应用数学和力学,第 21 卷 第 8 期(2000 年 8 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2000) 08_0836_07

摩擦约束弹性力学广义变分不等式解的存在性和唯一性

扶名福[1], 吴洪飞[2]

(1 南昌大学 工程力学研究所, 南昌 330029; 2 南昌大学 机电学院, 南昌 330029)

(江推荐)

摘要: 阐述了等价于摩擦约束弹性力学基本问题的广义变分不等式问题解的存在性和唯一性, 进而提出广义变分不等式有限元近似及其离散解法

关 键 词: 广义变分不等式; 应用相容性; 存在性; 唯一性
中图分类号: O343 3; O177 92 文献标识码: A

引 言

对于摩擦约束弹性力学基本问题的变分不等式的研究几乎还是停留在等价于最小势能型或最小余能型的变分原理情形的研究 国内外许多著名学者所发表的文献或专著, 诸如郭友中[1]、周叔子[2]、G. F. Carey 和 J. T. Oden[3] 以及 J. T. Oden 和 L. Campos[4] 等对弹性力学基本问题都有详细的讨论 但是至目前为止, 摩擦约束弹性力学广义变分不等式的研究及其与有限元近似相结合的研究几乎没有 众所周知, 广义变分不等式或不等式原理实质上是极值原理, 也就是说基于它们所求得的弹性位移场、应变场或应力场不一定是真实解, 且在一定条件下才具备唯一性, 这一点同传统的最小位能原理和最小余能原理相悖; 同时只有当稳定性和存在性得以解决后, 基于广义变分原理的相应有限元近似和离散解法才具有理论上的合理性和优越性 本文将对摩擦约束弹性力学广义变分不等式解的存在性和唯一性进行详细的论证, 进而提出相应的有限元近似和离散解法

1 摩擦约束弹性力学广义变分不等式解的存在性和唯一性

1 1 摩擦约束弹性力学广义变分不等式

设 $W =$ U 为应力空间 和位移空间 U 的积空间, 则可知摩擦约束弹性力学基本问题等价于下列 Euler 不等式方程[5]:

$$0, \tag{1}$$

其中

收稿日期: 1999_05_10; 修订日期: 2000_03_30
基金项目: 国家自然科学基金资助课题(19762002); 江西省自然科学基金资助项目
作者简介: 扶名福(1953), 男, 教授, 博导, 南昌大学副校长.

$$= A(\ _{ij})\mathrm{d} - f_i u_i \mathrm{d} + \int_{S_c} g\,|\,\boldsymbol{u}_T\,|\,\mathrm{d}s - \int_{S_c} F_N u_N \mathrm{d}s -$$

$$\int_{S_F} F_i u_i \mathrm{d}s - \int_{S_u} \ _{ij} n_j (u_i - u_i)\mathrm{d}s =$$

$$a_W(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}) + \mathrm{d}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}) - \ \boldsymbol{s}, \boldsymbol{w}\ , \tag{2}$$

这里

$$a_W(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}) = \ \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{E}_W \boldsymbol{w}\,\mathrm{d}\ , \quad d(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}) = -\int_{S_u} \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{E}_u \boldsymbol{w}\mathrm{d}s, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{s}, \boldsymbol{w} = \ \boldsymbol{f}_W^{\mathrm{T}} \boldsymbol{w}\mathrm{d} - \int_{S_F} \boldsymbol{F}_W^{\mathrm{T}} \boldsymbol{w}\mathrm{d}\boldsymbol{s} + \int_{S_u} \boldsymbol{u}_W^{\mathrm{T}} \boldsymbol{w}\mathrm{d}s + \int_{S_c} (\boldsymbol{g}_W^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{F}_{NW}^{\mathrm{T}})\,\boldsymbol{w}\mathrm{d}s, \tag{4}$$

