应用数学和力学, 第 21 卷 第 8 期(2000 年 8 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2000) 08_0817_06

# 生产经济平衡点的极小本质集与本质连通区*

向淑文

(贵州大学 数学系, 贵阳 550025)

(张石生推荐)

摘要: 进一步研究了生产经济平衡的稳定性, 讨论了生产经济平衡"集合值"的稳定性, 证明了生产经济平衡点集至少存在一个极小本质集且每一极小本质集是连通的, 从而能够给出本质连通分支的存在性·

关 键 词: 生产经济; 极小本质集; 本质连通分支

中图分类号: O177.91, O225 文献标识码: A

## 引 言

在[1]中, Dierker 给出了纯交换经济的本质平衡的概念, 并证明了绝大多数纯交换经济的平衡点是本质的(在 Baire 纲的意义下)·

在[2]中, 提出了生产经济的本质平衡的概念, 并研究了平衡关于每一消费者的最大消费效用和初始禀赋及关于每一生产者的最大生产利润的稳定性, 在 Baire 纲意义下, 证明了绝大多数经济的平衡是本质的·

在本文中, 我们将进一步研究生产经济平衡点的稳定性, 有所不同的是: 第一, 我们将讨论平衡点集的本质集和本质连通分支; 第二, 我们将针对每一生产经济来考虑其平衡的本质性, 而不只是考虑绝大多数经济· 我们将讨论"集合值"的稳定性, 即将本质点改为寻找一个连通的本质集, 如极小本质集或本质连通分支, 这一方法已被广泛用于不动点和对策平衡点的稳定性研究(参见[3]~[7])· 并且, 已有的研究结果表明"集合值"的稳定性较之本质点更具实质性· 本文将运用这一方法研究著名的经济平衡问题, 证明了每一生产经济平衡点集至少存在一个极小本质集且每一极小本质集是连通的, 从而能够给出本质连通分支的存在性· 这些结果不再局限于绝大多数的情形, 而是针对每一生产经济· 当然, 所得结果还适用于纯交换经济的特殊情形·

生产经济的数学模型定义如下(参见 Debreu[8]):

设有 $l$ 种商品, 令 $P = \left\{ \boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_l) \in \mathbf{R}^l: x_h > 0, h = 1, \cdots, l \right\}$ 及 $L = (0, \infty)$· 集

* 收稿日期: 1998_10_26; 修订日期: 2000_01_10
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19771024); 贵州省自然科学基金资助项目(1999 3042)
作者简介: 向淑文(1965—), 男, 湖南怀化人, 副教授, 博士, 已发表纯粹数学与应用数学方面的论文 20 余篇.

合 $\Delta=\left\{x \in P: \sum_{h=1}^{l} x_h = 1\right\}$ 称为价格单形• 考虑 $m$ 个消费者和 $n$ 个生产者的生产经济• 设 $e_i \in P$ 为第 $i$ 个消费者的初始禀赋, 对给定的价格向量 $p \in \Delta$, 第 $i$ 个消费者选择他的最大消费效用 $\xi_i(p, p\cdot e_i) \subset P$, $i = 1, 2, \cdots, m$ ($p \cdot e_i$ 是 $p$ 和 $e_i$ 的内积), 第 $j$ 个生产者选择它的最大生产利润 $\eta_j(p) \subset \mathbf{R}^l$, $j = 1, \cdots, n$• 超额需求定义为

$$\zeta(p, e) = \sum_{i=1}^{m} \xi_i(p, p\cdot e_i) - \sum_{j=1}^{n} \eta_j(p) - \sum_{i=1}^{m} e_i,$$

这里 $e = (e_1, \cdots, e_m) \in P^m$ 且 $p \in \Delta$•

首先, 对于生产经济模型, 我们有下面的引理(参见[2]或[9])•

引理 1 设下列条件满足

(1) 对每一 $p \in \Delta$ 及 $\omega \in L$, $\xi_i(p, \omega)$ 是非空紧凸的且对每一 $i = 1, \cdots, m$, $\xi_i$ 在 $\Delta \times L$ 上上半连续;

(2) 对每一 $p \in \Delta$ 及 $\eta_j(p)$, $\eta_j(p)$ 是非空紧凸的且对每一 $j = 1, \cdots, n$, $\eta_j$ 在 $\Delta$ 上上有界且上半连续;

