

文章编号:1000-0887(2004)01-0100-11

偏斜应变能 J^* 积分及应用

蒋玉川, 王启智

(四川大学 土木工程及应用力学系, 成都 610065)

(陈山林推荐)

摘要: 引进偏斜应变能的概念,对平面裂纹起裂扩展问题进行了讨论,给出了一个与路径无关的 J^* 积分,同时对其守恒性给予了严格的证明,通过 I 型裂纹的应用,其结果与现行公开发表的文献或手册结果一致.

关键词: 偏斜应变能; J^* 积分; 守恒性; 应力强度因子

中图分类号: O346 **文献标识码:** A

引言

众所周知,在文[1]中, J. R. Rice 等用 J 积分来描述弹塑性情况下裂纹尖端区域应力应变场强度平均值的一个参量,在线弹性情况下, $J = G$. 然而,文[2]指出 J 积分并不是唯一的静弹性力学守恒性定律,如 J_k 、 L 、 M 等与积分路积无关的守恒性积分公式. 文[3]用横向释放率 G^* 描述了 I 型裂纹的扩展问题,他们都取得了成功. 在文[4]中讨论了有限变形弹性体 J 积分及其对偶形式 J 积分的守恒性.

作者在本文中提出了一个与路径无关的 J^* 积分,并且我们认为在弹塑性情况下塑性材料中裂纹扩展的动力来源于偏斜应变能的释放. 而与体积应变能无关. Orowan 通过对金属材料裂纹扩展过程的研究,并指出裂纹扩展前在其尖端附近要产生一个塑性区,因此系统提供裂纹扩展的能量不仅用于形成新的表面能,而且还用于引起这种塑性变形所需的塑性功,根据 Orowan 的研究结果,对塑性材料,塑性功 Γ 比表面能 γ 大三个数量级^[5]. 因而我们有充分的理由用偏斜应变能的概念来描述弹塑性情况下平面裂纹扩展的真实动力. 本文给出了 J^* 积分守恒性的严格证明,并就平面应力给出了其计算结果. 在线性情况下 $J^* = G^*$, 偏斜应变能释放率,通过 I 型裂纹的应用,取得了与文[3]十分接近和与文[6]也吻合得较好的结果.

1 偏斜应变能的 J^* 积分定义及守恒性证明

1.1 定义

$$J^* = \int_{\Gamma} (W_j n_1 - S_i u_{i,1}) \cdot ds. \quad (1)$$

• 收稿日期: 2001-11-28; 修订日期: 2003-12-12

作者简介: 蒋玉川(1963—),四川南充人,副教授,博士;

王启智(1946—),浙江嘉兴人,教授,博士生导师(E-mail: qzw@scu.edu.cn);

本文联系人: 蒋玉川(E-mail: yej01@163.net); Tel: 028-85406145

如图 1 所示. 其中 W 为应变能密度, 且 $W = W_f + W_v$

W_f 为偏斜应变能密度, W_v 为体积应变能密度, S_i 为回路 s 上任意点的偏斜应力分量, u_i 为回路 s 上任意一点处的位移分量. n 为回路 s 上任一点处外法线单位矢量, n_1 为 n 与 x_1 方向夹角的方向余弦: $n_1 = \cos(n, x_1) = dx_2/ds$.

1.2 J^* 积分守恒性证明

根据格林公式

$$\frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} = \sigma_{ij}, \quad (2)$$

式中: $\sigma_{ij} = \sigma_m \delta_{ij} + S_{ij}$, $\epsilon_{ij} = \epsilon_m \delta_{ij} + e_{ij}$.

其中: σ_m 为球形应力张量, S_{ij} 为偏斜应力张量, ϵ_m 为球形应变张量, e_{ij} 为偏斜应变张量.

(2)式表达为,

$$\frac{\partial W_f}{\partial \epsilon_{ij}} + \frac{\partial W_v}{\partial \epsilon_{ij}} = \sigma_m \delta_{ij} + S_{ij}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial W_f}{\partial \epsilon_{ij}} = \frac{\partial W_f}{\partial e_{ij}} \cdot \frac{\partial e_{ij}}{\partial \epsilon_{ij}} = \frac{\partial W_f}{\partial e_{ij}} \cdot \frac{1}{\frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial e_{ij}}} = \frac{\partial W_f}{\partial e_{ij}}, \quad (3)'$$

$$\frac{\partial W_v}{\partial \epsilon_{ij}} = \frac{\partial W_v}{\partial \epsilon_m} \cdot \frac{\partial \epsilon_m}{\partial \epsilon_{ij}} = \frac{\partial W_v}{\partial \epsilon_m} \cdot \frac{1}{\frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial \epsilon_m}} = \frac{\partial W_v}{\partial \epsilon_m} \cdot \delta_{ij}. \quad (3)''$$

