应用数学和力学,第21卷 第7期(2000年7月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2000) 07_0661_08

矩阵多元多项式的带余除法及其应用*

阿拉坦仓[1], 张鸿庆[2], 钟万勰[2]

(1. 内蒙古大学,呼和浩特 010021; 2. 大连理工大学,大连 116023)

(我刊编委张鸿庆、钟万勰来稿)

摘要: 给出矩阵多元多项式的带余除法,从而用微分代数的观点,得到把一类微分方程(组)化为无穷维Hamilton系统的充要条件及其具体无穷维Hamilton系统形式· 再把此方法和吴方法相结合获得构造一类微分方程(组)的通解的新方法· 几个例子表明这些方法都很有效的·

关 键 词: 矩阵多元多项式; 无穷维Hamilton系统; 吴方法; 通解
中图分类号: O175.25 文献标识码: A

引 言

给定微分方程求其等价的无穷维Hamilton系统是属于分析力学的逆(反)问题,而分析力学的逆(反)问题是经典力学的主要问题之一,著名的Poincare_Cartan问题就是求Hamilton正则方程· 许多人关注哪些偏微分方程(组)可以等价地(从而引入的变量最少)化成无穷维Hamilton系统· 已发现数学,物理,力学等学科中一大批重要的方程具有各种Hamilton结构[1~6],以往克服这种局限性的主要方法之一就是寻求构造一个新的Lagrange函数(或泛函),再用Legendre变换,从而得到Hamilton函数(或泛函),或从变分原理出发构造Hamilton函数(或泛函)·

本文先把多元多项式的带余除法推广到矩阵多元多项式中,然后引入微分算子的'因式分解",微分算子的"零延拓"等观点,彻底解决了常系数偏微分方程(组)的无穷维Hamilton系统的反问题· 又把此方法与吴方法相结合得到构造偏微分方程(组)通解的新方法· 这些方法是一般的· 机械的方法,从而可以在计算机上通过Mathematica实现· 用此方法不需先设定全状态变量,而其"商"矩阵算子作用在原变量上即可得到诸如拉格朗日函数,弯距等,此方法还可以解决部分非线性问题· 如它能求出KdV方程的无穷维Hamilton算子·

把多元多项式看做主变元的一元多项式时,其系数为可交换的多元多项式环,而把矩阵多元多项式看做主变元的一元多项式时,其系数为不可交换的矩阵多元多项式环,在证明多元多项式的带余除法时交换性起重要作用,没有交换性就没有现在的多元多项式的带余除法· 因此在矩阵多元多项式中的带余除法不可能得到象多元多项式的带余除法· 可是矩阵多元多项式还有一个不同于多元多项式的较好的性质,即存在 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{0}$, 使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$, 本文充分利用了这个性质,尽可能得到象多元多项式的带余除法·

---

* 收稿日期: 1999_01_21; 修订日期: 2000_03_20
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19702007); 内蒙古自然科学基金资助项目(971301_1)
作者简介: 阿拉坦仓(1963~),男,教授,博士.

1 矩阵多元多项式的带余除法

设 $\boldsymbol{p} = (a_{ij})_{l\times m}$ 是 l 行、m 列矩阵, 其中 $a_{ij} \in P[x_1, x_2, \cdots, x_n]$($P[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 是 n 元多项式环), 称 P 为矩阵 n 元多项式. 下面再引入与吴方法中的多元多项式几个名词平行的几个名词[7]、[8].

1. 矩阵 n 元多项式的主变元: 即在所有 a_{ij} 中实际出现的具有最大下标的变元.

2. 矩阵多元多项式 $\boldsymbol{P}$ 关于主变元的幂: 即主变元中出现的最高次幂, 简记为 $d_{x_k}\boldsymbol{p}$, 其中 x_k 是主变元.