(3) 对每一 $p \in \Delta$ 及 $z \in \zeta(p, e)$, $p \cdot z = 0$(Walras 律);

(4) 对任一序列 $\left\{(p^k, \omega^k)\right\}_{k=1}^{\infty} \subset \Delta \times L$, 若 $(p^k, \omega^k) \to (p, \omega) \in (\bar{\Delta}/\Delta) \times L$, 则存在某一 $i$, 使得 $d(0, \xi_i(p^k, \omega^k)) = \inf_{u \in \xi_i(p^k, \omega^k)} \| u \| \to \infty$•

那么存在 $p^* \in \Delta$, 使得 $0 \in \zeta(p^*, e)$•

注 1 引理 1 中条件(4)是 Debreu[10](p.388)前提(A)的变化形式(也可参见 Tarafdar_Thompson[9])• 条件(4)意味着某一消费者对每一商品的需求•

设 $C$ 为满足引理 1 的形如 $G = (\xi_1, \cdots, \xi_m; \eta_1, \cdots, \eta_n)$ 的元素的全体, $h$ 为 $K(\mathbf{R}^l)$ 上的 Hausdorff 度量, 这里 $K(\mathbf{R}^l)$ 表示 $\mathbf{R}^l$ 中非空紧子集的全体• 令 $\mathscr{B}=\left\{O(G, \varepsilon): G \in C \text{ 且 } 0<\varepsilon<1\right\}$, 其中

$$O(G, \varepsilon) = \Big\{ G' = (\xi'_1, \cdots, \xi'_m; \eta'_1, \cdots, \eta'_n) \in C: \max_{1\leqslant i\leqslant m} \sup_{(p, \omega)\in \Delta\times L} h(\xi_i(p, \omega), \xi'_i(p, \omega)) + \max_{1\leqslant j\leqslant n} \sup_{p\in\Delta} h(\eta'_j(p), \eta_j(p)) < \varepsilon \Big\},$$

则 $\mathscr{B}$ 成为 $C$ 上一致收敛的拓扑基• 如果 $\varepsilon > 0$, 则 $\overline{O}(G, \varepsilon)$ 表示下述集合:

$$\Big\{ G' = (\xi'_1, \cdots, \xi'_m; \eta'_1, \cdots, \eta'_n) \in C: \max_{1\leqslant i\leqslant m} \sup_{(p, \omega)\in \Delta\times L} h(\xi_i(p, \omega), \xi'_i(p, \omega)) + \max_{1\leqslant j\leqslant n} \sup_{p\in\Delta} h(\eta'_j(p), \eta_j(p)) \leqslant \varepsilon \Big\},$$

易证 $\overline{O}(G, \varepsilon)$ 是 $O(G, \varepsilon)$ 的闭包•

令 $Y = C + P^m$, 则有

定义 1 设 $E = (\xi_1, \cdots, \xi_m; \eta_1, \cdots, \eta_n; e_1, \cdots, e_m) \in Y$, 则 $p \in \Delta$ 称为经济 $E$ 的平衡点, 如果

$$0 \in \sum_{i=1}^{m} \xi_i(p, p\cdot e_i) - \sum_{j=1}^{n} \eta_j(p) - \sum_{i=1}^{m} e_i\text{•}$$

用 $F_e(E)$ 表示每一经济 $E \in Y$ 的平衡点集, 则由引理 1, 知 $F_e(E) \neq \varnothing$, 于是研究平衡点集的稳定性, 即考虑集值映象 $F_e: Y \to 2^{\Delta}$ 的有关稳定性问题•

Tan, Yu, Yuan[2] 曾证明了下述结果:

引理 2 对每一 $E \in Y$, $F_e(E)$ 是紧集;

引理 3 $F_e$ 在 $Y$ 上是上半连续的•

# 1　主要结果

首先,我们给出一些定义:

定义 2　设 $\boldsymbol{E} \in Y$, $\boldsymbol{p} \in F_e(\boldsymbol{E})$, 如果对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得每一 $\boldsymbol{E}' \in Y$, 只要 $\boldsymbol{E}' \in O(\boldsymbol{E}, \delta)$, 就有 $\boldsymbol{p}' \in F_e(\boldsymbol{E}')$ 满足 $\|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}'\| < \varepsilon$; 则称 $\boldsymbol{p} \in F_e(\boldsymbol{E})$ 是 $\boldsymbol{E}$ 的本质平衡点•