而

$$\boldsymbol{E}_W = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0}_{6\ 6} & \boldsymbol{0}_{6\ 3} \\ \boldsymbol{0}_{3\ 6} & \frac{1}{2}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}\boldsymbol{D} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{E}_u = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0}_{6\ 6} & \frac{1}{2}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{n}) \\ \frac{1}{2}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{n}) & \boldsymbol{0}_{3\ 3} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{f}_W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{F}_W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{u} = \left(u_1 n_1, u_2 n_2, u_3 n_3, \frac{1}{2}(u_2 n_3 + u_3 n_2), \frac{1}{2}(u_3 n_1 + u_1 n_3), \frac{1}{2}(u_1 n_2 + u_2 n_1), 0, 0, 0 \right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{g}_W - \boldsymbol{F}_{NW} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{1T} - F_N n_1 & g_{2T} - F_N n_2 & g_{3T} - F_N n_3 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}},$$

其中 $\boldsymbol{0}_{m\ n}$ 表示 m 行 n 列的零矩阵; $\boldsymbol{f}_W, \boldsymbol{F}_W, \boldsymbol{g}_W - \boldsymbol{F}_{NW}$ 可看成是载荷空间 L 的扩张空间 $(L^2(S))^9$ 的一个子空间; $\boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}$ 分别为微分算子和几何算子[6]

因此摩擦约束弹性力学基本问题等价于下面的变分不等式问题(PL):

求 $\boldsymbol{w}\ \ K_W = \left\{ \boldsymbol{w} = (\boldsymbol{u},\ )\ \ W \mid\ _W(\boldsymbol{w}) = u_i n_i\ \ \boldsymbol{s}, \text{on } S_c,\ \boldsymbol{u}\ \ U, \right\}$, 使得:

$$a_W(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}) + \mathrm{d}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w})\ \ \boldsymbol{s}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}\ \ \ \boldsymbol{v}\ \ W, \tag{5}$$

其中 $\boldsymbol{s}$ 为弹性变形体与刚性支承之间的间隙

1 2 变分不等式问题(PL)解的存在性和唯一性

定理 1 变分不等式问题(PL)解在某种应力相容性条件下是唯一存在的

该应力相容性条件( ) 为: 对于任意

$$\boldsymbol{w}^{(1)} = (\ _{11}^{(1)},\ _{22}^{(1)},\ _{33}^{(1)}, 2\ _{23}^{(1)}, 2\ _{31}^{(1)}, 2\ _{12}^{(1)}, u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, u_3^{(1)})^{\mathrm{T}} = (\ ^{(1)}, \boldsymbol{u}^{(1)})^{\mathrm{T}}\ \ W,$$

$$\boldsymbol{w}^{(2)} = (\ _{11}^{(2)},\ _{22}^{(2)},\ _{33}^{(2)}, 2\ _{23}^{(2)}, 2\ _{31}^{(2)}, 2\ _{12}^{(2)}, u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, u_3^{(2)})^{\mathrm{T}} = (\ ^{(2)}, \boldsymbol{u}^{(2)})^{\mathrm{T}}\ \ W,$$

存在一个正常数 M(它的具体确定见后面的定理证明过程), 使得

$$(\ _{ij}^{(1)} - \ _{ij}^{(2)})\,n_j\ _{(L^2(S))^3}\ \ M\ \ \boldsymbol{u}^{(1)} - \boldsymbol{u}^{(2)}\ _{(H^1(\ ))^3} \tag{6}$$

证明 在上述应力相容性条件( ) 下, 定理的证明等价于证明泛函

$$(\ , \boldsymbol{u}) = \ \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}\mathrm{d} - \ \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}\mathrm{d} - \int_{S_F} \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}\mathrm{d}s -$$

$$\int_{S_u} \ ^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{n})\,\boldsymbol{u}\mathrm{d}s + \int_{S_c} (\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{F}_N^{\mathrm{T}})\,\boldsymbol{u}\mathrm{d}s \tag{7}$$

有唯一的极小值即可

在上面的泛函中已利用了位移边界条件为 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} = 0$, 不然可作线性变换

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}$$

分四步证明之:

1) 首先证明泛函 有下界

由

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \quad \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{EDu}\mathrm{d}$$

