应用数学和力学,第 21 卷 第 8 期(2000 年 8 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2000) 08_0870_05

关于非常圆的 Banach 空间*

张子厚[1], 张从军[2]

(1. 淮南联合大学 基础部, 安徽 淮南 232001; 2. 淮北煤炭师范学院 数学系, 安徽 淮北 235000)

(协平推荐)

摘要: 证明了非常圆空间的 3 个特征• 讨论了非常圆空间和 Banach 空间几何性质之间的关系• 建立了弱暴露点和 Radon_Nikodym 性质之间的联系•

关 键 词: 非常圆空间; 弱暴露点
中图分类号: O177. 2 文献标识码: A

引 言

在[1]中, F. Sullivan 定义了非常圆空间, 它是非常光滑空间的对偶概念• 在[2]中, 弱暴露点被引入, 它是强暴露点的推广• 已知强暴露点和 Radon_Nikodym 性质有紧密的联系• 如: 一个 Banach 空间 X 有 Radon_Nikodym 性质当且仅当 X 的每个非空、有界和闭凸子集是它强暴露点的闭凸包• 本文中, 我们证明了非常圆空间的三个特征和一些性质, 我们也证明了若 X 是具有 Bishop_Phelps 性质的非常圆空间, 则 X 的每个闭的、有界和绝对凸子集是它弱暴露点的闭凸包• 因为 Bishop_Phelps 性质和 Radon_Nikodym 性质等价, 我们建立了弱暴露点和 Radon_Nikodym 性质之间的联系•

1 记号和定义

设 X 是 Banach 空间, X^* 是 X 的共轭空间, X^{**} 是 X^* 的共轭空间• 令

$$U(X) = \left\{x \in X: \|x\| \leqslant 1\right\}, S(X) = \left\{x \in X: \|x\| = 1\right\},$$
$$S(X^*) = \left\{x^* \in X^*: \|x^*\| = 1\right\}, S(X^{**}) = \left\{x^{**} \in X^{**}: \|x^{**}\| = 1\right\},$$
$$A_x = \left\{f \in X^*: f(x) = 1\right\},$$

其中 $x \in S(X)$• ^表示自然嵌入元素•

定义 1[1] X 被称为是非常圆的, 如果 $x^* \in S(X^*)$ 在 $S(X)$ 和 $S(X^{**})$ 上同时达到范数, 即存在 $x \in S(X)$, $x^{**} \in S(X^{**})$ 使 $x^{**}(x^*) = x^*(x) = 1$, 则 $\hat{x} = x^{**}$•

定义 2[3] X 被称为弱局部一致圆(WLUR), 如果对任意 $\varepsilon > 0$, $x \in S(X)$ 和 $f \in S(X^*)$, 存在 $\delta = \delta(\varepsilon, x, f) > 0$ 使得对任意 $y \in S(X)$, $\|(x + y)/2\| > 1 - \delta$, 则 $|f(x - y)| < \varepsilon$•

* 收稿日期: 1998_12_25; 修订日期: 2000_03_20
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19871048)
作者简介: 张子厚(1956—), 男, 安徽寿县人, 教授, 已发表论文 27 篇, 主研方向: Banach 空间理论、逼近论等.

定义 3[3]　X 被称为弱中点局部一致圆(WMLUR), 如果对任意 $\varepsilon > 0$, $x \in S(X)$ 和 $f \in S(X^*)$, 存在 $\delta = \delta(\varepsilon, x, f) > 0$ 使得若 $x_1, x_2 \in S(X)$ 且 $\|x - (x_1 + x_2)/2\| < \delta$, 则

$$|f(x_1 - x_2)| < \varepsilon.$$

定义 4[4]　如果任取 $x \in S(X)$, $x_n \in U(X)$, $f \in A_x$, $\|x_n + x\| \to 2$, 存在 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_k}\}$ 使得 $f(x_{n_k}) \to 1$, 则称 X 有 WM 性质.

定义 5[2]　设 D 是 X 中的有界子集, $x_0 \in D$ 被称为 D 的暴露点, 如果存在 $f \in S(X^*)$ 使得 $f(x_0) > f(x)$, $x \in D/\{x_0\}$. 进一步, 如果对任意序列 $\{x_n\} \subset D$, $f(x_n) \to f(x_0)$ 蕴含 $x_n \xrightarrow{w} x_0$, 则称 x_0 为 D 的弱暴露点, 称 f 为在 x_0 点暴露 D 的弱暴露泛函.