定义 3　设 $\boldsymbol{E} \in Y$, $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{E})$ 为 $F_e(\boldsymbol{E})$ 的非空闭子集, 如果对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对每一 $\boldsymbol{E}' \in O(\boldsymbol{E}, \delta)$, 有 $U(\varepsilon, \boldsymbol{e}(\boldsymbol{E})) \cap F_e(\boldsymbol{E}') \neq \emptyset$ 成立; 则称 $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{E})$ 是 $\boldsymbol{E}$ 的本质平衡集, 简称本质集•

注 2　(1) 设 $\boldsymbol{e}_1(\boldsymbol{E})$, $\boldsymbol{e}_2(\boldsymbol{E})$ 是 $F_e(\boldsymbol{E})$ 的非空闭子集且 $\boldsymbol{e}_1(\boldsymbol{E}) \subset \boldsymbol{e}_2(\boldsymbol{E})$, 若 $\boldsymbol{e}_1(\boldsymbol{E})$ 为 $F_e(\boldsymbol{E})$ 的本质平衡集, 则 $\boldsymbol{e}_2(\boldsymbol{E})$ 也是 $F_e(\boldsymbol{E})$ 的本质平衡集•

(2) 若点 $\boldsymbol{p} \in F_e(\boldsymbol{E})$ 为 $F_e(\boldsymbol{E})$ 的某一本质平衡点, 则集 $\{\boldsymbol{p}\}$ 是 $F_e(\boldsymbol{E})$ 的本质平衡集•

(3) 若 $F_e(\boldsymbol{E})$ 的本质平衡集是一单点集, 则该点是 $F_e(\boldsymbol{E})$ 的本质平衡点•

(4) 若 $C$ 是 $F_e(\boldsymbol{E})$ 的某一连通分支, 并且 $C$ 还是 $F_e(\boldsymbol{E})$ 的本质平衡集, 则 $C$ 称为 $F_e(\boldsymbol{E})$ 的本质连通分支•

因为本质平衡集或本质连通分支中有可能包含更小的本质集, 甚至含有本质点, 因此, 我们将考虑极小本质平衡集的概念及其结构•

定义 4　设 $\boldsymbol{E} \in Y$, $m(\boldsymbol{E})$ 为 $F_e(\boldsymbol{E})$ 的非空闭子集, 则称 $m(\boldsymbol{E})$ 是 $F_e(\boldsymbol{E})$ 的极小本质平衡集(简称极小本质集), 如果以包含关系为序, $m(\boldsymbol{E})$ 是 $F_e(\boldsymbol{E})$ 的本质集族中的极小集•

注 3　若 $F_e(\boldsymbol{E})$ 的子集 $C$ 含有某一本质点 $\boldsymbol{p}$, 则 $C$ 是 $F_e(\boldsymbol{E})$ 的本质集, $\{\boldsymbol{p}\}$ 是 $F_e(\boldsymbol{E})$ 的极小本质集•

下面, 我们将证明本节的一些主要结果•

定理 1　对每一 $\boldsymbol{E} \in Y$, $F_e(\boldsymbol{E})$ 至少存在一极小本质集•

证明　由引理 2 及引理 3, 对每一 $\boldsymbol{E} \in Y$, 易知 $F_e(\boldsymbol{E})$ 为其自身的一个本质集, 用 $\mathscr{E}$ 表示 $F_e(\boldsymbol{E})$ 之所有本质集构成的集合族, 并在其上定义偏序关系为集合之间的包含关系•　由 $X$ 的紧性及 $F_e(\boldsymbol{E}) \subset X$ 闭, 易知 $F_e(\boldsymbol{E})$ 的每一本质集紧•　另外, 设 $\{\boldsymbol{e}_\alpha(\boldsymbol{E})\}_{\alpha \in \mathscr{E}}$ 为 $\mathscr{E}$ 中任一全序子族, 由每一 $\boldsymbol{e}_\alpha(\boldsymbol{E})$ 之紧性及有限交性质, 可知 $\boldsymbol{e}(E) = \bigcap_{\alpha \in \mathscr{E}} \boldsymbol{e}_\alpha(\boldsymbol{E}) \neq \emptyset$ 并为一紧集, 易证 $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{E})$ 为 $\{\boldsymbol{e}_\alpha(\boldsymbol{E})\}_{\alpha \in \mathscr{E}}$ 之下界, 因此, 由 Zorn 引理可证 $\mathscr{E}$ 上必有一极小集, 该极小集即为所求的极小本质集•　□