3. 矩阵 n 元多项式的初式: 矩阵多元多项式 $\boldsymbol{P}$ 总可以写成如形式:

$$\boldsymbol{p} = (a_{ij})_{l\times m} = \sum_{s=0}^{d_{x_k}\boldsymbol{p}} \boldsymbol{p}_s x_k^s,$$

其中 x_k 是 $\boldsymbol{P}$ 的主变元, $\boldsymbol{p}_s = (a_{ij}^s)_{l\times m}$, $a_{ij}^s \in \boldsymbol{P}[x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}]$,

我们称 $\boldsymbol{p}_{d_{x_k}\boldsymbol{p}}$ 为 $\boldsymbol{P}$ 的初式, 一般简记为 $\boldsymbol{I}_p$.

我们还约定 $x^0 = 1$, $(a_{ij})^0 = \boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{I}$ 是单位矩阵.

下面给出矩阵多元多项式的带余除法. 为了叙述方便, 下面只考虑同阶方阵的矩阵多元多项式, 其它情况方法一样. 例题中给出了不是方阵的例子.

定理 1 设 $\boldsymbol{A}$ 是矩阵多元多项式, 则存在唯一的最小非负整数 α_1 和 n_1($n_1 \leqslant \alpha_1$) 以及矩阵多元多项式 $\boldsymbol{Q}_i$($i = 1, 2, \cdots, n_1$) 和 $\boldsymbol{R}_1$ 使下式成立

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{B}}^{\alpha_1} = \sum_{i=0}^{n_1} \boldsymbol{Q}_i \boldsymbol{B} \boldsymbol{I}_{\boldsymbol{B}}^i + \boldsymbol{R}_1, \tag{1}$$

其中 $d_{x_k}\boldsymbol{R}_1 < d_{x_k}\boldsymbol{B}$ 或者 $\boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{0}$.

证明 设 $\boldsymbol{B} = \sum_{l=0}^{s} \boldsymbol{B}_l \boldsymbol{x}_k^l$, $\boldsymbol{B}_l = (b_{ij}^l)$, $b_{ij}^l \in \boldsymbol{p}[x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}]$,

$$\boldsymbol{A} = \sum_{l=0}^{m} \boldsymbol{A}_l \boldsymbol{x}_k^l,\ \boldsymbol{A}_l = (a_{ij}^l) \in \boldsymbol{p}[x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}, x_{k+1}, \cdots, x_n].$$

不妨设 $m = d_{x_k}\boldsymbol{A} \geqslant d_{x_k}\boldsymbol{B} = s$ 则有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_B^{\alpha_1} = \boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{B} + \boldsymbol{R}_1^1, \tag{2}$$

其中 $m_1 = d_{x_k}\boldsymbol{R}_1^1 < m$, 并且 $\alpha_1 \in \{0, 1\}$ 是使(2) 式成立的最小非负整数.

事实上, 若存在 $\boldsymbol{Q}_1$ 使得 $\boldsymbol{A}_m = \boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{I}_B$ 则取 $\boldsymbol{R}_1^1 = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{x}_k^{m-s}\boldsymbol{B}$ 即可. 若不然, 检查是否存在 $\boldsymbol{Q}_1$ 和 $\boldsymbol{Q}_2$, $\boldsymbol{Q}_2 \in \{\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Q}\boldsymbol{I}_B = \boldsymbol{0}\} = \boldsymbol{X}$ 使得

$$\boldsymbol{A}_m = \boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{I}_B + \boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{B}_{s-1}$$

成立. 如果存在如上的 $\boldsymbol{Q}_1$ 和 $\boldsymbol{Q}_2$ 则取

$$\boldsymbol{R}_1^1 = \boldsymbol{A} - [\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{x}_k^{m-s} + \boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{x}_k^{m-s+1}]\boldsymbol{B}$$