定义 6　X 被称为有 Bishop_Phelps 性质, 如果对任何 Banach 空间 Y, X 中任何闭的、有界和绝对凸子集 A 及线性连续算子 $T: X \to Y$, 存在线性连续算子序列 $T_n: X \to Y$, 使得 $\|T - T_n\| \to 0$ 且 T_n 在 A 上达到范数.

2　主要结果及其证明

定理 1　X 是非常圆当且仅当对任意 $x \in S(X)$, 如果 $x_n \in S(X)$, 且对某个 $f \in A_x$, $f(x_n) \to 1$, 则 $x_n \xrightarrow{w} x$.

证明　设 $x^* \in S(X^*)$, 如果存在 $x_0 \in S(X)$, $x_0^{**} \in S(X^{**})$, 使得 $x_0^{**}(x^*) = x^*(x_0) = 1$. 若 $\hat{x}_0 \neq x_0^{**}$, 存在 $\alpha > 0$, $y_0^* \in S(X^*)$, 使得 $(x_0^{**} - \hat{x}_0)(y_0^*) \geqslant \alpha > 0$. 令 $A = \operatorname{span}\{x_0^{**}, \hat{x}_0\} \subset X^{**}$, $F = \operatorname{span}\{x^*, y_0^*\} \subset X^*$. 由局部自反原理, 存在线性算子序列 $\{T_n\}$, $T_n: A \to X$, 使得

①$T_n(\hat{x}_0) = x_0$; ②$y^*(T_n(a)) = a(y^*)$, $\quad a \in A, y^* \in F$;

③$1 - 1/n \leqslant \|T_n x_0^{**}\| \leqslant 1 + 1/n$, $\quad n = 1, 2, \cdots$

因此我们有

$$y_0^*(T_n x_0^{**} - x_0) = y_0^*(T_n(x_0^{**} - \hat{x}_0)) = (x_0^{**} - \hat{x}_0)(y_0^*) \geqslant \alpha > 0 \tag{A}$$

设 $x_n = T_n x_0^{**}/\|T_n x_0^{**}\|$. 因为 $\|T_n x_0^{**}\| \to 1$, 故

$$x^*(x_n) = \frac{1}{\|T_n x_0^{**}\|} x^*(T_n x_0^{**}) = \frac{1}{\|T_n x_0^{**}\|} x_0^{**}(x^*) = \frac{1}{\|T_n x_n^{**}\|} \to 1.$$

显然, $x^* \in A_{x_0}$, $x_n \in S(X)$. 因此 $x_n \xrightarrow{w} x_0$. 但另一方面, 由(A)式我们有 $y_0^*(T_n x_0^{**} - x_0) \geqslant \alpha > 0$, 对所有 n. 这就表明 $y_0^*(\|T_n x_0^{**}\| x_n - x_0) \geqslant \alpha > 0$. 因为 $\|T_n x_0^{**}\| \to 1$. 当 n 充分大时, 我们有 $y_0^*(x_n - x_0) > \alpha/2$. 这同 $x_n \xrightarrow{w} x_0$ 矛盾. 从而 $\hat{x}_0 = x_0^{**}$.

反之, 设 $x \in S(X)$, $\{x_n\} \subset S(X)$, $x^* \in A_x$ 且 $x^*(x_n) \to 1$. 记 $\{x_n\}$ 在 X^{**} 中的弱* 聚点集合为 C. 任取 $x_0^{**} \in C/\{x_n\}$, 则存在网 $\{x_\alpha\} \subset \{x_n\}$ 使得 $\hat{x}_\alpha \xrightarrow{w^*} x_0^{**}$. 因为 $x^*(x_n) \to 1$, 我们有 $x_0^{**}(x^*) = 1$. 因为 X 是非常圆空间, 故 $x_0^{**} = \hat{x}_0$. 因此 $C \subset X$. 进而 $\{x_n\}$ 是相对弱紧集. 设 $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$, $x_{n_k} \xrightarrow{w} y$. 因为 $x^*(x_{n_k}) \to 1$, 我们有 $x^*(y) = 1$, 故 $\|x + y\| = 2$. 因为非常圆蕴含严格凸, 故 $x = y$. 这表明 $x_n \xrightarrow{w} x$.

