 应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2000) 08_0875_06

Duffing 型方程组的边界值问题的解的存在性*

黄文华[1], 沈祖和[2]

(1. 无锡轻工业大学 数理学科部, 无锡 214036; 2. 南京大学 数学系, 南京 210008)

(刘曾荣推荐)

摘要: 给出了带 Dirichlet 边界条件、Neumann 边界条件和周期边界条件的 Duffing 型方程组的两点边界值问题的解的几个存在性定理•

关 键 词: Hilbert 空间; 微分方程组; 两点边界值问题; 解
中图分类号: O175.8 文献标识码: A

引 言

在[1]中,沈祖和在一组相当广泛的条件下研究了下列常微分方程组(1)唯一的 2π_周期解的存在性,获得了一个存在和唯一性定理•

$$u''(t)+\nabla G(u(t))=p(t), \tag{1}$$

这里 $G: R^n \to R$ 有连续的二阶偏导数, $p: R \to R^n$ 是连续的、2π_周期的•

在[2]中,在一组类似于[1]中沈祖和的定理的条件下,吴广荣等研究了下列常微分方程组(2)唯一的 2π_周期解的存在性,获得了一个相应结果•

$$u''(t)+\boldsymbol{A}u'(t)+\nabla G(u)=f(t), \tag{2}$$

这里 $G: R^n \to R$ 有连续的二阶偏导数, $\boldsymbol{A}$ 是常对称矩阵, $f: R \to R^n$ 是以 2π 为周期的连续函数•

本文研究下列常微分方程组两点边界值问题的解的存在性:

$$\begin{cases} u''(t)+\nabla G(u(t))=f(t), \\ u'(0)=u'(\pi)=0; \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} u''(t)+\boldsymbol{A}u'(t)+\nabla G(u(t))=f(t), \\ u(0)=u(\pi)=0; \end{cases} \tag{4}$$

和

$$\begin{cases} u''(t)+\boldsymbol{A}u'(t)+\nabla G(u(t))=f(t), \\ u(0)=u(2\pi),\ u'(0)=u'(2\pi); \end{cases} \tag{5}$$

这里 G、$\boldsymbol{A}$ 和 f 如(2)中所述•

我们叙述一个在我们的工作中要用到的定理,这个定理的证明见[3, p.822, 定理 2.1]•

---

* 收稿日期: 1999_03_05; 修订日期: 2000_03_19
作者简介: 黄文华(1947—),男,副教授.

定理 1 设 H 是实 Hilbert 空间, X 和 Y 是 H 的两个闭子空间且 $H = X \oplus Y$, $T: H \to H$ 是 C^1 映照. 假定存在两个连续函数

$$\alpha: [0, +\infty) \to (0, +\infty), \quad \beta: [0, +\infty) \to (0, +\infty)$$

使得对 $\forall u \in H$, $\forall x \in X$, $\forall y \in Y$,

$$\int_0^{+\infty} \min\left\{\alpha(s), \beta(s)\right\} \mathrm{d}s = +\infty,$$

$$\langle T'(u)x, x\rangle \leqslant -\alpha(\| u \|) \| x \|^2,$$

$$\langle T'(u)y, y\rangle \geqslant \beta(\| u \|) \| y \|^2,$$

且

$$\langle T'(u)x, y\rangle = \langle x, T'(u)y\rangle,$$

那么, T 是一个从 H 到 H 上的微分同胚.

1 关于两点边界值问题的几个结果

现在, 我们研究问题(3)、(4) 和(5) 的解的存在性. 先考虑问题(3).

设 $G: R^n \to R$ 属于 C^2, $f: R \to R^n$ 是一连续函数, $\boldsymbol{A}$ 是一个常对称矩阵. 分别记 $(\cdot, \cdot)$ 和 $|\cdot|$ 为欧几里德内积和 R^n 中的范数.

设 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 是满足下列条件的向量:

对 $u \in R^n$

$$\mathrm{D}^2G(u)\boldsymbol{e}_i = \gamma_i(u)\boldsymbol{e}_i, (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n),$$

这里 $\mathrm{D}^2G(u)$ 记 G 在 $u \in R^n$ 的 Hessian 矩阵, $\gamma_i(u)(i = 1, 2, \cdots, n)$ 是 $\mathrm{D}^2G(u)$ 的特征值, 且存在正整数 $N_i(i = 1, 2, \cdots, n)$, 使得对于 $\forall u \in R^n$, $\gamma_i(u)$ 满足如下不等式:

$$N_i^2 < \gamma_i(u) < (N_i + 1)^2. \tag{6}$$

对(6) 中的 N_i 和 $\gamma_i(u)$, 记

$$\xi(\| u \|) = \min_{\| v \| \leqslant \| u \|}\left[\min_{1 \leqslant i \leqslant n}(\gamma_i(v) - N_i^2)\right], \tag{7}$$

$$\eta(\| u \|) = \min_{\| v \| \leqslant \| u \|}\left[\min_{1 \leqslant i \leqslant n}((N_i + 1)^2 - \gamma_i(v))\right]. \tag{8}$$

显然, $\xi: [0, +\infty) \to (0, +\infty)$, $\eta: [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ 是两个连续的非增函数.

