应用数学和力学,第21卷 第8期(2000年8月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2000)08_0823_06

论非常规有限元与其常规对偶有限元的谱等价性*

黄建国, 沐建飞

(上海交通大学 应用数学系, 上海 200240)

(鲁传敬推荐)

摘要: 以一个广义协调元为例证明了非常规有限元与其常规对偶有限元刚度矩阵的谱等价性。该结果对非常规有限元的区域分解并行算法研究有重要作用。

关 键 词: 非常规有限元; 广义协调元; 谱等价
中图分类号: O241.82 文献标识码: A

引 言

近年来,随着并行机的飞速发展,如何建立求解有限元离散后线性代数方程组的高效区域分解并行算法业已成为科学计算领域的国际热点[1,2,3]。对于常规有限元情形(含非协调元),有关研究日趋成熟,而对于非常规有限元情形,尚没有看见相关结果。我们知道非常规有限元往往是基于表现较差的常规有限元的改进而导出的,其目为保证有限元的收敛性或提高逼近精度。以求解板弯曲问题的Zienkiewicz元为例,该元仅对若干特定的区域网格剖分是收敛的[4],因此,为了克服这个缺陷国内外学者提出了广义协调元、拟协调元、TRUNC元等新型非常规有限元。和常规有限元相比,非常规有限元(特别是广义协调元)列式更为精细。本文的目的在于证明非常规有限元的刚度矩阵和其常规对偶有限元刚度矩阵是谱等价的,于是,我们可以以已有的基于常规有限元的区域分解法为桥梁,获得相应非常规有限元的区域分解方法。以下将主要针对一个广义协调元[5,6]展开相关研究,有关思想适用于其它非常规有限元方法[7,8]。

1 准备知识

考虑如下边界固定的板弯曲变分问题:

$$\begin{cases} u \in V \equiv H_0^2(\Omega), \\ a(u,v) = (f,v), \quad v \in V, \end{cases} \tag{1}$$

这里 $\Omega \in R^2$ 表示板的中位面域, $f \in L^2(\Omega)$ 为横向力, $(f,v) \equiv \int_\Omega fv\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,

---

* 收稿日期: 1999_04_28; 修订日期: 2000_02_03
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19901018)
作者简介: 黄建国(1966—),男,江西人,副教授,博士.

$$a(u,v) \equiv \int_\Omega [\Delta u \Delta v + (1-\nu)(2\partial_{12}u\partial_{12}v - \partial_{11}u\partial_{22}v - \partial_{22}u\partial_{11}v)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中, $\nu \in (0, 0.5)$ 为 Poisson 比• 另外, 本文将使用标准的Sobolev 范数定义[4]•

将区域 Ω 作直径为 h 的拟一致、正规有限元剖分[4], $\Omega \equiv \bigcup_{K\in T_h} K$• 对任意有限元 $K \in T_h$, 设其 3 顶点分别为 $p_i(x_i, y_i)$, $1 \leqslant i \leqslant 3$, 并在其上构造由如下多项式组成的形状函数空间 P_K:

$$\begin{aligned} v = {} & b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 + b_3\lambda_3 + b_4\lambda_1\lambda_2 + b_5\lambda_2\lambda_3 + b_6\lambda_3\lambda_1 + \\ & b_7(\lambda_1^2\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2^2) + b_8(\lambda_2^2\lambda_3 - \lambda_2\lambda_3^2) + b_9(\lambda_3^2\lambda_1 - \lambda_3\lambda_1^2), \end{aligned} \tag{2}$$

这里, λ_i, $1 \leqslant i \leqslant 3$, 为单元 K 的重心坐标• 易知, 对任一函数 $v \in P_K$, 其表式(2) 中的系数, b_i, $1 \leqslant i \leqslant 9$, 由其在顶点上的函数值和一阶导数函数值, 即 $v(p_i), \partial_\alpha v(p_i)$, $1 \leqslant \alpha \leqslant 2$, $1 \leqslant i \leqslant 3$, 唯一确定•

