应用数学和力学, 第 21 卷 第 8 期(2000 年 8 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2000) 08_0843_09

Lindelöf 的工作与 Chaplygin 的工作的互补性*

梁立孚, 陈卫东

(哈尔滨工程大学 航天工程系, 哈尔滨 150001)

(程昌钧推荐)

摘要: 运用 Vakonomic 模型导出 Lindelöf 方程, 表明 Lindelöf 的工作与 Vakonomic 模型相吻合; 运用 Chetaev 模型导出 Chaplygin 方程, 表明 Chaplygin 的工作与 Chetaev 模型相吻合• 在此基础上, 通过改进 Chaplygin 方程和 Lindelöf 方程的表示形式, 实现了从 Lindelöf 方程向 Chaplygin 方程的合理过渡和从 Chaplygin 方程向 Lindelöf 方程的合理的过渡• 最后, 给出一个典型实例• 结果表明, 正如 Vakonomic 模型与 Chetaev 模型是互补的一样, Lindelöf 的工作与 Chaplygin 的工作也是互补的•

关 键 词: 非完整系统; Chaplygin 方程; Lindelöf 方程; Vakonomic 模型; Chetaev 模型
中图分类号: O316 文献标识码: A

导 言

Chaplygin 指出: 在 Acta Societatis Scientiarum Fennicae, Vol. 20, No. 3 中, 登载了 Ernst Lindelöf 的论文"论旋转体在水平面上的滚动"• ……, 但在开始数页里, 当推导微分方程的时候, Lindelöf 造成一个重大的错误, 因而他所得出的方程比作者(指 Chaplygin——本文作者注) 实在所能得到的要简单些[1]•

从此, Lindelöf 的工作被称为 Lindelöf 错误, 而 Chaplygin 逐步成为俄国的著名学者, 并被誉为非完整力学的创始人之一•

Chaplygin 改进了 Lindelöf 的工作, 推导出著名的 Chaplygin 方程, 由于这类方程具有广泛的应用前景, 不少学者研究并推广了 Chaplygin 的工作• 例如: Voronets 将 Chaplygin 方程由线性齐次非完整约束系统推广到线性非齐次非完整约束系统[2], Novoselov 进一步将 Chaplygin 方程推广到非线性非完整约束系统[3]•

近年来, 在专著[4]的倡导下, 我国学者正致力于解决非完整力学中的一些有待进一步澄清和发展的问题[5]~[8], 这便促使我国学者更加全面和更加深入地研究非完整系统动力学• 本文应用 Vakonomic 模型导出 Lindelöf 方程, 表明 Lindelöf 的工作与 Vakonomic 模型相吻合; 运用 Chetaev 模型导出 Chaplygin 方程, 表明 Chaplygin 的工作与 Chetaev 模型相吻合• 在此基础上, 通过改进 Chaplygin 方程和 Lindelöf 方程的表示形式, 实现了从 Lindelöf 方程向 Chaplygin 方程的合理过渡和从 Chaplygin 方程向 Lindelöf 方程的合理过渡• 最后, 给出一个典型实例• 本

* 收稿日期: 1999_05_26; 修订日期: 2000_04_13
基金项目: 国家自然科学基金资助课题(19872022); 国家教委博士点基金资助课题
作者简介: 梁立孚(1939—), 男, 河北吴桥人, 教授, 博士生导师, 研究方向: 本构理论和变分原理, 航天动力学, 岩土力学及其应用.

文工作表明，正如Vakonomic模型与Chetaev模型是互补的一样，Lindelöf的工作与Chaplygin的工作也是互补的。

1 借助Chetaev模型来推导Chaplygin方程

设有一个动力学系统，该系统由动能T、力函数U和线性非完整约束的独立方程

$$\sum_{s=1}^{n} A_{\beta s}\dot{q}_s = 0, \qquad s = 1, 2, \cdots, n;\ \beta = 1, 2, \cdots, g;\ n > g \tag{1}$$

来描述。

约束方程(1)又可表示为

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta} = \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} B_{\beta\sigma}\dot{q}_\sigma, \qquad \sigma = 1, 2, \cdots, \varepsilon;\ \varepsilon = n - g, \tag{2}$$

其中，$A_{\beta s}$、$B_{\beta\sigma}$、U和T均与不独立的广义坐标$q_{\varepsilon+\beta}$无关。

对于这类系统，Hamilton原理的泛函表示为

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta(T + U)\,\mathrm{d}t = 0. \tag{3}$$