进一步, 可证明

定理 2　对每一 $\boldsymbol{E} \in Y$, $F_e(\boldsymbol{E})$ 的每一极小本质集连通•

证明　设 $m(\boldsymbol{E})$ 为 $F_e(\boldsymbol{E})$ 的某一极小本质集, 若 $m(\boldsymbol{E})$ 不连通, 则存在两个非空闭集 $c_1(\boldsymbol{E})$、$c_2(\boldsymbol{E})$ 及两个开集 $U_1 \supset c_1(\boldsymbol{E})$、$U_2 \supset c_2(\boldsymbol{E})$, 使得 $m(\boldsymbol{E}) = c_1(\boldsymbol{E}) \cup c_2(\boldsymbol{E})$ 且 $U_1 \cap U_2 = \emptyset$•　因为 $m(\boldsymbol{E})$ 是 $F_e(\boldsymbol{E})$ 之极小本质集, 所以 $c_1(\boldsymbol{E})$ 与 $c_2(\boldsymbol{E})$ 均不可能是本质的•　于是存在开集 $V_1$、$V_2$ 满足 $U_1 \supset V_1 \supset c_1(\boldsymbol{E})$、$U_2 \supset V_2 \supset c_2(\boldsymbol{E})$, 且对任给的 $\delta > 0$, 总有 $\boldsymbol{E}^\delta_1$、$\boldsymbol{E}^\delta_2 \in Y$ 满足 $\boldsymbol{E}^\delta_1$、$\boldsymbol{E}^\delta_2 \in O(\delta, \boldsymbol{E})$, 使得 $\boldsymbol{E}^\delta_1$ 在 $V_1$ 中没有平衡点且 $\boldsymbol{E}^\delta_2$ 在 $V_2$ 中没有平衡点•　再由 $c_1(\boldsymbol{E})$、$c_2(\boldsymbol{E})$ 的紧性, 可设 $c_1(\boldsymbol{E}) \subset V_1 \subset V_1 \subset U_1$, $c_2(\boldsymbol{E}) \subset V_2 \subset V_2 \subset U_2$•　令

$$\boldsymbol{E}^\delta_1 = (\xi^\delta_{11}, \cdots, \xi^\delta_{1m}; \eta^\delta_{11}, \cdots, \eta^\delta_{1n}; e^\delta_{11}, \cdots, e^\delta_{1m});$$

$$\boldsymbol{E}^\delta_2 = (\xi^\delta_{21}, \cdots, \xi^\delta_{2m}; \eta^\delta_{21}, \cdots, \eta^\delta_{2n}; e^\delta_{21}, \cdots, e^\delta_{2m})•$$

定义经济 $E^\delta$ 如下：

$$\xi_i^\delta(\boldsymbol{p},\omega)=\beta_1(\boldsymbol{p})\xi_{1i}^\delta(\boldsymbol{p},\omega)+\beta_2(\boldsymbol{p})\xi_{2i}^\delta(\boldsymbol{p},\omega),\qquad i=1,\cdots,m;\boldsymbol{p}\in\Delta;$$
$$\eta_j^\delta(\boldsymbol{p})=\beta_1(\boldsymbol{p})\eta_{1j}^\delta(\boldsymbol{p})+\beta_2(\boldsymbol{p})\eta_{2j}^\delta(\boldsymbol{p}),\qquad j=1,\cdots,n;\boldsymbol{p}\in\Delta;$$
$$e_i^\delta=\beta_1(\boldsymbol{p})e_{1i}^\delta+\beta_2(\boldsymbol{p})e_{2i}^\delta,\qquad i=1,\cdots,m;$$
$$\boldsymbol{E}^\delta=(\xi_1^\delta,\cdots,\xi_m^\delta;\eta_1^\delta,\cdots,\eta_n^\delta;\boldsymbol{e}_1^\delta,\cdots,\boldsymbol{e}_m^\delta);$$