记有限元剖分 T_h 的顶点集为 T_{1h}, 我们构造求解问题(1) 的 Zienkiewicz 元如下:

$$Z^h \equiv \left\{ v : v|_K \in P_K,\ \forall K \in T_h;\ v \text{ 以及 } \partial_\alpha v(\alpha = 1, 2) \text{ 在 } T_h \text{ 的内项点连续} \right\},$$

$$Z_0^h \equiv \left\{ v \in Z_h : v(p) = \partial_1 v(p) = \partial_2 v(p) = 0,\quad \forall p \in T_{1h} \cap \partial\Omega \right\},$$

$$\begin{cases} a_h(u_h, v_h) = (f, v_h), & v_h \in Z_0^h, \\ u_h \in Z_0^h, \end{cases} \tag{3}$$

这里,

$$\forall v, w \in Z_0^h,\ a_h(v, w) \equiv \sum_{K\in T_h} a_{h,K}(v, w),$$

$$a_{h,K}(v,w) \equiv \int_K [\Delta v \Delta w + (1-\nu)(2\partial_{12}v\partial_{12}w - \partial_{11}v\partial_{22}w - \partial_{22}v\partial_{11}w)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y•$$

由于 Zienkiewicz 元仅对若干特殊有限元剖分是收敛的[4], 因此, 为了克服这个缺陷, 基于形状函数(2), 国内外学者提出了广义协调元、拟协调元、TRUNC 元等新型非常规有限元方法, 取得了很大的成功• 这些非常规有限元既与常规有限元有区别但又有密切联系, 以广义协调元为例, 其关键为将(导) 函数的节点插值关系, 改为沿交界线上(导) 函数的积分平均插值关系, 从而使得构造的有限元空间自动满足收敛性条件• 一个典型的九参数广义协调元可具体描述如下[5], [6], [7]• 其形状函数空间同 Zienkiewicz 元• 仍取为 P_K, 而(2) 中的9 个参数 b_i, $1 \leqslant i \leqslant 9$, 由下面的插值条件唯一确定:

$$\begin{cases} d_i(v) = d_i(I_3^* u), & 1 \leqslant i \leqslant 6, \\ d_{6+i}(v) = \displaystyle\int_{p_i}^{p_{i+1}} I_i^*(\partial_n u)\,\mathrm{d}s, & 1 \leqslant i \leqslant 3; \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} d_i(v) \equiv \displaystyle\int_{p_i}^{p_{i+1}} \partial_s v\,\mathrm{d}s, & i = 1, 2, \\ d_3(v) \equiv 60 \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{l_{ii+1}} \int_{p_i}^{p_{i+1}} v\left(\lambda_{i+1} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}s, \\ d_{3+i}(v) \equiv \dfrac{1}{l_{ii+1}} \displaystyle\int_{p_i}^{p_{i+1}} v\,\mathrm{d}s,\quad d_{6+i}(v) = \int_{p_i}^{p_{i+1}} \partial_n v\,\mathrm{d}s, & 1 \leqslant i \leqslant 3, \end{cases} \tag{5}$$

这里 l_{ij} 表示以 p_i、p_j 为顶点的边 p_ip_j 的长度, 且对 p_i、λ_i 和 l_{ij} 中的足标采用周期为3的轮换约定, 例如, $p_4 = p_1$; 而 I_1^* (I_3^*) 则代表在相应边上的一次Lagrange(三次Hermite) 插值• 我们将这样得到的广义协调元空间记之为 G^h•

应该注意的是 G^h 的插值节点参数并非函数在有限元三角形单元顶点上的函数值和一阶导数值• 其具体含义为: 对于 $v \in G^h$, 如记该函数在单元 K 上的9个插值节点参数为 $(v_1, v_{1x}, v_{1y}, v_2, v_{2x}, v_{2y}, v_3, v_{3x}, v_{3y})$, 其形式和排列顺序和 Zienkiewicz 元的 9 个插值节点参数是一致的, 则我们先据此构造一 K 上的光滑函数 u, 它以前述参数为相应顶点的函数值或一阶导数值, 在此基础上再由插值条件(4) 和(5) 恰好能获得该函数 $v \in G^h$•

如果定义 $G_0^h \equiv \left\{ v \in G^h: v \text{ 在位于} \partial\Omega \text{上的节点参数取零值} \right\}$, 则求解(1) 的广义协调元方法为

$$\begin{cases} a_h(u_h, v_h) = (f, v_h), \qquad v_h \in G_0^h, \\ u_h \in G_0^h \bullet \end{cases} \tag{6}$$