(3)式即为

$$\frac{\partial W_v}{\partial \epsilon_m} \delta_{ij} + \frac{\partial W_f}{\partial e_{ij}} = \sigma_m \delta_{ij} + S_{ij}, \quad (4)$$

比较等式两端得,

$$\sigma_m = \frac{\partial W_v}{\partial \epsilon_m}, \quad S_{ij} = \frac{\partial W_f}{\partial e_{ij}}. \quad (5)$$

(1)式沿图 1 所示闭合回路 $c \equiv s + \overline{AA'} - s' + \overline{B'B}$ 的表达式应为:

$$\oint_c \left(W_f dx_2 - S_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} ds \right). \quad (6)$$

现引用数学分析中的格林公式, 即为

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x_j} dx_1 dx_2 = \int_{\Gamma} P \cdot n_j ds. \quad (7a)$$

如果 P 是任意标量或矢量和张量的标量分量, 由(7a)可得相应的矢量的分量 P_j 和二阶张量的分量 P_{ij} , 于是得

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial P_j}{\partial x_j} dx_1 dx_2 = \oint_{\Gamma} P_j n_j ds \quad \text{和} \quad \iint_{\Omega} \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} dx_1 dx_2 = \oint_{\Gamma} P_{ij} n_j ds. \quad (7b)$$

(6)式中的第二项积分, 根据偏斜应力边界条件 $S_i = S_{ij} n_j$, 并引用格林公式(7b), 可以得到

$$\oint_c S_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} ds = \oint_c S_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x_1} ds = \iint_A \frac{\partial}{\partial x_j} \left(S_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) dx_1 dx_2. \quad (8)$$

以上公式(8)引用了张量重复下标求和的记法. A 为回路 c 所围面积. (6)式中的第一项积分

$$\oint_c W_f dx_2 = \iint_A \frac{\partial W_f}{\partial x_1} dx_1 dx_2, \quad (9)$$

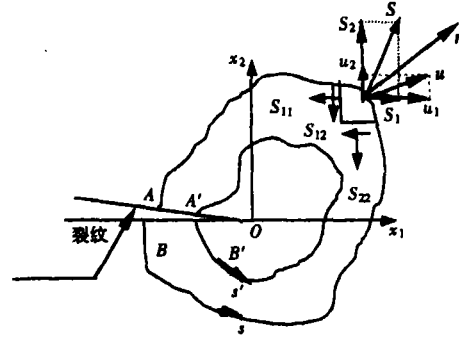


图 1 裂纹尖端 J^* 积分的回路

将(8)、(9)代入(6)式,得到

$$\oint_c \left(W_f dx_2 - S_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} ds \right) = \iint_A \left[\frac{\partial W_f}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(S_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) \right] dx_1 dx_2. \quad (10)$$

且注意到 $\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$, 和应用(3)'式和(5)式.

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_f}{\partial x_1} &= \frac{\partial W_f}{\partial \varepsilon_{ij}} \cdot \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_1} = \frac{\partial W_f}{\partial e_{ij}} \cdot \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_1} = \\ S_{ij} \cdot \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_1} &= S_{ij} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

由偏应力张量是对称张量,即:

$$S_{ij} = S_{ji}. \quad (12)$$

以及对 u_i 的微商可以交换次序,上述(11)式表示为:

$$\frac{\partial W_f}{\partial x_1} = \frac{1}{2} S_{ij} \frac{\partial}{\partial x_1} (u_{i,j} + u_{j,i}) = S_{ij} \frac{\partial}{\partial x_1} (u_{i,j}) = S_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} (u_{i,x_1}). \quad (13)$$

再把(13)式改写为

$$\frac{\partial W_f}{\partial x_1} = S_{ij} \frac{\partial}{\partial x_1} (u_{i,x_1}) = \frac{\partial}{\partial x_j} (S_{ij} u_{i,x_1}) - (S_{ij,j}) u_{i,x_1}. \quad (14)$$

由平衡方程 $\sigma_{ij,j} = 0$, 容易导出 $S_{ij,j} = 0$, 所以最后得到:

$$\frac{\partial W_f}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_j} (S_{ij} u_{i,x_1}). \quad (15)$$

将(15)式代入(10)式可知,恒等于零,即(6)式亦恒等于零:

$$\oint_c \left(W_f dx_2 - S_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} ds \right) \equiv 0 \quad (6)'$$

又因为在线段 $\overline{BB'}$ 和 $\overline{A'A}$ 上, $dx_2 = 0$, 裂纹表面自由,该两段线上 $S_i = 0$, 所以(6)'式为:

$$\oint_c \left(W_f dx_2 - S_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} ds \right) = \int_{s-s'} \left(W_f dx_2 - S_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} ds \right) = 0,$$

最后得到:

$$\int_s \left(W_f dx_2 - S_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) ds = \int_{s'} \left(W_f dx_2 - S_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) ds. \quad (16)$$

(16)式表明 J^* 积分数值与积分路径无关. 守恒性证毕.