其中

$$\beta_1(\boldsymbol{p})=\frac{d(\boldsymbol{p},V_2)}{d(\boldsymbol{p},V_2)+d(\boldsymbol{p},V_1)};\ \beta_2(\boldsymbol{p})=\frac{d(\boldsymbol{p},V_1)}{d(\boldsymbol{p},V_2)+d(\boldsymbol{p},V_1)}\cdot$$

下面我们将证明 $\boldsymbol{E}^\delta\in Y$:

(1) 由 $\xi_i^\delta$ 的定义, 易知对每一$(\boldsymbol{p},\omega)\in\Delta\times L$, $\xi_i^\delta(\boldsymbol{p},\omega)$ 是非空紧凸的• 同理可证 $\eta_j^\delta(\boldsymbol{p})$ 是非空紧凸的•

(2) 对每一$j=1,\cdots,n$, 因为 $\eta_{1j}^\delta$、$\eta_{2j}^\delta$ 在 $\Delta$ 上有界, 不难证明 $\eta_j^\delta$ 在 $\Delta$ 上也上有界•

(3) 对每一$i=1,\cdots,m$ 及每一固定的$(\boldsymbol{p},\omega)\in\Delta\times L$, 下证 $\xi_i^\delta$ 在$(\boldsymbol{p},\omega)$ 处上半连续• 对任给的 $\varepsilon>0$, 由 $\xi_{1i}^\delta$、$\xi_{2i}^\delta$ 的上半连续性, 存在开邻域 $O_1(\boldsymbol{p},\omega)$, 使得 $\xi_{1i}^\delta(\boldsymbol{p}',\omega')\subset U(\varepsilon/2,\xi_{1i}^\delta(\boldsymbol{p},\omega))$ 且 $\xi_{2i}^\delta(\boldsymbol{p}',\omega')\subset U(\varepsilon/2,\xi_{2i}^\delta(\boldsymbol{p},\omega))$• 因此, 对每一$(\boldsymbol{p}',\omega')\in O_1(\boldsymbol{p},\omega)$, 有

$$\begin{aligned}\xi_i^\delta(\boldsymbol{p}',\omega')=&\beta_1(\boldsymbol{p}')\xi_{1i}^\delta(\boldsymbol{p}',\omega')+\beta_2(\boldsymbol{p}')\xi_{2i}^\delta(\boldsymbol{p}',\omega')\subset\\&\beta_1(\boldsymbol{p}')U(\varepsilon/2,\xi_{1i}^\delta(\boldsymbol{p},\omega))+\beta_2(\boldsymbol{p}')U(\varepsilon/2,\xi_{2i}^\delta(\boldsymbol{p},\omega))\subset\\&\beta_1(\boldsymbol{p}')[\xi_{1i}^\delta(\boldsymbol{p},\omega)+B_{\varepsilon/2}(0)]+\beta_2(\boldsymbol{p}')[\xi_{2i}^\delta(\boldsymbol{p},\omega)+B_{\varepsilon/2}(0)]\subset\\&\beta_1(\boldsymbol{p}')\xi_{1i}^\delta(\boldsymbol{p},\omega)+\beta_2(\boldsymbol{p}')\xi_{2i}^\delta(\boldsymbol{p},\omega)+B_{\varepsilon/2}(0),\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\xi_i^\delta(\boldsymbol{p}',\omega')\subset&\beta_1(\boldsymbol{p})\xi_{1i}^\delta(\boldsymbol{p},\omega)+\beta_2(\boldsymbol{p})\xi_{2i}^\delta(\boldsymbol{p},\omega)+[\beta_1(\boldsymbol{p}')-\beta_1(\boldsymbol{p})]\xi_{1i}^\delta(\boldsymbol{p},\omega)+\\&[\beta_2(\boldsymbol{p}')-\beta_2(\boldsymbol{p})]\xi_{2i}^\delta(\boldsymbol{p},\omega)+B_{\varepsilon/2}(0)\subset\\&\xi_i^\delta(\boldsymbol{p},\omega)+[\beta_1(\boldsymbol{p}')-\beta_1(\boldsymbol{p})]\xi_{1i}^\delta(\boldsymbol{p},\omega)+\\&[\beta_2(\boldsymbol{p}')-\beta_2(\boldsymbol{p})]\xi_{2i}^\delta(\boldsymbol{p},\omega)+B_{\varepsilon/2}(0)\cdot\end{aligned}$$