Chetaev条件表示为

$$\delta q_{\varepsilon+\beta} = \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} B_{\beta\sigma}\delta q_\sigma. \tag{4}$$

运用Lagrange乘子法，将(4)纳入泛函(3)中，可得

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta(T + U) + \sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\left(\delta q_{\varepsilon+\beta} - \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} B_{\beta\sigma}\delta q_\sigma\right)\right]\mathrm{d}t = 0. \tag{5}$$

经变分运算，可以导出系统的真实轨道方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma} - \dfrac{\partial T}{\partial q_\sigma} - \dfrac{\partial U}{\partial q_\sigma} + \displaystyle\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta B_{\beta\sigma} = 0, & \text{(6a)} \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}} - \lambda_\beta = 0. & \text{(6b)} \end{cases}$$

由(6)可见，该系统的广义约束力可以表示为

$$\begin{cases} R_\sigma = \displaystyle\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta B_{\beta\sigma}, & \text{(7a)} \\ R_{\varepsilon+\beta} = -\lambda_\beta. & \text{(7b)} \end{cases}$$

广义约束力在相应的广义虚位移上所做虚功为

$$\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} R_\sigma\delta q_\sigma + \sum_{\beta=1}^{g} R_{\varepsilon+\beta}\delta q_{\varepsilon+\beta} = \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta B_{\beta\sigma}\delta q_\sigma - \sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\delta q_{\varepsilon+\beta} = -\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\left(\delta q_{\varepsilon+\beta} - \sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} B_{\beta\sigma}\delta q_\sigma\right). \tag{8}$$

考虑到Chataev条件(4)，可知

$$\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon} R_\sigma\delta q_\sigma + \sum_{\beta=1}^{g} R_{\varepsilon+\beta}\delta q_{\varepsilon+\beta} = 0. \tag{9}$$

这类约束称为理想约束。

由(6b)解得

$$\lambda_\beta = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}. \tag{10}$$

将(10)代入(6a),可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}-\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}-\frac{\partial U}{\partial q_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}B_{\beta\sigma}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}=0. \tag{11}$$

利用方程(2)将 T 的表达式中的 $\dot{q}_{\varepsilon+\beta}$ 消去,而名其所得结果为 T,则有

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}B_{\beta\sigma}, \tag{12}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}B_{\beta\sigma}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\sum_{\gamma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial B_{\beta\sigma}}{\partial q_\gamma}\dot{q}_\gamma, \tag{13}$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}=\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial q_\sigma}=\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\sum_{\gamma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial B_{\beta\gamma}}{\partial q_\sigma}\dot{q}_\gamma. \tag{14}$$

将(13)和(14)代入(11),可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}-\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}-\frac{\partial U}{\partial q_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\sum_{\gamma=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial B_{\beta\gamma}}{\partial q_\sigma}-\frac{\partial B_{\beta\sigma}}{\partial q_\gamma}\right)\dot{q}_\gamma=0. \tag{15}$$

这就是 Chaplygin 方程.

2 借助 Vakonomic 模型来推导 Lindelöf 方程

将约束方程(2)变分,可得

$$\delta\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}B_{\beta\sigma}\delta\dot{q}_\sigma+\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\dot{q}_\sigma\sum_{\gamma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial B_{\beta\sigma}}{\partial q_\gamma}\delta q_\gamma. \tag{16}$$

引入 Lagrange 乘子 μ_β,将(16)纳入泛函(3)中,可得

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta(T+U)+\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\left(\delta\dot{q}_{\varepsilon+\beta}-\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}B_{\beta\sigma}\delta\dot{q}_\sigma-\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\dot{q}_\sigma\sum_{\gamma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial B_{\beta\sigma}}{\partial q_\gamma}\delta q_\gamma\right)\right]\mathrm{d}t=0. \tag{17}$$

经变分运算,可以导出系统的测地轨道方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}-\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}-\frac{\partial U}{\partial q_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\sum_{\gamma=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial B_{\beta\gamma}}{\partial q_\sigma}-\frac{\partial B_{\beta\sigma}}{\partial q_\gamma}\right)\dot{q}_\gamma-\sum_{\beta=1}^{g}\dot{\mu}_\beta B_{\beta\sigma}=0, \tag{18a}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}+\dot{\mu}_\beta=0. \tag{18b}$$

由(18b)解得

$$\dot{\mu}_\beta=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}, \tag{19}$$

进而可得

$$\mu_\beta=-\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}. \tag{20}$$

将(19)和(20)代入(18a),可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}-\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}-\frac{\partial U}{\partial q_\sigma}-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\sum_{\gamma=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial B_{\beta\gamma}}{\partial q_\sigma}-\frac{\partial B_{\beta\sigma}}{\partial q_\gamma}\right)\dot{q}_\gamma+\sum_{\beta=1}^{g}B_{\beta\sigma}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}=0. \tag{21}$$

有趣的是,如果将(13)和(14)代入(21),可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}-\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}-\frac{\partial U}{\partial q_\sigma}=0, \tag{22}$$

这就是 Lindelöf 方程.