即可, 若如上的 $\boldsymbol{Q}_1$ 和 $\boldsymbol{Q}_2$ 不存在, 则检查是否存在 $\boldsymbol{Q}_1$, $\boldsymbol{Q}_2$ 和 $\boldsymbol{Q}_3$, 其中 $\boldsymbol{Q}_3 \in \boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Q}_2 \in Y = \{\boldsymbol{Q} \mid \boldsymbol{Q}\boldsymbol{I}_B + \boldsymbol{Q}_3\boldsymbol{B}_{s-1} = 0, \boldsymbol{Q}_3 \in \boldsymbol{X}\}$ 使得

$$\boldsymbol{A}_m = \boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{I}_B + \boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{B}_{s-1} + \boldsymbol{Q}_3\boldsymbol{B}_{s-2}$$

成立, 如果存在如上的 $\boldsymbol{Q}_1$, $\boldsymbol{Q}_2$ 和 $\boldsymbol{Q}_3$ 则取

$$R_1^1 = A - [Q_1 x_k^{m-s} + Q_2 x_k^{m-s+1} + Q_3 x_k^{m-s+2}] B$$

即可，依次做下去直到 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_{s+1}$，若都不存在则取

$$R_1^1 = AI_B - A_m x_k^{m-s} B\cdot$$

因此使(2)式成立的最小 $\alpha_1 \in \{0, 1\}$ 和 Q_1 一定存在，并且按照上面的步骤能唯一确定 α_1 和 Q_1，

如果 $m_1 < s$ 或者 $R_1^1 = 0$ 则定理成立· 若不然即 $m_1 \geqslant s$ 时，

记 $R_1^1 = \sum_{l=0}^{m_1} C_l x_k^l$，则重复上面的步骤($R_1^1$ 代替 A) 可得

$$R_1^1 I_B^{\alpha_2} = Q_2 B + R_1^2, \tag{3}$$

其中 $m_s = d_{x_k} R_1^2 < m_1$，并且 $\alpha_2 \in \{0, 1\}$ 是使(3)式成立的最小非负整数，并且 Q_2 和 α_2 被唯一确定· 由(2)和(3)可得

$$AI_B^{\alpha_1+\alpha_2} = Q_1 BI_B^{\alpha_2} + Q_2 B + R_1^2\cdot$$

当 $m_2 < s$ 或者 $R_1^2 = 0$ 则定理成立· 若不然即 $m_2 \geqslant s$ 时，再重复做上面的步骤:(R_1^2 代替 R_1^1) 依次可得矩阵多元多项式

$$R_1^1, R_1^2, R_1^3, \cdots, R_1^i\cdot$$

由于每做一次使幂次至少降低一次，从而有

$$m > m_1 > m_2 > \cdots > m_i,$$

因此存在某一个 R_l^i 使得 $d_{x_k} R_l^i < s$ 或者 $R_l^i = 0$· 故定理得证· 证毕·

推论 1 当 B 与 I_B 可交换时，则定理 1 中的(1)式可变成

$$AI_B^{\alpha} = Q_1 B + R_1\cdot \tag{4}$$

推论 2 当 I_B 为满秩数阵时，则定理 1 中的(1)式可变成

$$A = Q_1 B + R_1\cdot \tag{5}$$

推论 1 和推论 2 的证明从略·

定理 1 的证明是构造性证明· 由 α_1 和 n_1 的最小性保证了若有(5)式成立，则不会出现(4)式或(1)式形式· 若有(4)式成立，则不会出现(1)式形式· 并证明中已求出了 Q 和 R_1，$A_m = Q_1 I_B$ 或 $Q_2 \in X$，$A_m = Q_1 I_B + Q_1 B_{s-1}$(这里的 Q_1 和 $A_m = Q_1 I_B$ 中的 Q_1 不一样)的判断和求出 Q 比起直接做 $AI_B^{\alpha_1} = \sum_{i=0}^{n_1} Q_i BI_B^i + R_1$ 简单多了· 并且在计算机上很容易做出来· 在许多应用中 A_m 和 I_B，B_l 是数阵，或者极其简单的矩阵多元多项式· 且比 A 和 B 少一个变元· 更重要的是如求 $A_m = Q_1 I_B$，只要求方程即可·

