应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2000) 07_0693_08

一类微生物种群生态数学模型的 Hopf 分支*

郭瑞海[1], 袁晓凤[2]

(1. 西南民族学院 数学系, 成都 610041; 2 中国科学院 成都计算所数理室, 成都 610041)

(李继彬推荐)

摘要: 讨论了一类具有二阶生长速率的微生物菌群生态数学模型· 运用常微分方程空间定性理论的手法, 在四维相空间中对该模型进行了深入讨论, 判定了平衡点的类型及稳定性, 分析了正平衡点的存在及成为 0^+ 吸引子的条件· 最后讨论了系统小扰动下产生 Hopf 分支的问题·

关 键 词: 数学模型; 定性理论; 平衡点; Hopf 分支
中图分类号: O175.12 文献标识码: A

1 数学模型

在许多微生物生化反应过程中, 常常有多种菌群参与, 存在复杂的代谢过程[1]· 各功能菌之间出现前一阶段微生物的代谢物构成后一阶段微生物的代谢基质的非捕食链的关系· 今主要考虑第一、二阶段两种功能菌的相互作用· 两种功能菌群分别记为 x_1, x_2, 在一定的条件下可得到如下模型:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= a_{01}\dot{x}_1 + a_1 x_1 + a_{11}x_1^2, \\ \ddot{x}_2 &= a_{02}\dot{x}_2 + a_2 x_2 + a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \cdot \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

为便于利用常微分方程定性分析手法, 我们对(1)作如下变换·

令 $y_i = \dot{x}_i$ ($i = 1, 2$; $\dot{x}_i = \mathrm{d}x_i/\mathrm{d}t$)·

于是得到四维的一阶方程组

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1, \\ \dot{y}_1 &= a_{01}y_1 + a_1x_1 + a_{11}x_1^2, \\ \dot{x}_2 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= a_{02}y_2 + a_2x_2 + a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \cdot \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

2 平衡点及其稳定性

采用矩阵记号, (2) 可以写为

$$\dot{\boldsymbol{X}} = F(\boldsymbol{X}) \cdot \tag{3}$$

* 收稿日期: 1998_09_30; 修订日期: 2000_04_13
基金项目: 国家自然科学基金资助课题(19571081)
作者简介: 郭瑞海(1944~), 副教授, 研究方向: 微分动力系统.

其中, $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,y_1,y_2)^{\mathrm{T}}$, $F(\boldsymbol{X})=(y_1,y_2,a_{01}y_1+a_1x_1+a_{11}x_1^2,a_{02}y_2+a_2x_2+a_{21}x_1x_2+a_{22}x_2^2)^{\mathrm{T}}$.

由 $F(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{0}$ 解得(3) 的平衡点为

$$O_1(0,0,0,0),\ O_2(-a_1/a_{11},0,0,0),\ O_3(0,-a_2/a_{22},0,0),$$
$$O_4(m_1,m_2,0,0).$$

其中, m_1, m_2 满足方程 $a_1+a_{11}x_1=0$, $a_2+a_{21}x_1+a_{22}x_2=0$.
即

$$m_1=x_1=-\frac{a_1}{a_{11}},\quad m_2=x_2=\frac{1}{a_{11}a_{22}}(a_1a_{21}-a_{11}a_2).$$

条件Ⅰ: $a_1>0$, $a_2>0$, $a_{11}<0$, $a_{22}<0$, a_{21} 适当小.

易知, 在条件Ⅰ下可以使平衡点 $O_1,O_2,O_3,O_4\in\mathbf{R}_4^+=\left\{(x_1,x_2,y_1,y_2)\mid x_i\geqslant 0,y_i\geqslant 0,i=1,2\right\}$.

特别地称 $x_1>0$, $x_2>0$ 的平衡点 O_4 为正平衡点.

研究平衡点的性态需要计算(3) 的一阶变分方程

$$\dot{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X},\tag{4}$$

其中, $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}F(\boldsymbol{X}^*)$ 为 $F(\boldsymbol{X})$ 的 Jacobi 矩阵, $\boldsymbol{X}^*$ 表示上述 4 个平衡点之一, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为

$$\boldsymbol{A}=\left.\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\b_1&0&a_{01}&0\\c_1&b_2&0&a_{02}\end{pmatrix}\right|_{X=X^*}$$

此处 $b_1=a_1+2a_{11}x_1^*$, $b_2=a_2+a_{21}x_1^*+2a_{22}x_2^*$, $c_1=a_{21}x_2^*$.