由(18)可见，该系统的广义约束力可以表示为

$$\begin{cases} R_\sigma = \displaystyle\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\sum_{\gamma=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial B_{\beta\gamma}}{\partial q_\sigma}-\frac{\partial B_{\beta\sigma}}{\partial q_\gamma}\right)\dot{q}_\gamma-\sum_{\beta=1}^{g}\dot{\mu}_\beta B_{\beta\sigma}, & (23a)\\ R_{\varepsilon+\beta}=\dot{\mu}_\beta\text{.} & (23b)\end{cases}$$

广义约束力在相应的广义虚位移上所做的虚功为

$$\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}R_\sigma\delta q_\sigma+\sum_{\beta=1}^{g}R_{\varepsilon+\beta}\delta q_{\varepsilon+\beta}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left[\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\sum_{\gamma=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial B_{\beta\gamma}}{\partial q_\sigma}-\frac{\partial B_{\beta\sigma}}{\partial q_\gamma}\right)\dot{q}_\gamma-\sum_{\beta=1}^{g}\dot{\mu}_\beta B_{\beta\sigma}\right]\delta q_\sigma+\sum_{\beta=1}^{g}\dot{\mu}_\beta\delta q_{\varepsilon+\beta}\text{.} \tag{24}$$

由(16)可得

$$\sum_{\gamma=1}^{\varepsilon}\dot{q}_\gamma\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial B_{\beta\gamma}}{\partial q_\sigma}-\frac{\partial B_{\beta\sigma}}{\partial q_\gamma}\right)\delta q_\sigma=\delta\dot{q}_{\varepsilon+\beta}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}B_{\beta\sigma}\delta q_\sigma\text{.} \tag{25}$$

将(25)代入(24)，可得

$$\sum_{\gamma=1}^{\varepsilon}R_\sigma\delta q_\sigma+\sum_{\beta=1}^{g}R_{\varepsilon+\beta}\delta q_{\varepsilon+\beta}=\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mu_\beta\left(\delta q_{\varepsilon+\beta}-\sum_{\gamma=1}^{\varepsilon}B_{\beta\sigma}\delta q_\sigma\right)\text{.} \tag{26}$$

一般说来

$$\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}R_\sigma\delta q_\sigma+\sum_{\beta=1}^{g}R_{\varepsilon+\beta}\delta q_{\varepsilon+\beta}\neq 0, \tag{27}$$

这类约束称为非理想约束，为了使这类非理想约束理想化，可使

$$\delta q_{\varepsilon+\beta}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}B_{\beta\sigma}\delta q_\sigma, \tag{4}$$

这不是别的，正是 Chetaev 条件。

3 改进 Chaplygin 方程和 Lindelöf 方程的表示形式

Chaplygin 指出：显然，欲使这组方程(指 Chaplygin 方程(15)——本文作者注)具有平常的 Lagrange 方程的形式，则其必要条件为，各函数 B 完全满足如下的关系式

$$\frac{\partial B_{\beta\gamma}}{\partial q_\sigma}-\frac{\partial B_{\beta\sigma}}{\partial q_\gamma}=0, \tag{28}$$

其中 β, γ, σ 是一切可能的标号。 而在这种情况下，方程

$$\sum_{s=1}^{n}A_{\beta s}\delta q_s=0 \tag{29}$$

和(1)即为可积的，因此在参数 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 之间必有有限关系式，而与假设不合。

我们注意到，将(2)变分，稍加变换可得

$$\delta\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\sum_{\gamma=1}^{\varepsilon}\dot{q}_\gamma\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial B_{\beta\gamma}}{\partial q_\sigma}-\frac{\partial B_{\beta\sigma}}{\partial q_\gamma}\right)\delta q_\sigma+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}B_{\beta\sigma}\delta q_\sigma\text{.} \tag{30}$$