1.3 J^* 积分的具体表达式

在偏斜应力张量状态下偏斜应变能密度为

$$W_f = \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]. \quad (17)$$

在平面应力情况下, $\tau_{xz} = 0, \tau_{yz} = 0, \sigma_z = 0$, 代入(17)式得到

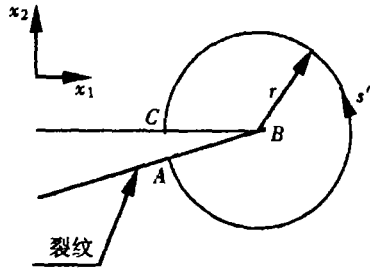
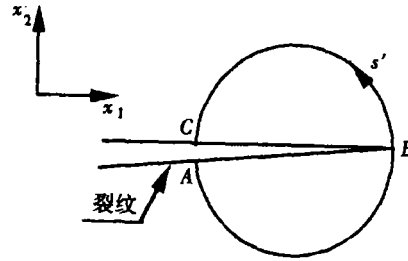
$$W_f = \frac{1+\nu}{3E} [(\sigma_x + \sigma_y)^2 - 3(\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2)]. \quad (18)$$

沿如图 2 所示积分路径,则(1)式中的第一项为:

$$\int_s W_f n_1 ds = \frac{1+\nu}{3E} \int_{-\pi}^{\pi} [(\sigma_x + \sigma_y)^2 - 3(\sigma_x \cdot \sigma_y - \tau_{xy}^2)] \cdot r \cos \theta d\theta, \quad (19)$$

对于 I 型裂纹顶端应力分量为

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right), \\ \sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right), \\ \tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}. \end{cases} \quad (20)$$

图2 J^* 积分路径之一图3 J^* 积分路径之二

(20)式代入(19)则得到:

$$\int_s W_f n_1 ds = \frac{1+\nu}{6} \cdot \frac{K_I^2}{E}. \quad (21)$$

又 J^* 积分中的第二项为,

$$\int_s S_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} ds = \int_{-\pi}^{\pi} \left(S_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + S_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) r d\theta. \quad (22)$$

式中

$$\begin{cases} S_1 = S_{11} \cos \theta + S_{12} \sin \theta, S_2 = S_{21} \cos \theta + S_{22} \sin \theta, \\ S_{11} = \sigma_x - \sigma_m, S_{12} = S_{21} = \tau_{xy}, S_{22} = \sigma_y - \sigma_m. \end{cases} \quad (23)$$

综合(20)式得:

$$\begin{cases} S_1 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(\frac{5}{6} \cos \theta - \frac{1}{2} \right), \\ S_2 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(\frac{5}{6} \sin \theta \right). \end{cases} \quad (24)$$

图1所示回路 s 上的任意点处的位移分量为

$$\begin{cases} u_1 = \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right), \\ u_2 = \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 - 2\nu - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right), \end{cases} \quad (25)$$

式中 μ 为剪切弹性模量, ν 为泊松比

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \cos \theta \frac{\partial u_1}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} = \frac{K_I}{2\mu \sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \theta \right), \quad (26)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \cos \theta \frac{\partial u_2}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial u_2}{\partial \theta} = -\frac{K_I}{2\mu \sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 - 2\nu - \cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \theta \right), \quad (27)$$

将(24)式, (26), 和(27)式代入(22)式化简为:

$$\int_s S_i u_{i,1} ds = -\frac{(1+\nu)(2-2\nu)}{4E} K_I^2. \quad (28)$$

在平面应力情况下, J^* 积分为,

$$J^* = \frac{(1 + \nu)(4 - 3\nu)}{6} \cdot \frac{K_1^2}{E}. \quad (29)$$

$$\text{令: } \nu = 0.25 \text{ 时, } J^* = 0.677 \frac{K_1^2}{E}. \quad (30)$$

由于 J^* 与积分路径无关, 如图 3 所示有沿 s' 路径的 J^* 值也为 (30) 式的结果, 由于对称性, 沿半圆 (AB) J^* 积分值为,

$$J^* = 0.339 \frac{K_1^2}{E}. \quad (31)$$

2 确定所谓的材料力与应力强度因子关系

如图 4 所示, 梁中裂纹在弯矩和拉伸荷载作用下的模型, 由于对称性取其中一半研究, 这里约定“+”和“-”分别指示有裂纹和无裂纹部份的梁的量, 符号“~”表示中性轴位移的量. 取梁的周边 $s(ABCDE)$ 为外路径, 半圆 $s'(AE)$ 内路径, 则 J^* 积分值为,