由于 $\xi_{1i}^\delta(\boldsymbol{p},\omega)$、$\xi_{2i}^\delta(\boldsymbol{p},\omega)$ 紧, 并且由 $\beta_1$、$\beta_2$ 在 $\Delta$ 上连续, 知存在开邻域 $O_2(\boldsymbol{p})$, 使得对所有的 $\boldsymbol{p}'\in O_2(\boldsymbol{p})$, 总有$[\beta_1(\boldsymbol{p}')-\beta_1(\boldsymbol{p})]\xi_{1i}^\delta(\boldsymbol{p},\omega)\subset B_{\varepsilon/4}(0)$ 且$[\beta_2(\boldsymbol{p}')-\beta_2(\boldsymbol{p})]\xi_{2i}^\delta(\boldsymbol{p},\omega)\subset B_{\varepsilon/4}(0)$• 令 $O(\boldsymbol{p},\omega)=O_1(\boldsymbol{p},\omega)\cap\left\{(\boldsymbol{p}',\omega')\in\Delta\times L:\boldsymbol{p}'\in O_2(\boldsymbol{p})\right\}$• 则可推出, 当$(\boldsymbol{p}',\omega')\in O_1(\boldsymbol{p},\omega)$ 时, 有

$$\begin{aligned}\xi_i^\delta(\boldsymbol{p}',\omega')\subset&\xi_i^\delta(\boldsymbol{p},\omega)+[\beta_1(\boldsymbol{p}')-\beta_1(\boldsymbol{p})]\xi_{1i}^\delta(\boldsymbol{p},\omega)+[\beta_2(\boldsymbol{p}')-\beta_2(\boldsymbol{p})]\xi_{2i}^\delta(\boldsymbol{p},\omega)+\\&B_{\varepsilon/2}(0)\subset\xi_i^\delta(\boldsymbol{p},\omega)+B_{\varepsilon/4}(0)+B_{\varepsilon/4}(0)+B_{\varepsilon/2}(0)\subset\\&\xi_i^\delta(\boldsymbol{p},\omega)+B_\varepsilon(0)\subset U(\varepsilon,\xi_i^\delta(\boldsymbol{p},\omega)),\end{aligned}$$

因此, $\xi_i^\delta$ 在每一$(\boldsymbol{p},\omega)\in\Delta\times L$ 处上半连续• 类似可证 $\eta_j^\delta$ 在 $\Delta$ 上的上半连续性•

(4) 现证 $\zeta^\delta(\boldsymbol{p},\boldsymbol{e})$ 满足引理 1 的条件(3)• 定义超额需求为

$$\begin{aligned}\zeta^\delta(\boldsymbol{p},\boldsymbol{e})=&\sum_{i=1}^m\xi_i^\delta(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_i)-\sum_{j=1}^n\eta_j^\delta(\boldsymbol{p})-\sum_{i=1}^m\boldsymbol{e}_i=\\&\sum_{i=1}^m[\beta_1(\boldsymbol{p})\xi_{1i}^\delta(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_i)+\beta_2(\boldsymbol{p})\xi_{2i}^\delta(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_i)]-\\&\sum_{j=1}^n[\beta_1(\boldsymbol{p})\eta_{1j}^\delta(\boldsymbol{p})+\beta_2(\boldsymbol{p})\eta_{2j}^\delta(\boldsymbol{p})]-\sum_{i=1}^m\boldsymbol{e}_i=\end{aligned}$$

$$\beta_1(\boldsymbol{p})\zeta_1^\delta(\boldsymbol{p},\boldsymbol{e})+\beta_2(\boldsymbol{p})\zeta_2^\delta(\boldsymbol{p},\boldsymbol{e})\text{.}$$

对每一$\boldsymbol{p}\in\Delta$及每一$z\in\zeta(\boldsymbol{p},\boldsymbol{e})$, 存在$z_1\in\zeta_1^\delta(\boldsymbol{p},\boldsymbol{e})$、$z_2\in\zeta_2^\delta(\boldsymbol{p},\boldsymbol{e})$, 使得$z=\beta_1(\boldsymbol{p})z_1+\beta_2(\boldsymbol{p})z_2$. 由于$\zeta_1^\delta$、$\zeta_2^\delta$满足引理1的条件(3), 则有$\boldsymbol{p}\cdot z_1=\boldsymbol{p}\cdot z_2=0$. 由此可得$\boldsymbol{p}\cdot z=\boldsymbol{p}\cdot[\beta_1(\boldsymbol{p})z_1+\beta_2(\boldsymbol{p})z_2]=\beta_1(\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{p}\cdot z_1+\beta_2(\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{p}\cdot z_2=0$. 因此$\zeta^\delta$满足引理1的条件(3).