令上式满足条件(28)，则(30)变为可积式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_{\varepsilon+\beta}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}B_{\beta\sigma}\delta q_\sigma\text{.} \tag{31}$$

将(31)积分，可得 Chetaev 条件(4)。

类似地，将(1)变分，稍加变换可得

$$\sum_{k=1}^{n}\dot{q}_k\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial A_{\beta k}}{\partial q_s}-\frac{\partial A_{\beta s}}{\partial q_k}\right)\delta q_s+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{s=1}^{n}A_{\beta s}\delta q_s=0\text{.} \tag{32}$$

令上式满足类似于(28)的表达式

$$\frac{\partial A_{\beta k}}{\partial q_s}-\frac{\partial A_{\beta s}}{\partial q_k}=0. \tag{33}$$

则(32)变为可积式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{s=1}^{n}A_{\beta s}\delta q_s=0. \tag{34}$$

将(34)积分，可得 Chetaev 条件(29)。

以上论述表明，由可积必要条件(28)或(33)可以导致 Chetaev 条件(4)或(29)。它的逆命题也成立，由 Chetaev 条件(4)或(29)可以导致可积必要条件(28)或(33)。这一逆命题已被许多知名学者证明[4],[9]~[13]。

由第 1 节可知，运用 Chetaev 模型导出真实轨道方程(6)，方程(6)和约束方程(1)或(2)一起，构成封闭的微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial T}{\partial \dot q_\sigma}-\dfrac{\partial T}{\partial q_\sigma}-\dfrac{\partial U}{\partial q_\sigma}+\displaystyle\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta B_{\beta\sigma}=0, & (35\mathrm{a})\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial T}{\partial \dot q_{\varepsilon+\beta}}-\lambda_\beta=0, & (35\mathrm{b})\\ \displaystyle\sum_{s=1}^{n}A_{\beta s}\dot q_s=0 \text{ 或 } \dot q_{\varepsilon+\beta}=\sum_{\alpha=1}^{\varepsilon}B_{\beta\alpha}\dot q_\alpha, & (35\mathrm{c})\end{cases}$$

由(35b)解出 λ_β，将 λ_β 的表达式代入(35a)，再利用(35c)将 T 的表达式中的 $\dot q_{\varepsilon+\beta}$ 消去，而名其所得结果为 T，经(12)～(14)的数学变换，可得 Chaplygin 方程(15)。

由第 2 节可知，运用 Vakonomic 模型导出测地轨道方程(18)，方程(18)与约束方程(1)或(2)一起，构成封闭的微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial T}{\partial \dot q_\sigma}-\dfrac{\partial T}{\partial q_\sigma}-\dfrac{\partial U}{\partial q_\sigma}+\displaystyle\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\sum_{\gamma=1}^{\varepsilon}\left(\dfrac{\partial B_{\beta\gamma}}{\partial q_\sigma}-\dfrac{\partial B_{\beta\sigma}}{\partial q_\gamma}\right)\dot q_\gamma-\sum_{\beta=1}^{g}\dot\mu_\beta B_{\beta\sigma}=0, & (36\mathrm{a})\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial T}{\partial \dot q_{\varepsilon+\beta}}+\dot\mu_\beta=0, & (36\mathrm{b})\\ \displaystyle\sum_{s=1}^{n}A_{\beta s}\dot q_s=0 \text{ 或 } \dot q_{\varepsilon+\beta}=\sum_{\alpha=1}^{\varepsilon}B_{\beta\alpha}\dot q_\alpha. & (36\mathrm{c})\end{cases}$$

由(36b)解出 $\dot\mu_\beta$ 和 μ_β，将 $\dot\mu_\beta$ 和 μ_β 的表达式代入(36a)，再利用(36c)将 T 的表达式中的 $\dot q_{\varepsilon+\beta}$ 消去，而名其所得结果为 T，经(12)～(14)的数学变换，可得 Lindelöf 方程(22)。

由以上分析可知，不用施加任何额外的限制条件，便可由(36)导出 Lindelöf 方程(22)；而令(36)满足关系式(28)，并令 $\dot\mu_\beta=-\lambda_\beta$，则(36)变换为(35)，进而由(35)可导出 Chaplygin 方程。如此说来，理应在 Lindelöf 方程满足关系式(28)时导致 Chaplygin 方程，但 Chaplygin 做出相反的结论。这一结果还可用下述方法得出。令约束方程(2)的变分式满足关系式(28)，可以导致 Chetaev 条件(4)，而由第 1 节知，运用 Chetaev 条件可导出 Chaplygin 方程；由第 2 节可知，不运用 Chetaev 条件可导出 Lindelöf 方程。按照这一思路，也应是在 Lindelöf 方程满足关系式(28)时导致 Chaplygin 方程，而 Chaplygin 却做出相反的结论。