当 B 是数矩阵但不是满秩矩阵，而 A 是满秩数矩阵时则(5)式不成立，但(4)式成立· 从而对矩阵多元多项式即使是矩阵一元多项式得不到象一元多项式那样的带余除法，因此引进初式等概念是必要的·

定理 1′ 设 A, B 是矩阵多元多项式，则存在唯一的最小非负整数 α_2 和 n_2($n_2 \leqslant \alpha_2$) 以及矩阵多元多项式 Q_i($i = 1, 2, \cdots, n_2$) 和 R_2 使下式成立

$$I_B^{\alpha_2} A = \sum_{i=0}^{n_2} I_B^i B Q_i + R_2, \tag{1$'$}$$

其中 $d_{x_k} R_2 < d_{x_k} B$ 或者 $R_2 = 0$·

推论 1′　当 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{I}_B$ 可交换时, 则定理 1′ 中的(1)′ 式可变成

$$\boldsymbol{I}_B^{\alpha_2}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_2 + \boldsymbol{R}_2. \tag{4$'$}$$

推论 2′　当 $\boldsymbol{I}_B$ 为满秩数阵时, 则定理 1′ 中的(1)′ 式可变成

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_2 + \boldsymbol{R}_2. \tag{5$'$}$$

一般情况下(1), (4) 和(5) 式中的 α_1, n_1, $\boldsymbol{Q}_i$, $\boldsymbol{R}_1$ 与(1)′、(4)′ 和(5)′ 中的 α_2, n_2, $\boldsymbol{Q}_i$, $\boldsymbol{R}_2$ 不相等的. 这也是矩阵多元多项式带余除法的不同之处.

2　带余除法在无穷维 Hamilton 系统中的应用

用 x 代替 $\partial/\partial x$, 用 x^n 代替 $\partial^n/\partial x^n$, 同样用 y 代替 $\partial/\partial y$, 用 y^n 代替 $\partial^n/\partial y^n$ …等等, 从而把常系数的微分多项式变为多项式, 矩阵微分算子变为矩阵多元多项式, 因此可以用带余除法化一类微分方程(组) 为无穷维 Hamilton 系统.

例 2.1　考虑方程　$2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$,

把它可写为

$$2x^2 + xy + 2y^2 = 0. \tag{6}$$

设 Hamilton 系统的矩阵多元多项式为

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} A & C \\ D & -\bar{A} \end{bmatrix},$$

其中 A, $-\bar{A} \in P[y]$, $\bar{A}$ 是把 A 中的 y 换成 $-y$ 后所得的多项式, C 和 D 属于 $P[Y^2]$. 把(6) 可写为

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2x^2 + xy + 2y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} x^2 + \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 2y^2 \end{bmatrix},$$

则用带余除法后, 为了整除令余式 $R = 0$, 则有无穷个解, 其中一个解为

$$A = -\frac{1}{4}y, \quad C = -\frac{1}{2}, \quad D = \frac{15}{8}y^2.$$

从而有

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y} + 2\dfrac{\partial^2}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\partial}{\partial x} - \dfrac{1}{4}\dfrac{\partial}{\partial y} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{15}{8}\dfrac{\partial^2}{\partial y^2} & -\dfrac{\partial}{\partial x} - \dfrac{1}{4}\dfrac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2\dfrac{\partial}{\partial x} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$$

和

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{\partial}{\partial x} - \dfrac{1}{4}\dfrac{\partial}{\partial y} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{15}{8}\dfrac{\partial^2}{\partial y^2} & -\dfrac{\partial}{\partial x} - \dfrac{1}{4}\dfrac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ -2\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}.$$

令

$$n = -2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y},$$

则有

$$\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} u \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{4}\dfrac{\partial}{\partial y} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{15}{8}\dfrac{\partial^2}{\partial y^2} & -\dfrac{1}{4}\dfrac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ n \end{bmatrix},$$