的强制性以及$\boldsymbol{f}$、$\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{g}-\boldsymbol{F}_N$ 的连续性, 根据H lder 不等式, Young 不等式以及迹算子定理[7] 和应力相容性条件( ), 可以得到

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{w}) \quad & \boldsymbol{u} \quad {}^{2}_{(H^1(\ \ ))^3} - \quad \boldsymbol{f} \quad {}_{(L^2(\ \ ))^3} \quad \boldsymbol{u} \quad {}_{(H^1(\ \ ))^3} - \quad \boldsymbol{F} \quad {}_{(L^2(S))^3} \quad \boldsymbol{u} \quad {}_{(L^2(S))^3} - \\ & \boldsymbol{g}-\boldsymbol{F}_N \quad {}_{(L^2(S))^3} \quad \boldsymbol{u} \quad {}_{(L^2(S))^3} - \quad {}_{ij}n_j \quad {}_{(L^2(S))^3} \quad \boldsymbol{u} \quad {}_{(L^2(S))^3} \\ & \boldsymbol{u} \quad {}^{2}_{(H^1(\ \ ))^3} - (\quad ^{-1} \quad \boldsymbol{f} \quad {}^{2}_{(L^2(\ \ ))^3} + \quad \boldsymbol{u} \quad {}^{2}_{(H^1(\ \ ))^3}) - (\quad ^{-1} \quad \boldsymbol{F} \quad {}^{2}_{(L^2(S))^3} + \\ & \boldsymbol{u} \quad {}^{2}_{(L^2(S))^3}) - (\quad ^{-1} \quad \boldsymbol{g}-\boldsymbol{F}_N \quad {}^{2}_{(L^2(S))^2} + \quad \boldsymbol{u} \quad {}^{2}_{(L^2(S))^3}) - \\ & {}_{ij}n_j \quad {}_{L^2(S))^3} \quad \boldsymbol{u} \quad {}_{L^2(S))^3} \\ & (\quad - \quad - 2K_1 \ - K_1M) \quad \boldsymbol{u} \quad {}^{2}_{(H^1(\ \ ))^3} - \quad ^{-1}(\quad \boldsymbol{f} \quad {}^{2}_{(L^2(\ \ ))^3} + \\ & \boldsymbol{F} \quad {}^{2}_{(L^2(S))^3} + \quad \boldsymbol{g}-\boldsymbol{F}_N \quad {}^{2}_{(L^2(S))^3})\end{aligned}$$

根据 为任意正数, 取 $= (\ - K_1M)/(1+2K_1)$ (这里 K_1 为利用迹算子定理 $\boldsymbol{u} \quad {}_{(L^2(S))^3}$ $K_1 \quad \boldsymbol{u} \quad {}_{(H^1(\ \ ))^3}$ 所确定的值), 那么从上式可推算得到

$$(\boldsymbol{w}) \quad - \quad ^{-1}(\quad \boldsymbol{f} \quad {}^{2}_{(L^2(\ \ ))^3} + \quad \boldsymbol{F} \quad {}^{2}_{(L^2(S))^2} + \quad \boldsymbol{g}-\boldsymbol{F}_N \quad {}^{2}_{(L^2(S))^3}), \tag{8}$$

而且此时必须有 $M < \ /K_1$ 成立, 这样的话, 就给出了应力相容性条件( ) 的具体形式 故 $(\boldsymbol{w})$ 在集合 K_W 上有下界, 即

$$d = \inf_{w \quad K_W} (\boldsymbol{w}) > - \quad ,$$

并且

$$\boldsymbol{w} \quad + \quad \text{时}, \ (\boldsymbol{w}) \quad + \tag{9}$$

令$\left\{\boldsymbol{w}_n\right\}$为 $(\boldsymbol{w})$ 的极小化序列, 则由(9) 可知, $\left\{\boldsymbol{w}_n\right\}$有界 由于 W 是Hilbert 空间, 则$\left\{\boldsymbol{w}_n\right\}$有子列在 W 中弱收敛, 仍以$\left\{\boldsymbol{w}_n\right\}$记此子列, 以 $\boldsymbol{w}^*$ 记其弱极限