可以应用改变 Chaplygin 方程和 Lindelöf 方程表示形式的方法来解决上面提出的问题。

将 Hamilton 原理的表达式(3)写成展开形式，则有

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}\delta q_\sigma+\frac{\partial T}{\partial \dot q_\sigma}\delta\dot q_\sigma+\frac{\partial U}{\partial q_\sigma}\delta q_\sigma\right)+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial \dot q_{\varepsilon+\beta}}\delta\dot q_{\varepsilon+\beta}\right]\mathrm{d}t=0. \tag{37}$$

将(2)和(30)代入上式,经分部积分,并按惯例在时域边界处取 $\delta q_\sigma = 0$, 可得

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\Big[\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot q_\sigma}+\frac{\partial U}{\partial q_\sigma}-\sum_{\beta=1}^{g}B_{\beta\sigma}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot q_{\varepsilon+\beta}}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial \dot q_{\varepsilon+\beta}}\sum_{\gamma=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial B_{\beta\gamma}}{\partial q_\sigma}-\frac{\partial B_{\beta\sigma}}{\partial q_\gamma}\right)\dot q_\gamma\Big]\delta q_\sigma \mathrm{d}t = 0, \tag{38}$$

其中$\partial T/\partial q_\sigma$, $\partial T/\partial \dot q_\sigma$ 和$\partial T/\partial \dot q_{\varepsilon+\beta}$分别为将(2)代入$\partial T/\partial q_\sigma$, $\partial T/\partial \dot q_\sigma$ 和$\partial T/\partial \dot q_{\varepsilon+\beta}$后的表达式。由于 δq_σ 的任意性, 由(38) 可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot q_\sigma}-\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}-\frac{\partial U}{\partial q_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}B_{\beta\sigma}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot q_{\varepsilon+\beta}}-\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial \dot q_{\varepsilon+\beta}}\sum_{\gamma=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial B_{\beta\gamma}}{\partial q_\sigma}-\frac{\partial B_{\beta\sigma}}{\partial q_\gamma}\right)\dot q_\gamma = 0, \tag{39}$$

这便是Lindelöf 方程的新的表示形式。

若使上述方程满足表达式(28),则得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot q_\sigma}-\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}-\frac{\partial U}{\partial q_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}B_{\beta\sigma}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot q_{\varepsilon+\beta}} = 0, \tag{40}$$

这便是Chaplygin 方程的新的表达式。

由Lindelöf 方程的新的表示形式和Chaplygin 方程的新的表示形式可见, 使Lindelöf 方程的新的表示形式满足关系式(28),则可导致 Chaplygin 方程的新的表示形式。 这样一来, 便解决了上面提出的问题。

我们指出, 如上的Chaplygin 方程的新的表示形式,并不是一种全新的表示形式。 其实,在原Chaplygin 方程(15)中, $\partial T/\partial \dot q_{\varepsilon+\beta}$ 实际上应是$\partial T/\partial \dot q_{\varepsilon+\beta}$,只不过当时Chaplygin 先生没有明确指出这一点。

4 例 子

一半径为 a, 质量为 m 的均质圆球在完全粗糙的水平面上无滑动地滚动。 试建立圆球的运动微分方程。

假设取球心坐标 x、y 及3个Euler 角 ψ、θ、φ为广义坐标q_4、q_5、q_1、q_2、q_3, 圆球所受非完整约束为

$$\dot x = -a(\dot\varphi\cos\psi\sin\theta-\dot\theta\sin\psi), \tag{41}$$

$$\dot y = -a(\dot\varphi\sin\psi\sin\theta+\dot\theta\cos\psi). \tag{42}$$

由(41)和(42)得知

$$\left.\begin{aligned}&B_{11}=0,\ B_{12}=a\sin\psi,\ B_{13}=-a\sin\theta\cos\psi,\\&B_{21}=0,\ B_{22}=-a\cos\psi,\ B_{23}=-a\sin\theta\sin\psi.\end{aligned}\right\} \tag{43}$$