现在, 我们证明下列关于问题(3) 的定理:

定理 2 假设(6) 式与条件

$$\int_0^{\infty} \min\left\{\xi(s), \eta(s)\right\} \mathrm{d}s = +\infty \tag{9}$$

同时成立, 这里 ξ、η 如(7) 和(8) 所定义, 那末, 问题(3) 有唯一解.

证 定义

$$U = \left\{ u \mid u(t) \in C^2([0, \pi], R^n), u'(0) = u'(\pi) = 0, \right.$$
$$\left. u(t) \text{ 是绝对连续的且满足} \int_0^{\pi} | u'(t) |^2 \mathrm{d}t < +\infty \right\}.$$

那末, U 关于下列内积是一个实 Hilbert 空间,

$$\langle u, v\rangle = \int_0^{\pi} [(u', v') + (u, v)] \mathrm{d}t,$$

由这一内积诱导的范数记为 $\|\cdot\|_U$•

定义 U 的子空间X 和Y 如下:

$$X=\left\{x \mid x(t)=\sum_{i=1}^{n} x_i(t)\boldsymbol{e}_i,\ x_i(t)=\frac{a_{i0}}{2}+\sum_{j=1}^{N_i} a_{ij}\cos jt,\right.$$
$$\left. a_{ij}\in R,\ j=1,2,\cdots,N_i,\ i=1,2,\cdots,n\right\}, \tag{10}$$

$$Y=\left\{y \mid y(t)=\sum_{i=1}^{n} y_i(t)\boldsymbol{e}_i,\ y_i(t)=\sum_{j=N_i+1}^{\infty} a_{ij}\cos jt,\right.$$
$$\left. a_{ij}\in R,\ j=N_i+1,N_i+2,\cdots,i=1,2,\cdots,n\right\}, \tag{11}$$

这里 $N_i(i=1,2,\cdots,n)$ 即(6) 中的 N_i, 级数 $y_i(t)$ 与由(11) 式逐项微分以后得到的级数都在 R 上一致收敛• 显然, X 和 Y 是满足 $U=X\oplus Y$ 的 U 的两个闭子空间, 而且对 $x\in X,y\in Y$, 下列不等式成立:

$$\int_0^{\pi}(x'(t),x'(t))\mathrm{d}t \leqslant \sum_{i=1}^{n} N_i^2\int_0^{\pi} x_i^2(t)\mathrm{d}t, \tag{12}$$

$$\int_0^{\pi}(y'(t),y'(t))\mathrm{d}t \geqslant \sum_{i=1}^{n}(N_i+1)^2\int_0^{\pi} y_i^2(t)\mathrm{d}t• \tag{13}$$

利用 Riesz 表现定理, 由下式定义一个映射 $\mathrm{T}: U\to U$

$$\langle \mathrm{T}(u),v\rangle=\int_0^{\pi}[(u',v')-(\nabla G(u),v)]\mathrm{d}t, \qquad \forall v\in U• \tag{14}$$

由(14) 式及 G 属于 C^2 的事实, 可以证明T 是 C^1 的且

$$\langle \mathrm{T}'(u)w,v\rangle=\int_0^{\pi}[(v',w')-(\mathrm{D}^2G(u)w,v)]\mathrm{d}t, \qquad \forall w,v,u\in U• \tag{15}$$

再利用Riesz表现定理, 设 d 是 U 中唯一元素使得

$$\langle d,v\rangle=-\int_0^{\pi}(f(t),v(t))\mathrm{d}t, \qquad \forall v\in U• \tag{16}$$

可以证明 u 是问题(3) 的解当且仅当 u 满足算子方程

$$\mathrm{T}(u)=d• \tag{17}$$

下面, 我们证明T 满足定理 1 的条件•

设 $x\in X,y\in Y,u$ 是 U 中任意元素, 我们有

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{T}'(u)x,y\rangle &= \int_0^{\pi}[(y',x')-(\mathrm{D}^2G(u)x,y)]\mathrm{d}t= \\ &\int_0^{\pi}[(x',y')-(x,\mathrm{D}^2G(u)y)]\mathrm{d}t= \\ &\langle x,\mathrm{T}'(u)y\rangle•\end{aligned}$$