2 谱等价性

将Zienkiewicz 元的位于求解域 Ω 内的插值节点参数进行适当排序, 则对任一函数 $v \in Z_0^h$, 它的插值节点参数值恰好形成一向量 $\boldsymbol{x}(v)$, 通常称之为该函数在自然基下的向量表示• 对于任意 $v, w \in Z_0^h$, 它们的向量表示分别为 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{y}$, 则Zienkiewicz 非协调元法(3) 对应的刚度矩阵 $\boldsymbol{K}_\mathrm{Z}^h$ 由下式定义:

$$[\boldsymbol{K}_\mathrm{Z}^h \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] = a_h(v, w), \qquad v, w \in Z_0^h, \tag{7}$$

其中, $[\bullet, \bullet]$ 为标准向量欧氏内积•

另一方面, 对于该 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{y}$, 我们可以构造两个函数 $v, w \in G_0^h$, 使得它们的基于广义协调元的插值节点参数值恰好形成向量 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{y}$• 例如, 设 x_i 为 $\boldsymbol{x}$ 的某一分量, 其对应于函数 $v \in Z_0^h$ 的插值节点参数 $\partial_1 v(p), p \in T_{1h}$, 则为了构造 $v \in G_0^h$ 而建立的光滑辅助函数 u 应满足 $\partial_1 u(p) = x_i$, 其余关系类推可知• 则广义协调元法(6) 对应的刚度矩阵 $\boldsymbol{K}_\mathrm{G}^h$ 由下式定义:

$$[\boldsymbol{K}_\mathrm{G}^h \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] = a_h(v, w), \qquad v, w \in G_0^h \bullet \tag{8}$$

引理 1 设 $\boldsymbol{A} \in R^{n\times n}$ 为任一对称正定矩阵, 其最大、最小特征值分别为 λ_1 和 λ_n, 则成立如下估计:

$$\lambda_n \geqslant \frac{1}{\lambda_1^{n-1}} \det \boldsymbol{A} \bullet$$

该结果证明显然• 它的便利是将一个矩阵的最小特征值估计问题转化为矩阵行列式的下界估计和其最大特征值的上界估计, 而这些估计相对容易得到•

定理 1 关于 Zienkiewicz 元的刚度矩阵 $\boldsymbol{K}_\mathrm{Z}^h$ 与关于广义协调元的刚度矩阵 $\boldsymbol{K}_\mathrm{G}^h$ 是谱等价的, 换言之, 存在与有限元剖分直径 h 无关的正常数 c 和 C, 使得

$$c[\boldsymbol{K}_\mathrm{Z}^h \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}] \leqslant [\boldsymbol{K}_\mathrm{G}^h \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}] \leqslant C[\boldsymbol{K}_\mathrm{Z}^h \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}], \qquad \forall \text{ 插值节点参数向量 } \boldsymbol{x} \bullet$$

证明 对于任意插值节点向量 $\boldsymbol{x}$, 设函数 $v \in Z_0^h$ 和 $v \in G_0^h$ 分别以其为插值节点参数向量• 则由(7) 和(8) 有

$$[\boldsymbol{K}_\mathrm{Z}^h \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}] = a_h(v, v), \; [\boldsymbol{K}_\mathrm{G}^h \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}] = a_h(v, v) \bullet \tag{9}$$

现在我们来研究以上双线性型限制在任一有限元单元 $K \in T_h$ 上的关系• 为表达简便, 记函数 v 和 v 在 K 上插值节点参数值为

$$(v_1, v_{1x}, v_{1y}, v_2, v_{2x}, v_{2y}, v_3, v_{3x}, v_{3y}) \bullet$$

则由定义有

$$v(p_i)=v_i,\ \partial_1 v(p_i)=v_{ix},\ \partial_2 v(p_i)=v_{iy},\qquad 1\leqslant i\leqslant 3. \tag{10}$$

如设 u 为前面介绍的为了构造 v 而引进的中间函数, 则亦有

$$u(p_i)=v_i,\ \partial_1 u(p_i)=v_{ix},\ \partial_2 u(p_i)=v_{iy},\qquad 1\leqslant i\leqslant 3. \tag{11}$$

以 I_1 记单元 K 上的常规线性插值算子, 而以 $a\approx b$ 表示存在与有限元剖分直径 h 无关的正常数使得 $ca\leqslant b\leqslant Ca$. 于是, 由直接计算知[4],

$$a_{h,K}(v,v)\approx|v|_{2,K}^2=|v-I_1v|_{2,K}^2\equiv|w|_{2,K}^2. \tag{12}$$

设 $\hat K$ 为以 $(0,0)$、$(1,0)$、$(0,1)$ 为顶点的标准三角形单元, F_K 为由 $\hat K$ 到 K 的仿射变换, $\hat K$ 的顶点为 $\hat p_i=F_K^{-1}(p_i)\ (1\leqslant i\leqslant 3)$. 则由对偶论证技巧立即有

$$|w|_{2,K}^2\approx h^{-2}|\hat w|_{2,\hat K}^2, \tag{13}$$

这里, $\hat w\equiv w\circ F_K$.