(5) 设$\left\{(p^k,\omega^k)\right\}_{i=1}^\infty$为$\Delta\times L$中任一序列, 满足$(p^k,\omega^k)\to(\boldsymbol{p},\omega)\in(\Delta/\Delta)\times L$. 注意到$\beta_1(\boldsymbol{p})+\beta_2(\boldsymbol{p})=1$对每一$\boldsymbol{p}\in\Delta$成立, 不失一般性, 可设$\beta_1(\boldsymbol{p})\geqslant 1/2$. 于是存在某一$N>0$, 使得$\beta_1(p^k)\geqslant 1/3$对所有的$k\geqslant N$成立. 又由$\xi_{1i}^\delta$满足引理1的条件(4), 则存在某一$i$, 使得

$$d(0,\xi_{1i}^\delta(p^k,\omega^k))=\inf_{u\in\xi_{1i}^\delta(p^k,\omega^k)}\|u\|\to\infty\text{.}$$

故对$\forall k\geqslant N$, 有

$$\begin{aligned}d(0,\xi_i^\delta(p^k,\omega^k))=\ &d(0,\beta_1(p^k)\xi_{1i}^\delta(p^k,\omega^k)+\beta_2(p^k)\xi_{2i}^\delta(p^k,\omega^k))\geqslant\\ &d(0,\beta_1(p^k)\xi_{1i}^\delta(p^k,\omega^k))\geqslant\\ &\frac{1}{3}d(0,\xi_{1i}^\delta(p^k,\omega^k))\to\infty\text{.}\end{aligned}$$

因此, 引理1的条件(4)得证.

综上, $(\xi_1^\delta,\dots,\delta_m^\delta;\eta_1^\delta,\dots,\eta_n^\delta)$满足引理1的全部条件, 从而$\boldsymbol{E}^\delta\in Y$.

由$\boldsymbol{E}^\delta$的定义, 可知$\boldsymbol{E}^\delta$在$V_1\cup V_2$中不存在平衡点. 若不然, 不妨设存在$\boldsymbol{p}^*\in V_1$, 使得

$$0\in\sum_{i=1}^m\xi_i^\delta(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{p}^*\cdot\boldsymbol{e}_i^\delta)-\sum_{j=1}^n\eta_j^\delta(\boldsymbol{p}^*)-\sum_{i=1}^m\boldsymbol{e}_i^\delta\text{.}$$

由$\boldsymbol{p}^*\in V_1\subset V_1$, 可得

$$\xi_i^\delta(\boldsymbol{p},\omega)=\xi_{1i}^\delta(\boldsymbol{p},\omega),\quad\eta_j^\delta(\boldsymbol{p})=\eta_{1j}^\delta(\boldsymbol{p})\text{ 且 }\boldsymbol{e}_i^\delta=\boldsymbol{e}_{1i}^\delta\text{.}$$

由此推出$0\in\sum_{i=1}^m\xi_{1i}^\delta(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{p}^*\cdot\boldsymbol{e}_i^\delta)-\sum_{j=1}^n\eta_{1j}^\delta(\boldsymbol{p}^*)-\sum_{i=1}^m\boldsymbol{e}_{1i}^\delta$, 从而$\boldsymbol{p}^*$是$\boldsymbol{E}_1^\delta$的平衡点, 产生矛盾. 另外, 由$\boldsymbol{E}_1^\delta$、$\boldsymbol{E}_2^\delta\in O(\delta,\boldsymbol{E})$易知$\boldsymbol{E}^\delta\in O(\delta,\boldsymbol{E})$. 最后注意到$V_1\cup V_2\supset c_1(\boldsymbol{E}_1)\cup c_2(\boldsymbol{E}_2)\supset m(\boldsymbol{E})$, 且对每一$\delta>0$, 总有$\boldsymbol{E}^\delta$在$V_1\cup V_2$不存在平衡点, 可推出$m(f)$不是$F_e(f)$的本质点. 由此导出矛盾. □

由定理1及定理2, 立即可得:

**定理3** 对每一$\boldsymbol{E}\in Y$, $F_e(\boldsymbol{E})$至少存在一个连通的极小本质集.

为给出平衡点集的本质连通分支的存在性, 先给出一个简单的引理.