按照专著[4],将广义主动力处理为

$$Q_1 = m_3^0, \tag{44}$$

$$Q_2 = m_N^0 + a(V_1\sin\psi - V_2\cos\psi), \tag{45}$$

$$Q_3 = m_3^0 - a\sin\theta(V_1\cos\psi + V_2\sin\psi). \tag{46}$$

圆球的动能表示为

$$T = \frac{1}{2}m(\dot x^2+\dot y^2)+\frac{1}{2}\,\frac{2}{5}ma^2(\dot\theta^2+\dot\varphi^2+\dot\psi^2+2\dot\varphi\dot\psi\cos\theta). \tag{47}$$

利用(41)和(42)消去(47)中的$\dot{x}$和$\dot{y}$,则有

$$T = \frac{1}{2}ma^2\left[\frac{7}{5}\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\sin^2\theta + \frac{2}{5}(\dot\varphi^2 + \dot\psi^2 + 2\dot\varphi\dot\psi\cos\theta)\right]. \tag{48}$$

4.1 应用 Lindelöf 方程

应用(48)可以求得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot\psi} - \frac{\partial T}{\partial\psi} = \frac{2}{5}ma^2(\ddot\psi + \ddot\varphi\cos\theta - \dot\varphi\dot\theta\sin\theta), \tag{49}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot\theta} - \frac{\partial T}{\partial\theta} = ma^2\left(\frac{7}{5}\ddot\theta + \dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta + \frac{2}{5}\dot\varphi\dot\psi\sin\theta\right), \tag{50}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi} - \frac{\partial T}{\partial\varphi} = ma^2\left(\ddot\varphi\sin^2\theta + 2\dot\varphi\dot\theta\sin\theta\cos\theta + \frac{2}{5}\ddot\varphi + \frac{2}{5}\ddot\psi\cos\theta - \frac{2}{5}\dot\psi\dot\theta\sin\theta\right), \tag{51}$$

由(49)、(50)、(51)、(42)、(45)、(46)可得测地轨道方程

$$\frac{2}{5}ma^2(\ddot\psi + \ddot\varphi\cos\theta - \dot\varphi\dot\theta\sin\theta) - m_3^0 = 0, \tag{52}$$

$$ma^2\left(\frac{7}{5}\ddot\theta + \dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta + \frac{2}{5}\dot\varphi\dot\psi\sin\theta\right) - m_N^0 - a(V_1\sin\psi - V_2\cos\psi) = 0, \tag{53}$$

$$ma^2\left(\ddot\varphi\sin^2\theta + 2\dot\varphi\dot\theta\sin\theta\cos\theta + \frac{2}{5}\ddot\varphi + \frac{2}{5}\ddot\psi\cos\theta - \frac{2}{5}\dot\psi\dot\theta\sin\theta\right) - m_3^0 + a\sin\theta(V_1\cos\psi + V_2\sin\psi) = 0. \tag{54}$$

4.2 应用 Chaplygin 方程

考虑到

$$\partial T/\partial\dot q_4 = m\dot x = -ma(\dot\theta\sin\psi - \dot\varphi\sin\theta\cos\psi), \tag{55}$$

$$\partial T/\partial\dot q_5 = m\dot y = -ma(\dot\theta\cos\psi + \dot\varphi\sin\theta\sin\psi). \tag{56}$$

再考虑到各$B_{\beta\sigma}$的取值(43),则可算得

$$\sum_{\beta=1}^{2}\frac{\partial T}{\partial\dot q_{3+\beta}}\sum_{\gamma=1}^{3}\left(\frac{\partial B_{\beta\gamma}}{\partial q_1} - \frac{\partial B_{\beta1}}{\partial q_\gamma}\right)\dot q_\gamma = ma(\dot\theta\sin\psi - \dot\varphi\sin\theta\cos\psi)\,a(\dot\theta\cos\psi + \dot\varphi\sin\theta\sin\psi) - ma(\dot\theta\cos\psi + \dot\varphi\sin\theta\sin\psi)\,a(\dot\theta\sin\psi - \dot\varphi\sin\theta\cos\psi), \tag{57}$$

$$\sum_{\beta=1}^{2}\frac{\partial T}{\partial\dot q_{3+\beta}}\sum_{\gamma=1}^{3}\left(\frac{\partial B_{\beta\gamma}}{\partial q_2} - \frac{\partial B_{\beta2}}{\partial q_\gamma}\right)\dot q_\gamma = ma^2\dot\varphi\sin\theta(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta), \tag{58}$$

$$\sum_{\beta=1}^{2}\frac{\partial T}{\partial\dot q_{3+\beta}}\sum_{\gamma=1}^{3}\left(\frac{\partial B_{\beta\gamma}}{\partial q_3} - \frac{\partial B_{\beta3}}{\partial q_\gamma}\right)\dot q_\gamma = -ma^2\dot\theta\sin\theta(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta). \tag{59}$$

