\theta)\cdot \tag{21}$$

又因为从式(20) 的 $U_2(r,\theta)$ 对 r 求导得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_2}{\partial r}\Big|_{r=1}=&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big\{[(-2r)\mu(\phi)(1-2r\cos(\theta-\phi)+r^2)-\\&(1-r^2)\mu(\phi)(-2\cos(\theta-\phi)+2r)]/(1-2r\cos(\theta-\phi)+r^2)^2\Big\}\mathrm{d}\phi\mid_{r=1}=\\&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{-2\mu(\phi)(2-2\cos(\theta-\phi))}{(2-2\cos(\theta-\phi))^2}\mathrm{d}\phi=\\&-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mu(\phi)}{1-\cos(\theta-\phi)}\mathrm{d}\phi\cdot\end{aligned} \tag{22}$$

将式(22) 代入式(21), 得到

$$U_1\mid_{r=1}=\frac{1}{2}\left(\nu(\theta)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mu(\phi)}{1-\cos(\theta-\phi)}\mathrm{d}\phi\right)\cdot$$

再次对调和函数 $U_1(r,\theta)$ 用 Poisson 公式, 得到

$$\begin{aligned}U_1(r,\theta)=&\frac{1}{4\pi}\left(\int_0^{2\pi}\frac{(1-r^2)\nu(\phi)}{1-2r\cos(\theta-\phi)+r^2}\mathrm{d}\phi+\int_0^{2\pi}\frac{\frac{1-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mu(\phi)}{1-\cos(\omega-\phi)}\mathrm{d}\phi}{1-2r\cos(\theta-\omega)+r^2}\mathrm{d}\omega\right)=\\&\frac{1}{4\pi}\Bigg(\int_0^{2\pi}\frac{(1-r^2)\nu(\phi)}{1-2r\cos(\theta-\phi)+r^2}\mathrm{d}\phi+\\&\frac{1-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mu(\phi)\,\mathrm{d}\phi\int_0^{2\pi}\frac{1}{(1-\cos(\omega-\phi))(1-2r\cos(\theta-\omega)+r^2)}\mathrm{d}\omega\Bigg)\cdot\end{aligned}$$

于是我们得出双调和方程(17)在边界条件(18)的解为

$$\Phi(r,\theta)=-\frac{(r^2-1)^2}{4\pi}\left(\int_0^{2\pi}\frac{\nu(\phi)}{1-2r\cos(\theta-\phi)+r^2}d\phi+\right.$$
$$\left.\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mu(\phi)d\phi\int_0^{2\pi}\frac{1}{(1-\cos(\omega-\phi))(1-2r\cos(\theta-\omega)+r^2)}d\omega\right)+$$
$$\frac{1-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mu(\phi)}{1-2r\cos(\theta-\phi)+r^2}d\phi,\qquad \forall 0\leqslant r\leqslant 1,\ 0\leqslant\theta<2\pi. \tag{23}$$

[参 考 文 献]

[1] 路见可. 平面弹性复方法[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 1986, 35—79.

[2] 铁摩辛柯, 古地尔. 弹性理论[M]. 徐芝纶 译. 北京: 高等教育出版社, 1990, 65—132.

[3] 维库阿 I N. 广义解析函数[M]. 北京大学数力组 译. 北京: 人民教育出版社, 1960, 45—86.

[4] 赵桢. 双解析函数、复调和函数和其边值问题[J]. 北京师范大学学报, 1995, **31**(2): 175—179.

[5] ZHAO Zhen. Bianalytic functions and its applications[A]. In: Proceedings of the Second Asian Mathematical Conference[C]. Thailand, 1995.

[6] ZHAO Zhen. Schwarz's problem for some complex partial differential equations of second order[J]. Beijing Mathematics, 1996, **2**(1): 131—137.

[7] Ahlfors Lars V. Complex Analysis[M]. 2nd Edition. New York: McGraw_Hill Book Company, 1973, 236—285.

Bianalytic Functions, Biharmonic Functions and Elastic Problems in the Plane

ZHENG Shen_zhou[1], ZHENG Xue_liang[2]

(1. Department of Mathematics, Northern Jiaotong University, Beijing 100044, P R China;
2. Department of Mathematics, Taizhou Teacher's College, Linhai, Zhejiang 317000, P R China)

Abstract: Let the elastic body only be acted by gravity. By investigating the relations of bianalytic functions and biharmonic functions, the uniqueness and existence of the stress functions (Airy functions) are established in planar simple connected region. Moreover, the integral representation formula of the stress function in the unit disk of the plane is obtained.

Key words: Airy functions; bianalytic functions; biharmonic functions; the uniqueness of the solution; integral representation formula