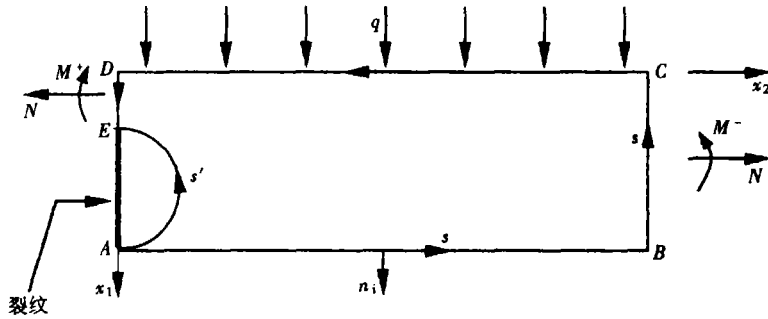


图 4 梁中裂纹在弯矩和拉伸荷载作用下的模型

$$\int_{s(AB)} (W_f \cdot n_1 - S_i u_{i,1}) ds = \int_{s(AB)} W_f \cdot 1 \cdot ds, \quad (a)$$

$$\int_{s(BC)} (W_f n_1 - S_i u_{i,1}) ds = -N \bar{u}_{2,2}^- - M^- \phi'^-, \quad (b)$$

$$\int_{s(CD)} (W_f n_1 - S_i u_{i,1}) ds = \int_{s(CD)} W_f \cdot (-1) ds + q(\bar{u}_1^+ - \bar{u}_1^-), \quad (c)$$

$$\int_{s(DE)} (W_f n_1 - S_i u_{i,1}) ds = -(-N \bar{u}_{2,2}^+ - M^+ \phi'^+). \quad (d)$$

(a) + (b) + (c) + (d), 且注意到, $\int_{s(AB)} W_f ds = \int_{s(CD)} W_f ds$, 则有,

$$J^* = \int_{s(ABCDE)} (W_f n_1 - S_i u_{i,1}) ds = -N \bar{u}_{2,2}^- - M^- \phi'^- - q \bar{u}_1^- - (-N \bar{u}_{2,2}^+ - M^+ \phi'^+ - q \bar{u}_1^+), \quad (32)$$

其中令

$$\begin{cases} [A^+] = -N \bar{u}_{2,2}^+ - M^+ \phi'^+ - q \bar{u}_1^+, \\ [A^-] = -N \bar{u}_{2,2}^- - M^- \phi'^- - q \bar{u}_1^-. \end{cases} \quad (33)$$

所以,

$$\int_{s(ABCDE)} (W_f n_1 - S_i u_{i,1}) ds = [A^-] - [A^+]. \quad (34)$$

沿内路径 $s'(AE)$ 的 J^* 值为

$$\int_{s(AE)} (W_{fn_1} - S_{iu_{i,1}}) ds = 0.339 \frac{K_I^2}{E}. \quad (35)$$

由于 J^* 值与路径无关,则有

$$0.339 \frac{K_I^2}{E} = [A^-] - [A^+]. \quad (36)$$

方程(36)提供了所谓的“材料力”与应力强度因子之间的准确关系式,应用方程(36)可以求解对称情况下有限宽板(梁)的 I 型应力强度因子.

3 应力强度因子的计算

3.1 梁边裂纹受弯矩作用

如图 5 所示,梁中边裂纹在弯矩作用下的情况,设厚度为 b , 根据(36)式有

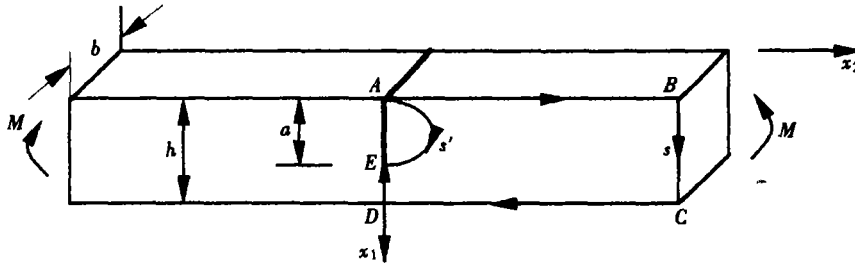


图 5 梁中边裂纹在弯矩作用下的情况

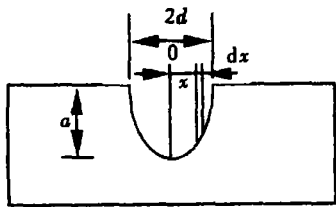


图 6 带椭圆切槽的梁

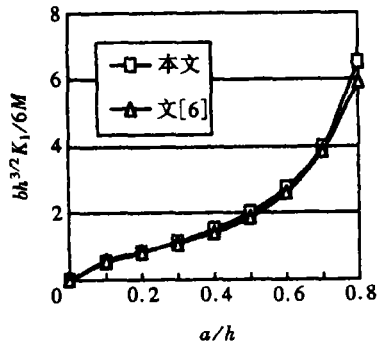


图 7 梁中边裂纹在弯矩作用下无量纲的应力强度因子随无量纲的裂纹长度的变化规律

$$0.339 \frac{K_I^2}{E} = [A^-] - [A^+] = \frac{1}{b} (\phi'^+ - \phi'^-) M. \quad (37)$$