这就是方程 $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 的无穷维 Hamilton 系统•

把(6)改写为二阶向量, 这是因为(6)对 x 的幂次是2, 因而无穷维 Hamilton 算子也是 2×2 矩阵• 若 x 的幂次为 $2n$, 则设为 $2n$ 阶向量, 若 x 的幂次为 $2n+1$, 则设为 $2(n+1)$ 阶向量• 若方程组则每行 x 的最高次幂加起来考虑(见例2.3)• 以上方法得到了微分算子的因式分解, 如

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial y} & -\frac{1}{2} \\ \frac{15}{8}\frac{\partial^2}{\partial y^2} & -\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial y}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\end{bmatrix},$$

而 $2x^2+xy+2y^2$ 在实数域中不能因式分解, 但在二维向量里可以因式分解•

例 2.2 板的弯曲方程为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2\omega=0•$$

用同样方法可得到如下因式分解(有无穷多种形式)

$$-\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\partial^4}{\partial x}+2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\partial^2}{\partial y^2} & -\frac{\partial}{\partial x} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial^3}{\partial x^3}+\frac{\partial^3}{\partial y^2\partial x} \\ -\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix}\omega \\ \theta \\ q \\ m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\partial^2}{\partial y^2} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 0 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega \\ \theta \\ q \\ m\end{bmatrix},$$

从上面可见

$$\theta=\frac{\partial\omega}{\partial x},\ q=\frac{\partial\omega^3}{\partial x^3}+\frac{\partial^3\omega}{\partial y\partial x^2},\ m=-\frac{\partial\omega^2}{\partial x^2}-\frac{\partial\omega^2}{\partial y^2},$$

这些正是文[9]中的状态函数形式, q 是拉格朗日参变函数, m 是弯矩• 还有许多其它 Hamilton 形式, 即使是同一个问题的同一个 Hamilton 系统, 其变换可以不同, 即可以引入不同的状态函数因而也就是引入不同的物理量和不同的拉格朗日参变函数可以得到同一个 Hamilton 系统•

例 2.3 按应力求解的平面弹性力学方程组为[10]

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=0,\ \frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}=0,\ \Delta(\sigma_x+\sigma_y)=0,$$

其中 σ_x, σ_y 和 τ_{xy} 表示应力,

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}•$$

用同样方法可得到如下因式分解(有无穷多种形式)

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \Delta & 0 & \Delta \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ -\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial y} & 0 & -\frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix},$$

则有如下无穷维 Hamilton 系统

$$\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ -\frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}.$$

利用矩阵多元多项式的带余除法可以把矩阵多元多项式因式分解,从而把微分方程(组)因式分解,若其中一个因式是无穷维 Hamilton 算子,则另一个因式在原方程的解上作用后可得到其它物理量,然后用这些物理量作为状态函数则可把原方程(组)化成无穷维 Hamilton 系统,由于无穷维 Hamilton 系统转化为矩阵多元多项式时,其初式为单位数矩阵. 因此矩阵多元多项式的带余除法可以得到(5)′形式.

以上做法与吴方法类似地推广到在计算机上,用计算机代数系统 Mathematica 计算. 用上面的方法也可以得到 KdV 方程的无穷维 Hamilton 算子

3　构造通解的方法

本节利用矩阵多元多项式的带余除法给出一种构造通解的方法. 首先对微分方程组 A 的每个方程求导使方程组的个数足够多,然后用吴方法求特征列,从特征列中取适当的元素与 0 构成一个矩阵多元多项式 $\boldsymbol{D}$,再用原方程组构成的矩阵多元多项式用带余除法去除 $\boldsymbol{D}$,这时一般情况下余式 $\boldsymbol{R} = \mathbf{0}$,从而得到变换公式和通解. 下面举例说明这些方法.