$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$\varphi(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda^2-\lambda a_{01}-b_1)(\lambda^2-a_{02}\lambda-b_2).\tag{5}$$

四个特征根为

$$\lambda_i^{\pm}=\frac{1}{2}\left(a_{0i}\pm\sqrt{a_{0i}^2+4b_i}\right)\quad(i=1,2).\tag{6}$$

代入各平衡点的坐标计算各 $b_i(i=1,2)$ 列表为

平衡点	b_1	b_2
O_1	a_1	a_2
O_2	$-a_1$	$-a_{22}m_2$
O_3	a_1	$-a_2$
O_4	$a_{11}m_1$	$a_{22}m_2$

(7)

条件Ⅱ $a_{01}\cdot a_{02}\neq 0$, $b_1\cdot b_2\neq 0$.

引理 2.1 设条件Ⅱ成立, 则系统(4) 的所有平衡点均为双曲平衡点.

证明 由(6) 及条件Ⅱ, $\mathrm{Re}(\lambda_i^{\pm})\neq 0(i=1,2)$, 立得结论.

引理 2.2　设条件Ⅱ成立，则平衡点 X^* 的类型可由 a_{0i}, b_i 的符号确定 i) 若 X^* 处存在 $b_i(X^*) > 0$ $i \in \{1, 2\}$，则该平衡点必为广义鞍点．ii) 若所有 $b_i(X^*) < 0(i = 1, 2)$ 时．① 当所有 $a_{0i} < 0(i = 1, 2)$，X^* 为渐近稳定的广义结点．②当 $a_{0i} > 0(i = 1, 2)$ 时，X^* 为不稳定的广义结点．③若 $a_{01} \cdot a_{02} < 0$，则 X^* 为广义鞍点．

证明　由(5)知，若存在 $b_i > 0$, $i \in \{1, 2\}$，则由 $\lambda^2 - a_{0i}\lambda - b_i = 0$，存在一对相异符号的实特征根 $\lambda_i^{\pm}$．由引理 2.1，则另一对特征根也有非零实部．由文[2]、[3] 之分类法，X^* 为广义鞍点，结论 i) 成立．

若 $b_i(X^*) < 0$, $i = 1, 2$，则由(6) 知特征根实部符号由 a_{0i} 决定，即 $\mathrm{Re}(\lambda_i^{\pm})a_{0i} > 0$，进而当 $a_{0i} < 0(i = 1, 2)$ 时，$\mathrm{Re}(\lambda_i^{\pm}) < 0$, ii) ①成立；当 $a_{0i} > 0(i = 1, 2)$ 时，$\mathrm{Re}(\lambda_i^{\pm}) > 0$, ii) ②成立；当 $a_{01}a_{02} < 0$ 时，$\mathrm{Re}(\lambda_1^{\pm}) \cdot \mathrm{Re}(\lambda_2^{\pm}) < 0$, ii) ③成立．

定理 2.3　设条件Ⅰ，条件Ⅱ成立且 $a_{0i} < 0(i = 1, 2)$，则系统(4) 的所有平衡点均为双曲型的．且 O_1_O_3 为广义鞍点，不稳定平衡点．O_4 为渐近稳定的广义结点，亦称为 0^+ 吸引子[3]．

证明　由(7)知平衡点 O_1、O_2、O_3 均有 $b_i > 0$，则引理 2.2结论 i) 成立，故都为广义鞍点，在平衡点 O_4 处 $b_i < 0(i = 1, 2)$，且 $a_{0i} < 0$，引理 2.2 中结论 ii) ①成立，故 O_4 为渐近稳定的广义结点．

至此，我们完成了一阶线性变分方程的局部定性分析．由 Hartman 定理[4]，原非线性系统各平衡点处轨线的拓扑结构亦完全清楚．

3　系统在小扰动下的 Hopf 分支

在实际应用中，主要关心系统中各功能菌稳定在一定数量时的持续生长过程，故应着重研究正平衡点 O_4 及其周围轨线的分布状况．

由系统(2) 可知功能菌 x_1 由子系统

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1, \\ \dot{y}_1 &= a_{01}y_1 + a_1x_1 + a_{11}x_1^2 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