且有

$$\phi'^- = \frac{M}{EI}, \quad I = \frac{bh^3}{12}. \quad (38)$$

而有裂纹中性轴上的 ϕ'^+ 可从文献[3]中得到如图 6 所示用椭圆边界的平均值的极限作为结果.

$$\begin{aligned} \phi'^+ &= \lim_{d \rightarrow 0} \frac{1}{2d} \int_{-d}^d \phi'(x) dx = \\ &= \lim_{d \rightarrow 0} \frac{1}{2d} \int_{-d}^d \frac{M}{EI(1 - ah^{-1} \sqrt{(1 - (x/d)^2})^3)} dx = \frac{M}{EI} \gamma_1 \left(\frac{a}{h} \right), \end{aligned} \quad (39)$$

且有
$$\gamma_1\left(\frac{a}{h}\right) = \int_0^1 \frac{dt}{(1 - ah^{-1}\sqrt{(1-t^2)})^3} \quad (40)$$

将方程(38)、(39)、(40)代入方程(37)有

$$K_I = \frac{6M}{h^{3/2}b} f\left(\frac{a}{h}\right), \quad (41)$$

且有

$$f\left(\frac{a}{h}\right) = 0.993\sqrt{\left[\gamma_1\left(\frac{a}{h}\right) - 1\right]}. \quad (42)$$

因为^[6]

$$K_I = F\sigma\sqrt{\pi a} = F\frac{6M}{bh^{3/2}}\sqrt{\pi\frac{a}{h}},$$

则有

$$\bar{f}\left(\frac{a}{h}\right) = F\sqrt{\pi\frac{a}{h}}. \quad (43)$$

由方程(42)和(43)分别得到不同 a/h 值分别对应于本文和[6]的 f(a/h) 结果,并列入表 1 和比较于图 7 中。

表 1 梁中边裂纹在弯矩作用下,无量纲的应力强度因子与文[6]结果的比较

f(a/h) \ a/h	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
本文	0.517	0.815	1.130	1.510	2.019	2.760	3.975	6.503
文[6]	0.585	0.835	1.090	1.408	1.873	2.622	3.868	5.913

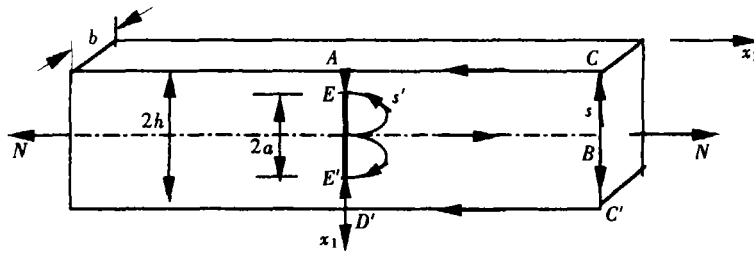


图 8 梁中裂纹在均匀拉力作用下的情况

3.2 梁中裂纹在均匀受拉伸作用

梁中心裂纹在轴向拉力作用下如图 8 所示,根据对称性取 1/4 部分计算,从方程(36)式有

$$0.339\frac{K_I^2}{E} = [A^-] - [A^+] = \frac{N}{2b}(\bar{u}_{2,2}^+ - \bar{u}_{2,2}^-), \quad (44)$$

且有

$$\bar{u}_{2,2}^- = \frac{N}{EA}, A = 2hb. \quad (45)$$

同理, $\bar{u}_{2,2}^+$ 的计算与(39)式的方法相同。

$$\bar{u}_{2,2}^+ = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{1}{2d} \int_{-d}^d \bar{u}_{2,2}^+(x) dx =$$