定理 2　X 是非常圆当且仅当对任意 $x \in S(X)$, $f \in A_x$, $g \in S(X^*)$ 和 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta >$

0 使得对任何 $y\in S(X)$ 且 $|(f(x)+f(y))/2|>1-\delta$, 则 $|g(x-y)|<\varepsilon$•

证明 如果存在 $x_0\in S(X), f\in A_{x_0}$, $\varepsilon_0>0$ 和 $g\in S(X^*)$, 对任意 $\delta_n=1/n$, 存在 $y_n\in S(X)$ 使得 $|(f(x_0)+f(y_n))/2|>1-1/n$ 且 $|g(x_0-y_n)|\geqslant\varepsilon_0$, 则 $f(y_n)\to 1$• 因为 X 是非常圆的, 由定理 1 我们有 $y_n\xrightarrow{w}x_0$, 所以 $g(y_n-x_0)\to 0$, 这同 $|g(x_0-y_n)|\geqslant\varepsilon$ 矛盾•

反之, 设 $x\in S(X)$, $x_n\in S(X), f\in A_x$ 且 $f(x_n)\to 1$• 如果对任意 $x\in S(X), f\in A_x$, $g\in S(X^*)$ 和 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使对任意 $y\in S(X)$ 且 $|(f(x_0)+f(y))/2|>1-\delta$ 蕴含 $|g(x-y)|<\varepsilon$• 由于 $f(x_n)\to 1$, 对任意 $\delta>0$, 存在 N, 使得当 $n\geqslant N$ 时, 我们有 $|f(x_n)-1|<2\delta$, 所以 $|(f(x)+f(x_n))/2|>1-\delta$, 因此 $|g(x_n-x)|<\varepsilon$• 这表明 $x_n\xrightarrow{w}x$, 由定理 1 知 X 是非常圆空间•

定理 3 X 是非常圆当且仅当对任意 $x\in S(X)$, A_x 中所有元素皆为相应于 x 的弱暴露泛函•

证明 对任意 $x\in S(X), f\in A_x$, 因为非常圆蕴含严格凸, 我们有 $f(x)>f(y)$, $y\in U(X)\setminus\{x\}$• 如果 $x_n\in U(X), f(x_n)\to 1$, 则 $\|x_n\|\to 1$• 设 $y_n=x_n/\|x_n\|$, 则 $f(y_n)\to 1$, 因为 X 是非常圆, 由定理 1 知 $y_n\xrightarrow{w}x$, 所以 $x_n\xrightarrow{w}x$• 因此 f 是相应于 x 的弱暴露泛函•

反之, 如果对任意 $x\in S(X)$, $x_n\in S(X)$, 且对某个 $f\in A_x, f(x_n)\to 1$• 由假定 f 是相应于 x 的弱暴露泛函且 $f(x_n)\to f(x)$, 我们有 $x_n\xrightarrow{w}x$• 由定理 1 知 X 是非常圆空间•

定理 4 如果 X 是非常圆, 则 X 是 WMLUR 空间•

证明 如果 X 是非常圆, 则对任意 $\varepsilon>0$, $x\in S(X), f\in A_x$ 且 $g\in S(X^*)$, 存在 $\delta>0$ 使得对任何 $y\in S(X)$ 有 $|f((x+y)/2)|>1-\delta$ 蕴含 $|g(x-y)|<\varepsilon/2$• 设 $x, x_1, x_2\in S(X)$ 且 $\|x-(x_1+x_2)/2\|<\delta$, 则 $f(x_1)\geqslant 2-2\delta-f(x_2)\geqslant 1-2\delta$ 和 $f(x_2)\geqslant 1-2\delta$, 故有 $f((x+x_1)/2)>1-\delta$ 且 $f((x+x_2)/2)>1-\delta$, 因此 $|g(x_1-x_2)|\leqslant|g(x-x_1)|+|g(x-x_2)|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$• 这表明 X 是 WMLUR 空间•

定理 5 X 是 WLUR 空间当且仅当 X 是非常圆且有 WM 性质•

证明 设 $x\in S(X)$, $x_n\in U(X)$ 且 $\|x_n+x\|\to 2$, 则存在 $f\in S(X^*)$ 使得 $f(x)=1$, 因为 X 有 WM 性质, 则存在一个子序列 $\{x_{n_i}\}\subset\{x_n\}$ 使得 $f(x_{n_i})\to 1$, 由于 X 是非常圆的, 我们有 $x_{n_i}\xrightarrow{w}x$ 且 X 是严格凸的, 因此 x 是 $\{x_n\}$ 的唯一弱序列聚点, 故 $x_n\xrightarrow{w}x$• 这表明 X 是 WLUR 空间•