记 $\hat q_i(q_i)$ 为单元 $\hat K(K)$ 顶点 $\hat p_i(p_i)$ 的对边中点, 而 $\hat l_{ij}$ 表示边 $\hat p_i\hat p_j$ 的长度, $\hat\lambda_i$ 为单元 $\hat K$ 的重心坐标. 则由有限维空间中范数的等价性, 对于形式为 (2) 的函数 $\hat z$ (将 (2) 中的 λ_i 改为 $\hat\lambda_i$) 成立

$$\begin{aligned}\|\hat z\|_{2,\hat K}^2\approx{}&\sum_{i=1}^{2}\left|\int_{\hat p_i}^{\hat p_{i+1}}\partial_s\hat z\,\mathrm{d}s\right|^2+\sum_{i=1}^{3}\left[\left|\frac{1}{\hat l_{i,i+1}}\int_{\hat p_i}^{\hat p_{i+1}}\hat z\,\mathrm{d}s\right|^2+\left|\int_{\hat p_i}^{\hat p_{i+1}}\partial_{\hat p_{i+1}\hat q_{i+2}}\hat z\,\mathrm{d}s\right|^2\right]+\\&\left|\frac{1}{60}\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{\hat l_{i,i+1}}\int_{\hat p_i}^{\hat p_{i+1}}\hat z\left(\hat\lambda_i-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}s\right|^2,\end{aligned} \tag{14}$$

这里已用到如下事实, 即包含在 (14) 右侧各项绝对值号中的参数组唯一决定函数 $\hat z$.

注意到下述事实

$$\|\hat w\|_{2,\hat K}^2\approx|\hat w|_{2,\hat K}^2,\qquad \hat w(\hat p_i)=0,\ \ 1\leqslant i\leqslant 3,$$

由 (13)、(14) 和对偶论证技巧又有

$$|w|_{2,K}\approx h^{-2}\sum_{i=1}^{9}|d_i(w)|^2. \tag{15}$$

类似的也有

$$a_{h,K}(v,v)\approx|v|_{2,K}^2=|v-I_1v|_{2,K}^2\equiv|v|_{2,K}^2, \tag{16}$$

$$|v|_{2,K}^2\approx\sum_{i=1}^{3}\sum_{|\alpha|\leqslant 1}|\partial^{\alpha}v(p_i)|^2. \tag{17}$$

另一方面, 由 [6] 中结果知

$$v(p_i)=v(p_i)=u(p_i),\qquad 1\leqslant i\leqslant 3. \tag{18}$$

因此, 由 (4)、(10)、(11) 和 (18) 有

$$\begin{aligned}d_i(w)={}&d_i(v)-d_i(I_1v)=d_i(I_3^*u)-d_i(I_1v)=\\&d_i(v)-d_i(I_1v)=d_i(v),\qquad 1\leqslant i\leqslant 6.\end{aligned} \tag{19}$$

$$d_{6+i}(w)=\int_{p_i}^{p_{i+1}}I_1^*(\partial_n v)\,\mathrm{d}s,\qquad 1\leqslant i\leqslant 3. \tag{20}$$

定义

$$\boldsymbol{u}\equiv\left(\begin{aligned}&d_1(v),d_2(v),d_3(v),d_4(v),d_5(v),d_6(v),\\&\int_{p_1}^{p_2}I_1^*(\partial_n v)\,\mathrm{d}s,\int_{p_2}^{p_3}I_1^*(\partial_n v)\,\mathrm{d}s,\int_{p_3}^{p_1}I_1^*(\partial_n v)\,\mathrm{d}s\end{aligned}\right)^{\mathrm T},$$

$$\boldsymbol{v} \equiv (v(p_1), \partial_1 v(p_1), \partial_2 v(p_1), v(p_2), \partial_1 v(p_2), \partial_2 v(p_2), v(p_3), \partial_1 v(p_3), \partial_2 v(p_3))^{\mathrm{T}}.$$