对(6) 式中的 $N_i(i=1,2,\cdots,n)$, 记 $N_n=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} N_i$• 由(15)、(12)、(13)、(7) 及(8), 对 $\forall x\in X,\forall y\in Y,\forall u\in U,\forall v\in U$, 我们有

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{T}'(u)x,x\rangle &= \int_0^{\pi}[(x',x')-(\mathrm{D}^2G(u)x,x)]\mathrm{d}t \leqslant \\ &\sum_{i=1}^{n}\int_0^{\pi}(N_i^2-\gamma_i(u))x_i^2\mathrm{d}t \leqslant \\ &-\min_{\|v\|_U\leqslant\|u\|_U}\left[\min_{1\leqslant i\leqslant n}(\gamma_i(v)-N_i^2)\right]\int_0^{\pi}(x,x)\mathrm{d}t \leqslant\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{N_n^2+1}\left\{\min_{\|v\|_U\leqslant\|u\|_U}\left[\min_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\gamma_i(v)-N_i^2\right)\right]\right\}\times$$
$$\int_0^\pi[(x',x')+(x,x)]\mathrm{d}t=$$
$$-\frac{\xi(\|u\|_U)}{N_n^2+1}\|x\|_U^2\bullet$$

及

$$\langle\Gamma'(u)y,y\rangle=\int_0^\pi[(y',y')-(\mathrm{D}^2G(u)y,y)]\mathrm{d}t\geqslant$$
$$\sum_{i=1}^n\int_0^\pi\left[1-\frac{\gamma_i(u)}{(N_i+1)^2}\right]y_i'^2\mathrm{d}t=$$
$$\sum_{i=1}^n\int_0^\pi\frac{(N_i+1)^2-\gamma_i(u)}{(N_i+1)^2+1}\left(1+\frac{1}{(N_i+1)^2}\right)y_i'^2\mathrm{d}t\geqslant$$
$$\frac{1}{(N_n+1)^2+1}\left\{\min_{\|v\|_U\leqslant\|u\|_U}\left[\min_{1\leqslant i\leqslant n}\left((N_i+1)^2-\gamma_i(v)\right)\right]\right\}\times$$
$$\int_0^\pi[(y',y')+(y,y)]\mathrm{d}t=$$
$$\frac{\eta(\|u\|_U)}{(N_n+1)^2+1}\|y\|_U^2\bullet$$

由(9)式及 $\xi:[0,+\infty)\to(0,+\infty)$, $\eta:[0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 非增的事实, 可以证明
$$\int_0^\pi\min\left\{\frac{\xi(s)}{N_n^2+1},\frac{\eta(s)}{(N_n+1)^2+1}\right\}\mathrm{d}s=+\infty$$
及 $\xi(s)/[N_n^2+1]$ 和 $\eta(s)/[(N_n+1)^2+1]$ 非增• 由定理1 可知(17) 有唯一解 $v_0\in U$, 这意味着问题(3) 有唯一解 $v_0\in U$• 这就完成了定理2 的证明•

下面, 我们考虑问题(4) 和(5)•

定义一 Hilbert 空间 V, 在 V 上定义与 U 上相同的内积:
$$V=\left\{u\mid u(t)\in C^2([0,\pi],R^n),\ u(0)=u(\pi)=0,\right.$$
$$\left.u(t)\text{ 是绝对连续的且满足}\int_0^\pi|u'(t)|^2\mathrm{d}t<+\infty\right\},$$
再定义 V 的子空间 X^* 和 Y^*:
$$X^*=\left\{x\,\middle|\,x(t)=\sum_{i=1}^n x_i(t)\boldsymbol{e}_i,\ x_i(t)=\sum_{j=1}^{N_i}a_{ij}\sin jt,\right.$$
$$\left.a_{ij}\in R,\ j=1,2,\cdots,N_i,\ i=1,2,\cdots,n\right\},$$
$$Y^*=\left\{y\,\middle|\,y(t)=\sum_{i=1}^n y_i(t)\boldsymbol{e}_i,\ y_i(t)=\sum_{j=N_i+1}^{\infty}a_{ij}\sin jt,\right.$$
$$\left.a_{ij}\in R,\ j=N_i+1,N_i+2,\cdots,\ i=1,2,\cdots,n\right\},\tag{18}$$
这里 $N_i(i=1,2,\cdots,n)$ 即(6) 中的 N_i, 级数 $y_i(t)$ 和由(18) 逐项微分以后得到的级数都在 R 上一致收敛•

注意到对 $v\in V$,

$$\int_0^\pi (\boldsymbol{A}v', v)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A}v, v)\mid_0^\pi = 0.$$

类似于定理2 的证明, 可以证明关于问题(4)的下列定理:

定理3 假设对于所有 $u \in V$, $t \in [0, \pi]$, (6)和(9)同时成立, 那末, 问题(4)有唯一解.