2) 然后证明泛函 是弱下半连续的

若能证明泛函 是凸函数, 又根据泛函 是G_可导的, 则泛函 是弱下半连续的 根据应力相容性条件( ) 和凸函数的定义可证明泛函

$$_1 = \quad \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_W\boldsymbol{w}\mathrm{d} \quad - \quad {}_{S_U}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_u\boldsymbol{w}\,\mathrm{d}s$$

是凸的 因此泛函 是 W 上弱下半连续凸函数

3) 证明弱极限 $\boldsymbol{w}^*$ 是问题的极小解

由于泛函 是 W 上弱下半连续的, 所以

$$d = \lim\ \inf \ (\boldsymbol{w}_n) \qquad (\boldsymbol{w}^*),$$

故 $d = \ (\boldsymbol{w}^*)$, 从而 $\boldsymbol{w}^*$ 是变分不等式问题(PL) 的解

4) 解的唯一性证明

设 $\boldsymbol{w}^*$、$\boldsymbol{w}$ 是变分不等式问题(PL) 的两个不同的解, 则根据(6) 式分别有:

$$a_W(\boldsymbol{w}^*, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}^*) + d(\boldsymbol{w}^*, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}^*) \qquad \boldsymbol{s}, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}^* , \qquad \boldsymbol{v} \quad W, \tag{10}$$

$$a_W(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}) + d(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}) \qquad \boldsymbol{s}, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{w} , \qquad \boldsymbol{v} \quad W \tag{11}$$

在(10) 中取 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$, (11) 中取 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}^*$, 然后相加可得

$$a_W(\boldsymbol{w}^* - \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}^* - \boldsymbol{w}) + d(\boldsymbol{w}^* - \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}^* - \boldsymbol{w}) \qquad 0$$

而事实上, 根据证明解的存在性同样的估计技巧, 可知

$$a_W(w^* - w, w^* - w) + d(w^* - w, w^* - w) \quad 0$$

因此

$$a_W(w^* - w, w^* - w) + d(w^* - w, w^* - w) = 0 \tag{12}$$

根据算子 a_W 的正定性性质以及关于应力的相容性假设, 很容易得到:

只有 $w^* = w$ 时, (12) 式才成立　因此解是唯一的

1 3　关于应力相容性条件(7)式的解释

1) 再次利用迹算子性质 $(\ ^{(1)} - \ ^{(2)})^{\mathrm T} n \ _{(L^2(S))^3} \quad K_2 \quad ^{(1)} - \ ^{(2)} \ _{(L^2(\ ))^3}$, 则应力相容性条件(　) 可从应力边界约束条件转化至应力区域约束条件, 此时可表示为

$$^{(1)} - \ ^{(2)} \ _{(L^2(\ ))^3} \quad \frac{M}{K_2} \quad u^{(1)} - u^{(2)} \ _{(H^1(\ ))^3} \tag{13}$$

2) 应力相容性条件(　) 等价于

$$^{\mathrm T} n \ _{(L^2(S))^3} \quad M \quad u \ _{(H^1(\ ))^3}, \qquad , u \quad U \tag{14}$$

3) 应力相容性条件(　) 实质上也可以转化为功形式的相容性条件　只要在(14) 式的两端乘以 $u \ _{(H^1(\ ))^3}$, 则有

$$^{\mathrm T} n \ _{(L^2(S))^3} \quad u \ _{(H^1(\ ))^3} \quad M \quad u \ ^2_{(H^1(\ ))^3}, \qquad , u \quad U \tag{15}$$

它显然是作功的定量要求　这与胡海昌[6] 提出的各个量必须有作功本领要求以及 B_B 条件[8] 是途殊同归的, 同时在唯一性的证明中也体现了卞学璜[9] 提出的无零能模式是保证解的存在性和唯一性思想　它们从比较的角度说明了本文提出的应力相容性条件的正确性