将(44)~(46),(49)~(51)和(57)~(59)代入 Chaplygin 方程,可得真实轨道方程

$$\frac{2}{5}ma^2(\ddot\psi + \ddot\varphi\cos\theta - \dot\varphi\dot\theta\sin\theta) - m_3^0 = 0, \tag{60}$$

$$\frac{7}{5}ma^2(\ddot\theta + \dot\varphi\dot\psi\sin\theta) - m_N^0 - a(V_1\sin\psi - V_2\cos\psi) = 0, \tag{61}$$

$$ma^2\left(\ddot\varphi\sin^2\theta + \frac{2}{5}\ddot\varphi + \frac{2}{5}\ddot\psi\cos\theta + \dot\varphi\dot\theta\sin\theta\cos\theta - \frac{7}{5}\dot\psi\dot\theta\sin\theta\right) - m_3^0 + a\sin\theta(V_1\cos\psi + V_2\sin\psi) = 0. \tag{62}$$

4.3 应用新 Chaplygin 方程

考虑到

$$\frac{\partial T}{\partial\dot\psi} = \frac{2}{5}ma^2(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta) = \frac{\partial T}{\partial\dot\psi}, \tag{63}$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot\theta} = \frac{2}{5}ma^2\dot\theta = \frac{\partial T}{\partial\dot\theta}, \tag{64}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi}=\frac{2}{5}ma^2(\dot\varphi+\dot\psi\cos\theta)=\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi}\tag{65}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{\partial T}{\partial \psi}=\frac{\partial T}{\partial \varphi}=0,\tag{66}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta}=-\frac{2}{5}ma^2\dot\varphi\dot\psi\sin\theta=\frac{\partial T}{\partial \theta},\tag{67}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot x}=m\dot x,\ \frac{\partial T}{\partial \dot x}=-ma(\dot\varphi\cos\psi\sin\theta-\dot\theta\sin\psi),\tag{68}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot y}=m\dot y,\ \frac{\partial T}{\partial \dot y}=-ma(\dot\varphi\sin\psi\sin\theta+\dot\theta\cos\psi)\cdot\tag{69}$$

将(44)~(46)和(63)~(69)代入新 Chaplygin 方程,经整理可得(60)、(61)、(62)等真实轨道方程•

比较 4.2 节和 4.3 节的推导过程可见,4.3 节的推导比 4.2 节的推导简单得多•

4.4 应用新 Lindelöf 方程

只要注意到原 Chaplygin 方程中的 $\partial T/\partial \dot q_{3+\beta}$ 实为 $\partial T/\partial \dot q_{3+\beta}$,则(57)~(59)可以变换为

$$\sum_{\beta=1}^{2}\frac{\partial T}{\partial \dot q_{3+\beta}}\sum_{\gamma=1}^{3}\left(\frac{\partial B_{\beta\gamma}}{\partial q_1}-\frac{\partial B_{\beta1}}{\partial q_\gamma}\right)\dot q_\gamma=ma(\dot\theta\sin\psi-\dot\varphi\sin\theta\sin\psi)a(\dot\theta\cos\psi+$$
$$\dot\varphi\sin\theta\sin\psi)-ma(\dot\theta\cos\psi+\dot\varphi\sin\theta\sin\psi)a(\dot\theta\sin\psi-\dot\varphi\sin\theta\cos\psi),\tag{70}$$

$$\sum_{\beta=1}^{2}\frac{\partial T}{\partial \dot q_{3+\beta}}\sum_{\gamma=1}^{3}\left(\frac{\partial B_{\beta\gamma}}{\partial q_2}-\frac{\partial B_{\beta2}}{\partial q_\gamma}\right)\dot q_\gamma=ma^2\dot\varphi\sin\theta(\dot\psi+\dot\varphi\cos\theta),\tag{71}$$

$$\sum_{\beta=1}^{2}\frac{\partial T}{\partial \dot q_{3+\beta}}\sum_{\gamma=1}^{3}\left(\frac{\partial B_{\beta\gamma}}{\partial q_3}-\frac{\partial B_{\beta3}}{\partial q_\gamma}\right)\dot q_\gamma=-ma^2\dot\theta\sin\theta(\dot\psi+\dot\varphi\cos\theta)\cdot\tag{72}$$