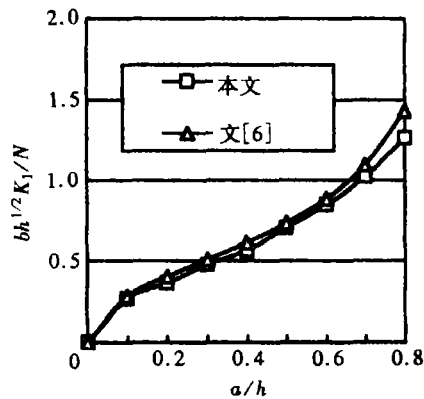


图 9 在均匀拉力作用下无量纲的应力强度因子随无量纲的裂纹长度变化的规律

$$\lim_{d \rightarrow 0} \frac{1}{2d} \int_{-d}^d \frac{N dx}{EA(1 - ah^{-1} \sqrt{(1 - (x/d)^2})} = \frac{N}{EA} \gamma_2 \left(\frac{a}{h} \right). \quad (46)$$

且有

$$\gamma_2 \left(\frac{a}{h} \right) = \int_0^1 \frac{1}{(1 - ah^{-1} \sqrt{(1 - t^2)})} dt. \quad (47)$$

将方程(45)、(46)、(47)代入方程(44)有

$$K_I = \frac{N}{b\sqrt{h}} f \left(\frac{a}{h} \right), \quad (48)$$

同理有

$$f \left(\frac{a}{h} \right) = 0.859 \sqrt{[\gamma_2 \left(\frac{a}{h} \right) - 1]}. \quad (49)$$

$$\bar{f} \left(\frac{a}{h} \right) = \frac{1}{2} F \sqrt{\pi \frac{a}{h}}. \quad (50)$$

由方程(49)和(50)得到不同 (a/h) 值分别对应于本文和文[6] $f(a/h)$ 的结果,并列入表 2 和比较于图 9 中.

表 2 梁中裂纹在均匀拉力作用下无量纲的应力强度因子与文[6]结果的比较

$f(a/h)$	a/h	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
本文		0.268	0.365	0.478	0.568	0.707	0.847	1.023	1.267
文[6]		0.282	0.404	0.510	0.616	0.736	0.887	1.096	1.433

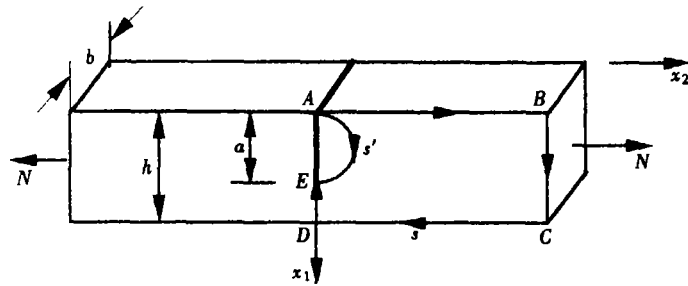


图 10 梁边裂纹受轴向拉力作用下的情况

3.3 梁中裂纹受轴向拉伸作用

如图 10 所示梁中心裂纹在轴向拉力作用下,且边裂纹受偏心拉伸作用,从方程(36)式有

$$0.339 \frac{K_I^2}{E} = [A^-] - [A^+] = -N\bar{u}_{2,2}^- - (-N\bar{u}_{2,2}^+ - M^+ \phi'^+), \quad (51)$$

或

$$0.339 \frac{K_I^2}{E} = \frac{N}{b} (\bar{u}_{2,2}^+ - \bar{u}_{2,2}^- + \frac{a}{2} \phi'^+), \quad (52)$$

同理可以导出

$$K_I = \frac{N}{b\sqrt{h}} f \left(\frac{a}{h} \right), \quad (53)$$

式中的 $f \left(\frac{a}{h} \right)$ 为,

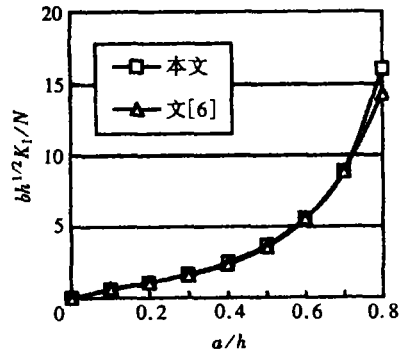


图 11 梁边裂纹受轴向拉力作用,其无量纲的应力强度因子随无量纲的裂纹长度的变化规律

$$f\left(\frac{a}{h}\right) = \left\{ 2.751 \left[\gamma_2\left(\frac{a}{h}\right) + 3\left(\frac{a}{h}\right)^2 \gamma_1\left(\frac{a}{h}\right) - 1 \right] \right\}^{1/2}, \quad (54)$$

$$\text{并且 } \bar{f}\left(\frac{a}{h}\right) = F \sqrt{\pi \frac{a}{h}}. \quad (55)$$

由方程(54)和(55)得到不同 (a/h) 值分别对应于本文和文[6]的 $f(a/h)$ 的结果并列入表3中,比较如图11所示.