1 4　三类独立变量广义变分不等式解的存在性和唯一性

设 $w \quad W = E \quad U$(应变空间、应力空间和位移空间的积空间), 则摩擦约束弹性力学基本问题又等价于下列 Euler 不等式方程[5]:

$$0, \tag{16}$$

其中

$$= a(w, w) + b(w, w) + c(w, w) + d(w, w) - \quad s, w \tag{17}$$

这里

$$a(w, w) = \quad w^{\mathrm T} E_W w \mathrm d \ , \quad b(w, w) = - \quad w^{\mathrm T} E \ w \mathrm d \ , \quad c(w, w) = \quad w^{\mathrm T} E_u w \mathrm d \ ,$$

$$d(w, w) = - \ _{S_u} w^{\mathrm T} E_u w \mathrm d \ , \quad s, w \ = - \ _{S_F} F_W^{\mathrm T} w \mathrm d s + \ _{S_u} u_W^{\mathrm T} w \mathrm d s + \ _{S_c} (g_W^{\mathrm T} - F_{NW}^{\mathrm T}) w \mathrm d s,$$

$$E_W = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}E & 0_{6\ 9} \\ 0_{9\ 6} & 0_{9\ 9} \end{bmatrix}, \quad E \ = \begin{bmatrix} 0_{6\ 6} & C & 0_{6\ 3} \\ C & 0_{6\ 6} & 0_{6\ 3} \\ 0_{3\ 6} & 0_{3\ 6} & 0_{3\ 3} \end{bmatrix},$$

这里

$$C = \begin{bmatrix} 1/2 & & & & & \\ & 1/2 & & & & \\ & & 1/2 & & & \\ & & & 1/4 & & \\ & & & & 1/4 & \\ & & & & & 1/4 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{E}_u=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}_{6\times6} & \boldsymbol{0}_{6\times6} & \boldsymbol{0}_{6\times3}\\ \boldsymbol{0}_{6\times3} & \boldsymbol{0}_{6\times6} & \boldsymbol{D}\\ \boldsymbol{0}_{3\times6} & \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}_{3\times3}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{E}_{R}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}_{6\times6} & \boldsymbol{0}_{6\times6} & \boldsymbol{0}_{6\times3}\\ \boldsymbol{0}_{6\times3} & \boldsymbol{0}_{6\times6} & \frac{1}{2}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{n})\\ \boldsymbol{0}_{3\times6} & \frac{1}{2}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{n}) & \boldsymbol{0}_{3\times3}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{F}_W=\{0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ F_1\ \ F_2\ \ F_3\}^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{u}_W=\{0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ u_1n_1\ \ u_2n_2\ \ u_3n_3\ \ \frac{1}{2}(u_2n_3+u_3n_2)$$
$$\frac{1}{2}(u_1n_3+u_3n_1)\ \ \frac{1}{2}(u_1n_2+u_2n_1)\ \ 0\ \ 0\ \ 0\}^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{g}_W-\boldsymbol{F}_{NW}=\{0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0$$
$$g_{1T}-F_Nn_1\ \ g_{2T}-F_Nn_2\ \ g_{3T}-F_Nn_3\}^{\mathrm{T}}$$

三类独立变量摩擦约束弹性力学基本问题(16)等价于求解变分不等式问题(PE):

求 $\boldsymbol{w}\in K_W=\{\boldsymbol{w}\in W\mid C_W(\boldsymbol{u})\leq \boldsymbol{s},\ \text{on}\ S_c\}$(其中 $\boldsymbol{u}\in U$, $\boldsymbol{s}$ 为弹性变形体与刚性支承之间的间隙), 使得:

$$a(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w})+b(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w})+c(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w})+d(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w})\geq\langle\boldsymbol{s},\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\rangle,\quad \forall\,\boldsymbol{v}\in W. \tag{18}$$

可以证明当如下应力相容性条件( )满足时, 变分不等式问题(PE)解具有存在性和唯一性. 该应力相容性条件( )为:

对于任意 $\boldsymbol{w}\in W$, 存在一个正常数 M, 使得

$$\|\sigma\|_{(L^2(\Omega))^3}\leq M\|\boldsymbol{u}\|_{(H^1(\Omega))^3}, \tag{19}$$

$$\|E\|_{(L^2(\Omega))^3}\leq\|\boldsymbol{u}\|_{(H^1(\Omega))^3} \tag{20}$$

注记 在应力相容性条件( )的约束下 $P(\boldsymbol{w})$ 有下界且弱下半连续, 而且从几何方程来看应力相容性条件( )中的(20)显然是满足的. 因此应力相容性条件( )是应力相容性( )的特例.