将(70)~(72)、(63)~(69)和其它有关的量代入新的 Lindelöf 方程,可得(52)、(53)、(54)等测地轨道方程•

以上实例表明,新 Chaplygin 方程和原 Chaplygin 方程是等价的,新 Lindelöf 方程与原 Lindelöf 方程也是等价的•

5 结 论

综上所述,应用 Vakonomic 模型导出 Lindelöf 方程,表明 Lindelöf 的工作与 Vakonomic 模型相吻合;运用 Chetaev 模型导出 Chaplygin 方程,表明 Chaplygin 的工作与 Chetaev 模型相吻合•在此基础上,通过改进 Chaplygin 方程和 Lindelöf 方程的表示形式,实现了从 Lindelöf 方程向 Chaplygin 方程的合理过渡和从 Chaplygin 方程向 Lindelöf 方程的合理过渡• 最后,给出一个典型实例• 本文工作表明,正如 Vakonomic 模型与 Chetaev 模型是互补的一样,Lindelöf 的工作与 Chaplygin 的工作也是互补的•

[参 考 文 献]

[1] ±Á½Í´º¿ . ÃÃ½¶µÀ³ ±¿º Ñ ÁÀ º¿ ±¼º¼¶ ¶ À½À¿À¾¿ÍÇ ºÃÄ¶¾ [M]. ÀÃ¼³ ± ÀÃÄ¶Çº¹ µ±Ä, 1949.

[2] ÀÂÀ¿¶È . ² ÅÂ±¿¶¿ºÑÇ µ³º ,¶¿º Ñ µ½Ñ ¿¶ À½À¿À¾¿ÍÇ ÃºÃÄ¶¾ [J]. ±Ä¶¾ Ã ², 1901, **22**(4): 659—680.

[3] À³ ÄÃ¶½À³ . ±Êº Â¶ ¿ ÍÌ ÅÂ±¿¶¿º Ñ µ³º ,¶¿º Ñ ¿¶½º¿¶»¿ÍÇ ¿¶ À½À¿À¾¿ÍÇ ÃºÃÄ¶¾[J]. ¶Ç±º¼± Ак а , 1957, **21**(7): 53—62.

[4] 梅凤翔. 非完整系统力学基础[M]. 北京: 北京工业学院出版社, 1985.

[5] 陈滨. 状态空间非线性约束的完整性与非完整性[J]. 中国科学, 1993, **23**(8): 836—846.
[6] 梁立孚, 石志飞. 非完整约束系统中广义位移变分的选值域问题[J]. 固体力学学报, 1993, **14**(3): 189—194.
[7] 郭仲衡. 一类非完整力学问题的合理解[J]. 中国科学, 1994, **24**(5): 485—497.
[8] 梅凤翔. 非完整系统的自由运动与非完整性的消失[J]. 力学学报, 1994, **26**(4): 470—476.
[9] Pars L A. An Introduction to the Calculus of Variations[M]. London: Heinemann, 1962.
[10] Rosonberg R M. Analytical Dynamics of Discrete Systems[M]. New York: Pleum Press, 1977.
[11] Greenwood D T. Classical Dynamics[M]. Englewood Cliffs, N J: Prentice_Hall, Inc, 07632, 1997.
[12] 黄昭度, 纪辉玉. 分析力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 1985.
[13] 陈滨. 分析动力学[M]. 北京: 北京大学出版社, 1987.

The Complementary Property of Lindelöf's Work and Chaplygin's Work

LIANG Li_fu, CHEN Wei_dong
(Department of Airspace Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, P R China)

Abstract: Lindelöf's equation is derived by using the Vakonomic model, which shows that Lindelöf's work coincides with Vakonomic model. Chaplygin's equation is derived by using Chetaev's model, which shows that Chaplygin's work coincides with Chetaev's model. On basis of these, by improving the expressions of Chaplygin's equation and Lindelöf's equation, the reasonable transition from Chaplygin's equation to Lindelöf's equation is realized, the reasonable transition from Lindelöf's equation to Chaplygin's equation is realized too. Finally, a typical example is given. The work of this paper shows that, just as the Vakonomic model and Chetaev's model are complementary to each other, Lindelöf's work and Chaplygin's work are complementary to each other too.

Key words: non_holonomic system; Lindelöf's equation; Chaplygin's equation; the Vakonomic model; Chetaev's model