完全确定，此模型中未考虑功能菌 x_2 对 x_1 产生的作用．实际上，由于所处同一环境，在生化反应过程中，当功能菌 x_2 积累到一定数量时将会对功能菌 x_1 产生一些小的影响．因此我们将一个小的扰动项加到(8) 上，作为对原模型的补充完善，设

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1, \\ \dot{y}_1 &= a_{01}y_1 + a_1x_1 + a_{11}x_1^2 + a_{12}(x_1 - m_1)(x_2 - m_2), \\ \dot{x}_2 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= a_{02}y_2 + a_2x_2 + a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2^2, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

其中 a_{12} 充分小，此时正平衡点 O_4 仍保留，m_1, m_2 同第 2 节．

作平移变换 $\xi = x_1 - m_1$, $\eta = x_2 - m_2$, (9) 变为

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{AX} + \boldsymbol{G}, \tag{10}$$

其中，$\boldsymbol{X} = (\xi, \eta, y_1, y_2)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{G} = (0, 0, a_{11}\xi^2 + a_{12}\xi\eta, a_{21}\xi\eta + a_{22}\eta^2)^{\mathrm{T}}$,

$$A|_{O_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ b_1 & 0 & a_{01} & 0 \\ c_1 & b_2 & 0 & a_{02} \end{pmatrix}, \; b_1 = a_{11}m_1,\; b_2 = a_{22}m_2,\; c_1 = a_{21}m_1 \cdot$$

3.1 中心流形的存在性

由(6)知,线性系统的四个特征根为

$$\lambda_i^{\pm} = \frac{1}{2}(a_{0i} \pm \sqrt{a_{0i}^2 + 4b_i}) \qquad (i = 1, 2) \cdot$$

条件 III: $a_{01} = 0,\ a_{02} < 0$•

在条件 III下,平衡点 O_4 为非双曲平衡点•

定理 3.1(中心流形的存在性) 设条件 I 、条件 III成立• 则系统(10)在 O_4 邻域存在 2 维的局部稳定流形 S 及 2 维中心流形 M• 它们分别切于线性系统 O_4 的稳定特征子空间与中心子空间•

证明 由条件 I ,正平衡点 O_4 存在, $b_1 = a_{11}m_1 < 0,\ b_2 = a_{22}m_2 < 0$• ,由条件 III,系统存在一对纯虚根和一对有负实部的特征根,满足中心流形定理[5],故存在中心流形•

3.2 中心流形的计算

中心流形的计算往往非常复杂,手工难于进行• 借助计算机符号代数软件我们较顺利地完成了这一工作•

为计算方便,今记 $\lambda_1 = \lambda_1^+,\ \lambda_2 = \lambda_1^-,\ \lambda_3 = \lambda_2^+,\ \lambda_4 = \lambda_2^-,\ D_{12} = \lambda_1^2 - a_{02}\lambda_1 - b_2$, $D_{22} = \lambda_2^2 - a_{02}\lambda_2 - b_2,\ \lambda_{1,2} = \alpha \pm \mathrm{i}\beta$

由于在正平衡点 O_4 处 $b_1 < 0,\ b_2 < 0$, 对临界参数条件 $a_{01} = 0$, 则 $\alpha = \frac{1}{2}a_{01} = 0$, $\lambda_{1,2} = \pm \mathrm{i}\beta(\beta = \sqrt{-b_1})$ 为一对共轭纯虚数特征根,且当 $a_{02}^2 + 4b_2 > 0$ 时, λ_3, λ_4 为负实数特征根•

在上述假设下存在线性无关的特征向量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4$ 组成变换矩阵

$$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4) = \begin{pmatrix} D_{12} & D_{22} & 0 & 0 \\ c_1 & c_1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 D_{12} & \lambda_2 D_{22} & 0 & 0 \\ \lambda_1 c_1 & \lambda_2 c_1 & \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix},$$

其中, $\lambda_1, \lambda_2, D_{12}, D_{22}$ 为复数,所得 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 为共轭复向量• 通过分离 $\boldsymbol{e}_2$ 的实、虚部可以得到实形式的变换矩阵,记为 $\boldsymbol{P}(\alpha = 0$ 时)