类似地, 定义一Hilbert 空间 W:

$$W = \Big\{ u \mid u(t) \in C^2([0, 2\pi], R^n),\ u(0) = u(2\pi),\ u'(0) = u'(2\pi),$$
$$u(t)\ \text{是绝对连续的且满足} \int_0^{2\pi} \mid u'(t)\mid^2 \mathrm{d}t < +\infty \Big\}.$$

W 上的内积为

$$\langle u, v\rangle = \int_0^{2\pi} [(u', v') + (u, v)]\mathrm{d}t.$$

定义 W 的子空间X 和Y:

$$\left.\begin{aligned}
X &= \Big\{ x \mid x(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t)\boldsymbol{e}_i,\ x_i(t) = \frac{a_{i0}}{2} + \sum_{j=1}^{N_i}(a_{ij}\cos jt + b_{ij}\sin jt), \\
&\qquad a_{ij} \in R,\ b_{ij} \in R,\ j = 1, 2, \cdots, N_i,\ i = 1, 2, \cdots, n \Big\}, \\
Y &= \Big\{ y \mid y(t) = \sum_{i=1}^n y_i(t)\boldsymbol{e}_i,\ y_i(t) = \sum_{j=N_i+1}^{\infty}(a_{ij}\cos jt + b_{ij}\sin jt), \\
&\qquad a_{ij} \in R,\ b_{ij} \in R,\ j = N_i + 1, N_i + 2, \cdots,\ i = 1, 2, \cdots, n \Big\},
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

这里 $N_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 即(6) 式中的 N_i, 级数 $y_i(t)$ 和对(19) 式逐项微分后得到的级数都在 R 上一致收敛.

再注意到对 $v \in W$,

$$\int_0^{2\pi} (\boldsymbol{A}v', v)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A}v, v)\mid_0^{2\pi} = 0.$$

可以证明关于问题(5)的下列定理:

定理4 假设对一切 $u \in W$, $t \in [0, 2\pi]$, (6) 式和(9) 式同时成立, 那末, 问题(5) 有唯一解.

问题(5)对于 $\boldsymbol{A} = 0$ 时的解的存在性和唯一性已由沈祖和[1] 证明.

利用类似技巧我们还能证明下列

定理5 如果下列条件(C1)和(C2)同时满足, 问题(3)、(4)和(5)分别有唯一解:

(C1) 存在一整数$N > 0$使得对于 $u \in R^n$, $t \in [0, \pi]$(对问题(5), $t \in [0, 2\pi]$),

$$N^2 < \gamma_i(\mathrm{D}^2 G(u)) < (N + 1)^2, \qquad i = 1, 2, \cdots, n;$$

(C2) 记

$$\alpha(\| u \|) = \min_{\| v\| \leqslant \| u \|}\big[\min_{1\leqslant i\leqslant n}(\gamma_i(\mathrm{D}^2 G(v)) - N^2)\big],$$

$$\beta(\| u \|) = \min_{\| v\| \leqslant \| u \|}\big[\min_{1\leqslant i\leqslant n}((N + 1)^2 - \gamma_i(\mathrm{D}^2 G(v)))\big],$$

α 和 β 满足

$$\int_0^{+\infty} \min\{\alpha(s), \beta(s)\}\mathrm{d}s = +\infty,$$

这里 $\gamma_i(\mathrm{D}^2 G(u))$ 记 G 在 $u \in R^n$ 点的Hessian 矩阵的特征值.

[参 考 文 献]

[1] SHEN Zu_he. On the periodic solution to the Newtonian equation of motion[J]. Nonlinear Analysis, 1989, **13**(2): 145—150.

[2] WU Guang_rong, HUANG Wen_hua, SHEN Zu_he. On a min_max theorem[J]. Appl Math _JCU, 1997, **12**B(3): 293—298.

[3] 黄文华, 曹菊生, 沈祖和. 关于非线性两点边界值问题 $u'' + g(t, u) = f(t), u(0) = u(2\pi) = 0$ 的解的存在性和唯一性[J]. 应用数学和力学, 1998, **19**(9): 821—826.

On the Existence of Solutions of Boundary Value Problems of Duffing Type Systems

HUANG Wen_hua, SHEN Zu_he

(1. Department of Mathematics and Physics Sciences, Wuxi University of Light Industry, Wuxi 214036, P R China;

2. Department of Mathematics, Nanjing University, Nanjing 210008, P R China)

Abstract: Several existence results of solutions of two_point boundary value problems of Duffing type systems with Dirichlet boundary conditions, Neumann boundary conditions and periodic boundary conditions are presented.

Key words: Hilbert space; system of differential equations; two_point boundary value problem; solution