表3 梁中裂纹受轴向拉力作用下无量纲的应力强度因子与文[6]结果的比较

a/h	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$f(a/h)$								
本文	0.595	1.061	1.659	2.468	3.658	5.580	8.856	16.044
文[6]	0.662	1.085	1.611	2.354	3.542	5.527	8.860	14.291

4 J^* 积分的偏斜应变能释放率的解释

根据 J 积分的形变功定义,

$$J = - \left(\frac{\partial \Pi}{\partial a} \right), \quad (56)$$

式中: Π 为物体的势能, a 为裂纹的长度.

即,

$$J = \int_{\Gamma} \left(W dy - T_i \frac{\partial u}{\partial x} ds \right) = \int_{\Gamma} \left(W_f dy - S_i \frac{\partial u}{\partial x} ds \right) + \int_{\Gamma} \left(W_V dy - \sigma_m \delta_{ij} \frac{\partial u}{\partial x} ds \right), \quad (57)$$

又物体的势能为:

$$\Pi = U - \oint_c T_i u_i ds = U_f - \oint_c S_i u_i ds + U_V - \oint_c \sigma_m \delta_{ij} u_i ds. \quad (58)$$

将(57)、(58)式代入(56)式比较等式两端得:

$$\begin{cases} J^* = \oint_{\Gamma} \left(W_f dy - S_i \frac{\partial u}{\partial x} ds \right) = - \frac{\partial}{\partial a} \left[U_f - \oint_c S_i u_i ds \right] = - \frac{\partial \Pi^*}{\partial a} \\ J_V = \int_{\Gamma} \left(W_V dy - \sigma_m \delta_{ij} \frac{\partial u}{\partial x} ds \right) = - \frac{\partial}{\partial a} \left[U_V - \oint_c \sigma_m \delta_{ij} u_i ds \right] = - \frac{\partial \Pi_V}{\partial a}. \end{cases} \quad (59)$$

在线弹性范围内,即

$$J^* = G_I^* = - \left(\frac{\partial \Pi^*}{\partial a} \right). \quad (60)$$

现证明(60)式成立证明过程如下。(且注意, Π^* 为物体的偏斜势能).

对弹性(线性或非线性)二维物体,其单位厚度的总偏斜势能为:

$$\Pi^* = U_f - \oint_c S_i u_i ds = \iint_D W_f dx_1 dx_2 - \oint_c S_i u_i ds, \quad (61)$$

U_f 为单位厚度偏斜应变能, W_f 应变能密度. D 为物体的表面积.

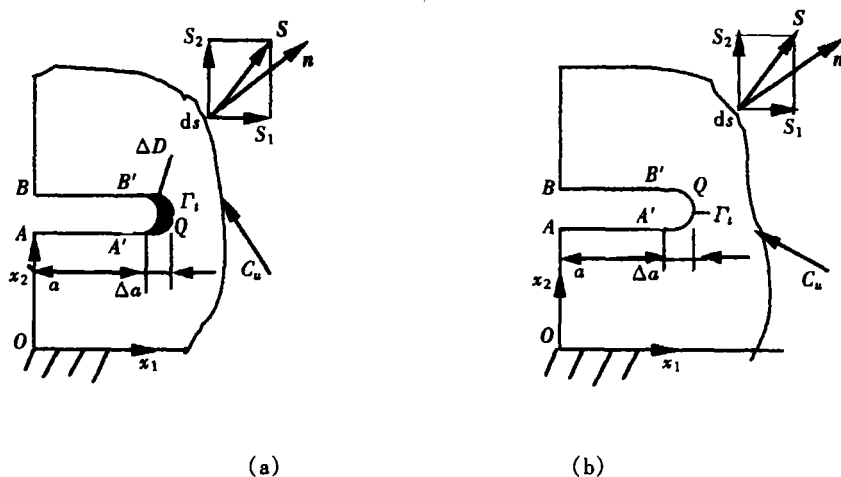


图 12

比较图示 12(a)、(b) 的两个二维弹性体, 它们的差别只是裂纹长度相差 Δa 。先研究带圆弧切口的二维弹性体, 当切口圆弧半径趋于零时, 就变成二维裂纹体了。图 12(b) 的物体比图 12(a) 的物体少了一块长度为 Δa 的阴影面积 ΔD , 相应的切口顶端边界 $A'QB'$ 记为 Γ_i , 于是

$$\begin{aligned} \Delta U_f &= U_{fb} - U_{fa} = \iint_D [W_f(e_{ij} + \Delta e_{ij})] dx_1 dx_2 - \iint_{D+\Delta D} W_f(e_{ij}) dx_1 dx_2 = \\ &= \iint_D [W_f(e_{ij} + \Delta e_{ij}) - W_f(e_{ij})] dx_1 dx_2 - \iint_{\Delta D} W_f(e_{ij}) dx_1 dx_2, \end{aligned} \quad (62)$$