例 3.1　按应力求解的平面弹性力学方程组为

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \\ &\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0, \\ &\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

首先对(7)各方程求导 $(\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial^2/\partial x^2, \partial^2/\partial y^2, \partial^2/\partial x\partial y)$ 变成许多方程(其实只要对第一方程求导 $\partial/\partial x$,第二方程求导 $\partial/\partial y$,第三方程求导 $\partial^2/\partial y^2$ 即可,但计算机做时比这个多),然后用吴方法可得 $\Delta^2\partial x = 0$, $\Delta^2\partial y = 0$, $\Delta^2\tau_{xy} = 0$

因此取矩阵多元多项式为

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (x^2+y^2)^2 \end{bmatrix} \text{或} \begin{bmatrix} (x^2+y^2)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (x^2+y^2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (x^2+y^2)^2 \end{bmatrix}·$$

还可以取其它形式的矩阵, 其元素为0或$(x^2+y^2)^2$(也可取其它特征列的元素)· 用带余除法可得到如下因式分解(有无穷多种形式)

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (x^2+y^2)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 0 \\ 0 & x & y \\ x^2+y^2 & 0 & x^2+y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^2 \\ -xy \\ x^2 \end{bmatrix},$$

从而

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} \\ -\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix} \varphi, \qquad \Delta^2 \varphi = 0·$$

这就是例3.1的通解· 同样可以得到其它形式的通解· 还可以得到Cauchy_Riemann方程组和Maxwell方程组的通解, 也可以得到Helmholtz分解 $I_3\Delta=$ grad · div_rot · rot· 这里不一一例出了· 关于力学中微分方程的通解, 国内王敏中、张鸿庆等学者作了大量的、具有重要意义的工作·

[参 考 文 献]

[1] 钟万勰. 弹性力学求解新体系[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1995.

[2] 郑宇, 张鸿庆. 固体力学中的Hamilton正则表示[J]. 力学学报, 1996, **28**(1): 119~125.

[3] 阿拉坦仓, 张鸿庆, 钟万勰. 一类偏微分方程的无穷维Hamilton正则表示[J]. 力学学报, 1999, **31**(3): 347~357.

[4] Santilli R M. Foundations of Theoretical Mechanics[M]. New York: Springer_Verlag, 1978.

[5] Olver P J. Applications of Lie Groups to Differential Equations (GTM, Vol. 107) [M]. New York: Springer_Verlag, 1986.

[6] 唐立民, 褚致中, 邹贵平等. 混合状态Hamilton元的半解析解和叠层板的计算[J]. 计算结构力学及其应用, 1992, **9**(4): 347~360.

[7] 吴文俊. 几何定理机器证明[J]. 自然科学进展_国家重点实验室通讯, 1992, **1**: 1~14.

[8] 石赫. 吴方法系列讲座[M]. 北京: 中国科学院系统所, 1992.

[9] 钟万勰. 分离变量法与哈密尔顿体系[J]. 计算结构力学及其应用, 1991, **8**(3): 229~240.

[10] Timoshenko S P, Goodier J N. Theory of Elasticity[M]. 3rd ed. New York: McCraw_Hill, 1970.

[11] 张鸿庆, 阿拉坦仓, 钟万勰. Hamilton体系与辛正交系的完备性[J]. 应用数学和力学, 1997, **18**(3): 217~221.

Pseudo_Division Algorithm for Matrix Multivariable Polynomial and Its Application

Alatancang[1], Zhang Hongqing[2], Zhong Wanxie[2]
(1. Inner Mongolia University, Hohhot 010021, P R China;
2. Dalian University of Technology, Dalian 116023, P R China)

Abstract: Pseudo_division algorithm for matrix multivariable polynomial are given, thereby with the view of differential algebra, the sufficient and necessary conditions for transforming a class of partial differential equations into infinite dimensional Hamiltonian system and its concrete form are obtained. Then by combining this method with Wu's method, a new method of constructing general solution of a class of mechanical equations is got, which several examples show very effective.

Key words: matrix multivarible polynomial; infinite dimensional Hamiltonian system; Wu's method; general solution