**引理4** 设$A$, $B$为$X$的非空子集. 若$A\subset B$且$A$连通, 则存在$B$的连通分支(连通区)$C_\alpha$, 使得$A\subset C_\alpha$.

**证明** 设$C_\alpha$为$B$的某一连通分支且$C_\alpha\cap A\neq\varnothing$. 下证$A\subset C_\alpha$, 若不然, 则有$B$的另一连通分支$C_\beta(\alpha\neq\beta)$, 使得$C_\beta\cap A\neq\varnothing$. 于是由[11]中推论6.1.10, 知$A\cup C_\alpha\cup C_\beta$连通, 从而与$C_\alpha$为连通分支(极大连通子集)矛盾. □

由定理3及引理4, 可得

**定理4** 对每一$\boldsymbol{E}\in Y$, $F_e(\boldsymbol{E})$至少存在一个本质连通分支.

**证明** 由定理3, 设$m(\boldsymbol{E})$为$F_e(\boldsymbol{E})$一连通的极小本质集. 再由引理4, 存在$F_e(\boldsymbol{E})$的某一连通分支$c(\boldsymbol{E})$, 使得$m(\boldsymbol{E})\subset c(\boldsymbol{E})$. 于是, 由定义3的注, 知$c(\boldsymbol{E})$是$F_e(\boldsymbol{E})$的本质连通分支. □

特殊地,还可推得:

推论 1 对每一 $\boldsymbol{E} \in Y$, 若 $F_e(\boldsymbol{E})$ 是全不连通的, 则 $F_e(\boldsymbol{E})$ 至少含有一个本质点•

[参 考 文 献]

[1] Dierker E. Topological Methods in Walrasian Economics[M]. Berlin: Springer, 1974.

[2] Tan K K, Yu J, Yuan X Z. Stability of production economies[J]. J Austral Math Soc Ser A, 1996, **61**(1): 162—170.

[3] Hillas J. On the definition of the strategic stability of equilibria[J]. Econometrica, 1990, **58**(6): 1365—1390.

[4] Jiang J H. Essential fixed points of the multivalued mappings[J]. Scientia Sinica, 1962, **11**(3): 293—298.

[5] Jiang J H. Essential component of the set of fixed points of the multivalued mappings and its application to the theory of games[J]. Scientia Sinica, 1963, **12**(7): 951—964.

[6] Kohlberg E, Mertens J F. On the strategic stability of equilibria[J]. Econometrica, 1986, **54**(5): 1003—1037.

[7] Yu J, Xiang S W. On essential components of Nash equilibrium points[J]. Nonlinear Anal, Theory, Methods, and Applications, 1999, **38**(1): 259—264.

[8] Debreu G. Existence of competitive equilibria[A], In: Arrow K J, Intrilligator M D Eds. Handbook of Mathematical Economies[C]. Vol. Ⅱ. Amsterdam: North_Holland, 1982.

[9] Tarafdar E, Thompson B. On the existence of the price equilibrium by different methods[J]. Comment Math Univ Carolin, 1993, **34**(2): 413—417.

[10] Debreu G. Economies with a finite set of equilibria[J]. Econometrica, 1970, **38**(1): 387—392.

[11] Engelking R. General Topology[M]. Berlin: Heldermann Verlag, 1989.

# Minimal Essential Sets and Essential Components of the Equilibria of Production Economies

XIANG Shu_wen

(Department of Mathematics, Guizhou University, Guiyang 550025, P R China)

**Abstract:** The purpose of this paper is to give a further study on the stability of production economies. The new results were given by considering the " set_valued" stability of equilibria. It is proved that there exists at least one minimal essential set of equilibrium points of the economy and every minimal essential set is connected. Based on these results, it is easy to prove that there is at least one essential component of the set of equilibrium points.

**Key words:** production economy; minimal essential set; essential component