注意到 $v(p_i)=0, 1\leqslant i\leqslant 3$, 由[6]有

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{v},$$

这里的 $\boldsymbol{G}\in R^{9\times 9}$ 和[6]中给出的 $\boldsymbol{G}$ 基本相同, 仅对第1、4、7列各元素乘了 h. 因此,

$$\det\boldsymbol{G} = \frac{h^3}{144}|K|^2(l_{12}^2+l_{23}^2+l_{13}^2), \tag{21}$$

这里 $|K|$ 表示单元 K 的面积.

如记 $\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}$ 的最大特征值为 λ_1, 最小特征值为 λ_9, 易知

$$\lambda_1 = \|\boldsymbol{G}\|_2^2 \leqslant Ch^2, \tag{22}$$

而由(21)、(22)和引理2又有

$$\lambda_9 \geqslant \frac{1}{\lambda_1^8}|\det\boldsymbol{G}|^2 \geqslant ch^2. \tag{23}$$

另一方面, 由(15)、(19)、(20)知

$$|w|_{2,K}^2 \approx h^{-2}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{v},$$

于是联合(12)、(15)、(16)、(17)、(22)、(23)有

$$a_{h,K}(v,v) \approx a_{h,K}(v,v),$$

即

$$a_h(v,v) \approx a_h(v,v),$$

由此立知刚度矩阵 $\boldsymbol{K}_{\mathrm{Z}}^h$ 与 $\boldsymbol{K}_{\mathrm{G}}^h$ 是谱等价的. 定理1得证.

定理1对构造广义协调元法(6)的区域分解并行求解算法有重要的帮助. 它告诉我们只需将已有的关于Zienkiewicz元的区域分解方法结果[9, 10]进行微小变动就可直接获得广义协调元(6)的区域分解方法, 该微小变动为将Zienkiewicz元的插值节点参数按前面所述(见第1节末说明)的对应关系改为广义协调元的插值节点参数即可.

本文结果表明广义协调元方法不但从收敛性角度看是很好的, 而且从离散后线性代数方程组并行求解的角度看也是易于实现的. 本文推导适用于其它非常规有限元[7, 8], 为省篇幅在此从略.

[参 考 文 献]

[1] Chan T F, Mathew T. Domain decomposition algorithms[J]. Acta Numerica, 1994, **2**: 61—143.

[2] Xu J C. Iterative methods by space decomposition and subspace correction[J]. SIAM Review, 1992, **34**(3): 581—613.

[3] Xu J C, Zou J. Non_overlapping domain decomposition methods[J]. SIAM Review, 1998, **40**(4): 857—914.

[4] Ciarlet P G. The Finite Element Method for Elliptic Problem[M]. Amsterdam_New York_Oxford: North_Holland, 1978.

[5] 龙驭球, 辛克贵. 广义协调元[J]. 土木工程学报, 1987, **1**(1): 1—14.

[6] 石钟慈, 陈绍春. 九参数广义协调元的收敛性[J]. 计算数学, 1991, **13**(2): 193—203.

[7] 龙驭球. 新型有限元引论[M]. 北京: 清华大学出版社, 1992.

[8] 陈绍春, 石钟慈. 构造单元刚度矩阵的双参数法[J]. 计算数学, 1991, **13**(3): 286—296.

[9] Brenner S C. A two_level additive preconditioner for nonconforming plate elements[J]. Numer

Math, 1996, **72**(3): 419—447.

[10] 谢正辉. Domain decomposition and multigrid methods for nonconforming plate elements[D]. 博士论文. 北京: 中科院计算数学研究所, 1996.

[11] Bramble J H, Pasciak J E, Schatz A H. The construction of preconditioners for elliptic problems by substructuring, Ⅰ[J]. Math Comp, 1986, **47**(1): 102—134.

On the Spectral Equivalence of Unconventional Finite Elements and Their Conventional Relatives

HUANG Jian_guo, MU Jian_fei
(Department of Applied Mathematics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, P R China)

Abstract: With a generalized conforming element as a typical example, the spectral equivalence of unconventional finite elements and their conventional relatives is proved. This result is very important for the construction of domain decomposition parallel algorithms for unconventional finite elements.

Key words: unconventional finite element; generalized conforming element; spectral equivalence