反之, 由文[1] 定理 7 知 WLUR 空间蕴含非常圆• 显然, WLUR 蕴含 WM 性质•

Panda 和 Kapoor 在文[4] 中引入了(S) 性质• Banach 空间 X 被称为有(S) 性质, 如果任取 $\{f_n\}\subset U(X^*)$, $x\in S(X)$ 且 $f_n(x)\to 1$ 蕴含 $\{f_n\}$ 是相对紧集•

定理 6 如果 X 是非常圆且有(S) 性质, 则 X 是 WLUR 空间•

证明 设 $x\in S(X)$, $\{x_n\}\subset U(X)$ 且 $\|x+x_n\|\to 2$• 取 $f_n\in S(X^*)$ 使得 $f_n(x+x_n)=\|x+x_n\|$, $n=1,2,\cdots$, 因为 $|f_n(x)|\leqslant 1$, $|f_n(x_n)|\leqslant 1$ 且 $f_n(x)+f_n(x_n)\to 2$, $n=1,2,\cdots$, 则 $f_n(x)\to 1, f_n(x_n)\to 1$• 由于 X 有(S) 性质且 $f_n(x)\to 1$, 则 $\{f_n\}$ 是相对紧的• 设 $\{f_{n_k}\}\subset\{f_n\}$, $f_{n_k}\to f$, 则 $\|f\|=1$ 且 $f(x)=1$• 因为

$$|f(x_{n_k})-f_{n_k}(x_{n_k})|\leqslant\|f-f_{n_k}\|\cdot\|x_{n_k}\|\leqslant\|f-f_{n_k}\|\to 0,$$

我们有$f(x_{n_k})\to 1$• 因为 X 是非常圆的,由定理 1 知 $x_{n_k}\xrightarrow{w}x$• 因为 X 是严格凸,故 $x_n\xrightarrow{w}x$•这表明 X 是 WLUR 空间•

设$\{X_i\}$是 Banach 空间序列,$1<p<\infty$,这些空间的 l_p 直和被定义如下:

$$l^p(X_i)=\left\{x=(x_i):x_i\in X_i,\ i=1,2,\ \cdots,\ 且\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i\|^p<\infty\right\},$$

规定 $\|x\|_p=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i\|^p\right)^{1/p}$,则 $l^p(X_i)$ 是一个 Banach 空间•

类似文[2]定理 4 的方法,由定理 1,我们可证明定理 7•

定理 7　设$\{X_i\}$是 Banach 序列空间,$1<p<\infty$,则 $l^p(X_i)$ 是非常圆当且仅当每个 X_i 是非常圆•

定理 8　如果 X 是具有 Bishop_Phelps 性质的非常圆空间,则 X 的每个闭的、有界和绝对凸的子集是它弱暴露点的闭凸包•

证明　设 A 是 X 的闭的,有界和绝对凸子集• 假定 $\sup\{\|x\|:x\in A\}=1$• C 为 A 的弱暴露点的闭凸包• 如果 $A\neq C$• 由分离性定理,存在 $f\in X^*$, $0<\delta<1$ 且 $\sup\{f(x):x\in A\}=1$ 使得对每个 $x\in C$, $|f(x)|<1-\delta$•

令 $Y=(X\oplus R)_{l_2}$,因为 X 和 R 是非常圆,由定理 7 知 Y 也是非常圆的• 定义 $\mathrm{T}:X\to Y$ 如下:

$$\mathrm{T}(x)=(x,Mf(x)),\qquad 这里\ \delta M>2•$$

显然 T 是 $X\to Y$ 的同构• 从而

$$\sup\{\|T(x)\|:x\in A\}\geqslant M•$$

对 $x\in C$,我们有

$$\|T(x)\|^2=\|x\|^2+M^2|f(x)|^2\leqslant 1+M^2(1-\delta)^2=$$
$$1+(M-M\delta)^2\leqslant 1+(M-2)^2,$$