2 变分不等式问题(PL)的有限元近似及离散解法

211 有限元近似

性质 211 定义在空间 $W\times W$ 上双线性泛函 $a_W(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v})$ 不仅在空间 $U\times U$ 上是强制的, 当满足应力相容性条件( )时, 在空间 $W\times W$ 上也是强制的.

性质 212 当应力相容性条件( )成立时, $a_W(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v})+d(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v})$ 在空间 $U\times U$ 和 $W\times W$ 上均是强制的.

关于变分不等式问题(PL)的有限元近似及离散解法有两种方法.

一种方法, 根据上述两个性质, 只要把位移空间 U 以积空间 $W=\Sigma\times U$ 代替, 位移允许集 U_{ad} 以位移应力相容集 K_W 代替, 则变分不等式问题(PL)的有限元的近似可模仿文献[3]而得到相应的解答. 但在力学上就截然不同了, 对于摩擦约束弹性力学广义变分不等式问题的有限元近似, 由于它是积空间上的近似, 此时至少可同时得到两类独立变量的解, 而古典弹性变分不等式问题的有限元近似只能得到位移近似解.

而另一种方法[2], 可采用下面更简单的有限元近似. 由于是在应力相容性条件( )的前提下进行有限元近似, 因此不需要在积空间 $W=\Sigma\times U$ 上进行一切近似, 而照常在位移空间 U 上进行近似即可, 因为此时应力相容性条件( )保证了应力空间 Σ 上的相应近似.

设 h 为收敛于0的正参数, U_h 为位移空间 U 中的闭子空间, $K_h < U_h$ 为 U 中的非空闭凸集, 关于 U_h 和 K_h 对 U 和 U_c (这里 $U_c = \left\{ \boldsymbol{u}\ \boldsymbol{I}\ \ U \mid C_n(\boldsymbol{v}) = v_n = \boldsymbol{v}\#\ \boldsymbol{n}\ [\ \ \boldsymbol{s} \right\}$, $C_n: (H^1(\ 8))^3\ \ y\ \ H^{1/2}(S_c)$ 为法向迹算子) 的逼近性质作如下的假设:

1) 若 $\boldsymbol{u}_h\ I\ \ \boldsymbol{K}_h$, $h\ \ y\ \ 0$ 时 $\boldsymbol{u}_h$ 弱收敛, 则其弱极限点在 U_c 中;

2) 存在 U 的子集 X 及映射族 $C_h: X\ \ y\ \ K_h$, 使 $X = K$, 且对任何 $\boldsymbol{u}\ \boldsymbol{I}\ \ X$, $h\ \ y\ \ 0$ 时, 有 $C_h(\boldsymbol{u})$ 在 U 中强收敛于 $\boldsymbol{v}$, 记为 $C_h(\boldsymbol{u})\ ]\ \ \boldsymbol{u}\#$

问题($\mathrm{PL_h}$)　在满足应力相容性条件(　)时, 对于给定的 $h > 0$, 求

$$\boldsymbol{w}_h\ I\ \ K_{Wh} = \left\{ \boldsymbol{w}_h = (R_h, \boldsymbol{u}_h)\ I\ \ W, \boldsymbol{u}_h\ I\ \ K_h \right\},$$

使得
$$a_W(\boldsymbol{w}_h, \boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{w}_h) + d(\boldsymbol{w}_h, \boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{w}_h)\ \backslash\ 3\boldsymbol{s}, \boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{w}_h 4, \qquad P\ \boldsymbol{v}_h\ I\ \ K_{Wh}\# \tag{21}$$