Δe_{ij} 为图 12(b) 的物体中相应与图 12(a) 的物体中同一点处的偏应变分量的增量, 等式(62)右端第一项表示偏应力, 应变不同引起的变化, 第二项为面积减少引起的变化。因为, $\Delta D = \Delta x_2 \cdot \Delta a$, 又 Δa 很小, 认为在 ΔD 中 W_f 沿 x_1 方向无变化, 从而(62)式右端第二项为:

$$\iint_{\Delta D} [W_f(e_{ij})] dx_1 dx_2 = \Delta a \int_0^{\Delta x_2} W_f(e_{ij}) dx_2 = \Delta a \int_{\Gamma_i} W_f(e_{ij}) dx_2. \quad (63)$$

为证明(60)式, 取

$$\frac{\partial U_f}{\partial a} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta U_f}{\Delta a}. \quad (64)$$

将(63)式代入(62), 再代入(64)式得:

$$\frac{\partial U_f}{\partial a} = \iint_D \frac{\partial W_f}{\partial a} dx_1 dx_2 - \int_{\Gamma_i} W_f dx_2. \quad (65)$$

上式右端第二项积分, 因为在 Γ_i 上, $S_i = 0$, 故写为,

$$- \int_{\Gamma_i} W_f dx_2 = - \int_{\Gamma_i} \left(W_f dx_2 - S_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} dS \right) = - J^*. \quad (66)$$

应用(15)式和式(7b)及 $S_i = S_{ij} n_j$, 且 da 沿 dx_1 方向, 故有:

$$\iint_D \frac{\partial W_f}{\partial a} dx_1 dx_2 = \iint_D \frac{\partial}{\partial x_j} (S_{ij} u_{i,a}) dx_1 dx_2 = \oint_c (S_{ij} u_{i,a}) n_j ds = \oint_c S_i \frac{\partial u_i}{\partial a} ds. \quad (67)$$

将(67)、(66)两式代入(65)式得:

$$\frac{\partial U_f}{\partial a} = - J^* + \oint_c S_i \frac{\partial u_i}{\partial a} ds$$

或

$$J^* = - \frac{\partial U_f}{\partial a} + \oint_c S_i \frac{\partial u_i}{\partial a} ds =$$

$$-\frac{\partial}{\partial a}(U_f - \oint_c S_i u_i dS) = -\frac{\partial \Pi^*}{\partial a} = G_1^*, \quad (68)$$

G^* 为偏斜应变能释放率。(60)式得证。

式(60)理解为在具有相同几何外形,相同外载和边界约束下,具有相近裂纹长度 a 及 $a + \Delta a$ 的两个试样单位厚度的偏斜应变位能差率。即 J^* 积分在线弹性情况下解释为偏斜应变能释放率。

5 结 语

本文提出偏斜应变能的 J^* 积分概念,揭示了塑性材料中的裂纹扩展的真实原因是由于偏斜应变能释放率的驱动,用 J^* 积分换算得出的 K_I 与文[6]的结果吻合得较好。并与文[3]结果十分接近。同时本文给出了 J^* 积分在线弹性情况下的偏斜应变能释放率的定义。

[参 考 文 献]

- [1] Rice J R. A path independent integral and approximate analysis of strain concentration by notches and crack[J]. *Appl Mech*, 1968, 35: 379—386.
- [2] Kanninen M F, Popelar C H. 高等断裂力学[M]. 洪其麟, 郑光华, 郑祺选等译. 北京: 北京航空学院出版社, 1987, 116—122.
- [3] XIE Yun-jun, XU Hong, LI Pei-ning. Crack mouth widening energy release rate and its application[J]. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 1998, 29: 195—203.
- [4] 吴祥法, 范天佑, 刘长河. 有限变形弹性体 J 积分守恒及其对偶形式[J]. *应用数学和力学*, 1999, 20(3): 301—304.
- [5] 高庆主编. 工程断裂力学[M]. 重庆: 重庆大学出版社, 1986.
- [6] Tada H, Paris P C, Irwin G R. *The Stress Analysis of Crack Handbook*[M]. Hellestown, Pennsylvania: Del Research, 1973.

J^* Integral of the Specific Deviator Strain Energy and Its Application

JIANG Yu-chuan, WANG Qi-zhi

(1. Department of Civil Engineering and Applied Mechanics,
Sichuan University, Chengdu 610065, P. R. China)

Abstract: First the deviator strain energy is introduced, then the problem of plane-crack critical growth was discussed, a path independent line integral J^* was defined, furthermore its conservation was proved strictly. As application examples, mode-I stress intensity factors of cracked beam were obtained with present approach. The results were shown to agree well with those available in the open literature.

Key words: deviator strain energy; J^* integral conservation; stress intensity factor