这蕴含

$$\|T(x)\|\leqslant(1+(M-2)^2)^{1/2}\leqslant M-1•$$

因此,若 S 是 $X\to Y$ 的线性算子且 $\|\mathrm{S}-\mathrm{T}\|$ 充分小,则由文[5]知,S 既是 $X\to Y$ 的同构映射,又不能在 C 上达到范数• 因为 X 有 Bishop_Phelps 性质,可假定 S 在某个 $x\in A$ 达到最大范数• 设 $g\in \mathrm{S}(Y^*)$,且 $g(\mathrm{S}(x))=\max\{\|\mathrm{S}(y)\|:y\in A\}=\|\mathrm{S}(x)\|$,则 x 是 A 的一个暴露点,其暴露泛函为 $g\circ \mathrm{S}$• 进一步,如果$\{x_n\}\subset A$,且

$$g(\mathrm{S}(x_n))\to g(\mathrm{S}(x))=\|\mathrm{S}(x)\|,$$

则

$$g\left(\frac{\mathrm{S}(x_n)}{\|\mathrm{S}(x)\|}\right)\to 1•$$

由于 Y 是非常圆空间,我们有 $\mathrm{S}(x_n)\xrightarrow{w}\mathrm{S}(x)$• 由于 S 为同构映射,故 $x_n\xrightarrow{w}x$• 因此 x 是 A 的一个弱暴露点• 但 $x\notin C$,这同 C 的规定矛盾,从而 $A=C$•

最后,我们定义弱局部一致光滑空间(WLUS)并指出 WLUS 是 WLUR 的对偶概念•

定义 7　X 被称为是 MLUS 空间,如果对任意 $\varepsilon>0$, $x\in S(X)$, $f\in A_x$ 和 $F\in S(X^{**})$,存在 $\delta=\delta(\varepsilon,x,f,F)>0$ 使得对任意 $g\in S(X^*)$, $\|(f+g)/2\|>1-\delta$,则 $|F(f-g)|<\varepsilon$•

不难证明下面定理正确•

定理 9

(1) 如果 X^* 是 WLUR, 则 X 是 WLUS•

(2) 如果 X^* 是 WLUS, 则 X 是 WLUR•

定理 10 如果 X 是 WLUS, 则 X 是非常光滑的•

证明 如果 X 不是非常光滑, 则存在 $x \in S(X), f_n \in S(X^*), f_n(x) \to 1, f \in A_x, f_n \overset{w}{\not\to} f$• 故我们有 $\varepsilon_0 > 0$, $F_0 \in S(X^{**})$ 和一个 $\{f_n\}$ 的子列 $\{f_{n_i}\}$ 使得 $|F_0(f_{n_i} - f)| \geqslant \varepsilon_0$• 因为 X 是 WLUS, 对上面 $\varepsilon_0 > 0$, $x \in S(X), f \in A_x$ 和 $F_0 \in S(X^{**})$, 存在 $\delta > 0$ 使得 $g \in S(X^*)$, $\|(f + g)/2\| > 1 - \delta$ 蕴含 $|F_0(f - g)| < \varepsilon_0$• 由于 $f_n(x) \to 1$, 我们有 N 使得当 $n > N$ 时, $\|(f_n + f)/2\| \geqslant |(f_n(x) + f(x))/2| > 1 - \delta$• 所以 $|F_0(f_n - g)| < \varepsilon$• 这同 $|F_0(f_{n_i} - f)| \geqslant \varepsilon_0$ 矛盾• 因此 X 是非常光滑的•

[参 考 文 献]

[1] Sullivan F. Geometrical properties determined by the higher duals of a Banach space[J]. Illinois J Math, 1977, **21**(2): 315—331.

[2] NAN Chao_xun. On weakly exposed points[J]. Northeastern Math J, 1990, **6**(4): 449—454.

[3] Istratescu V I. Strict Convexity and Complex Strict Convexity [M]. New York and Basel: Marcel Dekker Inc, 1984.

[4] Panda B B, Kapoor O P. A generalization of local uniform convexity of the norm[J]. J Math Anal Appl, 1975, **52**(3): 300—308.

[5] Holmes R R. Geometric Functions Analysis and Its Applications [M]. New York: Springer_Verlag, 1975.

On Very Rotund Banach Space

ZHANG Zi_hou[1], ZHANG Cong_jun[2]

(1. Department of Basic Science, Huainan United University, Huainan, Anhui 232001, P R China;

2. Department of Mathematics, Huaibei Coal Mining Teacher's College, Huaibei, Anhui 235000, P R China)

Abstract: Three characteristics of the very rotund space are proved and the relationships between the very rotund space and the geometrical properties of Banach space are discussed. Also connection between the weakly exposed points and Radon Nikodym_property is established.

Key words: very rotund space; weakly exposed point