同样依据定理1的证明方法, 可知问题(PL$_\mathrm{h}$)有唯一解# 而当假设1)和2)成立时, 利用性质212可证明如下的逼近定理[2]:

定理2　设 $\boldsymbol{w}$ 是问题(PL)的解, $\boldsymbol{w}_h$ 是问题(PL$_\mathrm{h}$)的解, 则

当 $h\ \ y\ \ 0$ 时, 有 $\boldsymbol{w}_h$ 强收敛于 $\boldsymbol{w}\#$

212　离散解法

变分不等式问题(PL)的有限元近似, 本质上是从有限维空间去近似无穷维空间, 这样势必对其问题的解法带来了很大的方便, 即可以用有限维去逼近无穷维, 而且解的收敛性将得以保证#

令 $B(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) = a_W(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) + d(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v})$, 根据性质212可知在应力相容性条件(　)下, 它是 W @ W 上的对称强制的双线性型泛函, 此时可以证明问题(PL$_\mathrm{h}$)等价于极值问题: 求 $\boldsymbol{w}_h\ I\ \ K_{Wh}$, 使得 $J(\boldsymbol{w}_h) = \min\limits_{\boldsymbol{v}I\ K_{Wh}} J(\boldsymbol{v})$,

其中

$$J(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}B(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) - 3\boldsymbol{s}, \boldsymbol{v}4\#$$

因此可转化至欧氏空间 R^n 上的二次规划问题来进行求解, 这时可利用各种优化方法来进行离散求解[2]#

3　结　　论

本文在提出的应力相容性条件前提下, 详细地证明了摩擦约束弹性力学广义变分不等式问题解的存在性和唯一性, 进而讨论了相应的有限元近似及其离散解法# 这种研究方法可用于研究摩擦约束弹塑性力学广义变分不等式问题, 从而对于摩擦约束弹塑性问题, 有望建立全新的有限元近似理论和离散解法#

[参　考　文　献]

[1]　郭友中. 固体力学中的不等式问题[J]. 应用数学和力学, 1989, **10**(1): 1) 23.

[2]　周叔子. 变分不等式及其有限元方法[M]. 长沙: 湖南大学出版社, 1988.

[3]　Garey G F, Oden J T. Variational Inequalities, New Concepts in Finite Element Analysis [M]. New York: The American Society of Mechanical Engineers, 1981.

[4]　Oden J T, Campos L. Some New Results on Finite Element Methods for Contact Problems With Friction [M]. New Concepts in Finite Element Analysis. New York: The American Society of Mechanical Engineers, 1981.

5] 吴洪飞, 扶名福. 带摩擦约束的弹性广义变分不等式方程原理[J]. 南昌大学学报, 1997, **19**(4): 9) 13.

[6] 胡海昌. 弹性力学广义变分原理在求近似解中的正确应用[J]. 中国科学, 1989, **19**(11): 1159) 1166.

[7] Adams R A. 索伯列夫空间[M]. 叶其孝, 王耀东, 应隆安, 等 译. 北京: 人民教育出版社, 1983.

[8] Brezzi F. On the existence, uniqueness and approximation of saddle_point problems arising from Lagrange multipliers[J]. RAIRO Ser Rouge, 1974, **8:** 129) 151.

[9] Pian T H H. On hybrid and mixed finite element methods[A]. Proc Int Symposium on Finite Element Method[C]. Hefei, China, May 18_23, 1981, Science Press, 1982, 1) 19.

The Existence and Uniqueness of Solutions of Generalized Variational Inequalities Arising From Elasticity With Friction

FU Ming_fu[1], WU Hong_fei[2]

(1 Institute of Engineering Mechanics, Nanchang University, Nanchang 330029, P R China;

2 Mechanical and Electronic Engineering College, Nanchang University, Nanchang 330029, P R China)

Abstract: The existence and uniqueness of solutions of generalized variational inequalities arising from elasticity with friction, which is equivalent to corresponding elemental problems, is elucidated in detail, and then FEM approximation and discrete methods are proposed.

Key words: generalized variational inequalities; stress compatibility; existence; uniqueness