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} s & -t & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & 1 & 1 \\ -\beta t & -\beta s & 0 & 0 \\ 0 & -c_1\beta & \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix},$$

其中, $s = -\beta^2 - b_2,\ t = -a_{02}\beta,\ \beta = \sqrt{-b_1}$•

对(10)施行变换 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)^{\mathrm{T}}$ 得

$$\dot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{G} = \boldsymbol{J}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{G} \cdot \tag{11}$$

其中

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}0&-\beta&0&0\\ \beta&0&0&0\\ 0&0&\lambda_3&0\\ 0&0&0&\lambda_4\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{P}|}\begin{pmatrix}\beta s(\lambda_4-\lambda_3)&0&-t(\lambda_4-\lambda_3)&0\\ -\beta t(\lambda_4-\lambda_3)&0&-s(\lambda_4-\lambda_3)&0\\ \beta c_1(\beta t-s\lambda_4)&\beta\lambda_4(s^2+t^2)&c_1(\beta s+t\lambda_4)&-\beta(s^2+t^2)\\ -\beta c_1(\beta t-s\lambda_3)&-\beta\lambda_3(s^2+t^2)&-c_1(\beta s+t\lambda_3)&\beta(s^2+t^2)\end{pmatrix},$$

$|\boldsymbol{P}|=\det\boldsymbol{P}=\beta(s^2+t^2)(\lambda_4-\lambda_3)$•

为简化后面的表达, 记 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}^{-1}=(q_{ij})$, 则

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{G}=\boldsymbol{QG}=(g_1,g_2,g_3,g_4)^{\mathrm{T}},\\ &g_1=a_{11}q_{13}\xi^2+a_{12}q_{13}\xi\eta,\\ &g_2=a_{11}q_{23}\xi^2+a_{12}q_{23}\xi\eta,\\ &g_3=q_{33}(a_{11}\xi^2+a_{12}\xi\eta)+q_{34}(a_{21}\xi\eta+a_{22}\eta^2),\\ &g_4=q_{43}(a_{11}\xi^2+a_{12}\xi\eta)+q_{44}(a_{21}\xi\eta+a_{22}\eta^2)\text{•}\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

现在将(11) 分为两个子系统 u_c, u_B 的组合

$$\boldsymbol{u}_c=(u_1,u_2)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{u}_B=(u_3,u_4)^{\mathrm{T}},$$

$$\dot{\boldsymbol{u}}_c=\begin{pmatrix}0&-\beta\\ \beta&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}g_1\\ g_2\end{pmatrix}\triangleq\boldsymbol{C}\boldsymbol{u}_c+\boldsymbol{G}_c,\tag{13}$$

$$\dot{\boldsymbol{u}}_B=\begin{pmatrix}\lambda_3&0\\ 0&\lambda_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_3\\ u_4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}g_3\\ g_4\end{pmatrix}\triangleq\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_B+\boldsymbol{G}_B\text{•}\tag{14}$$

则中心流形为 $\boldsymbol{u}_B=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{u}_c)=\begin{pmatrix}h_3(u_1,u_2)\\ h_4(u_1,u_2)\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{u}_c)$ 满足

$$\boldsymbol{Dh}(\boldsymbol{u}_c)\cdot[\boldsymbol{C}\boldsymbol{u}_c+\boldsymbol{G}_c|(\boldsymbol{u}_c,\boldsymbol{h}(\boldsymbol{u}_c))]=\boldsymbol{Bh}(\boldsymbol{u}_c)+\boldsymbol{G}_B(\boldsymbol{u}_c,\boldsymbol{h}(\boldsymbol{u}_c)),\tag{15}$$

且 $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0},\quad\boldsymbol{Dh}(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$,

其中, $\boldsymbol{Dh}(\boldsymbol{u}_c)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial h_3}{\partial u_1}&\dfrac{\partial h_3}{\partial u_2}\\ \dfrac{\partial h_4}{\partial u_1}&\dfrac{\partial h_4}{\partial u_2}\end{pmatrix}$•

令 $h_i=h_{i1}u_1^2+h_{i2}u_1u_2+h_{i3}u_2^2+h_{i4}u_1^3+\cdots\quad(i=3,4)$• (16)

将(16) 代入(15), 比较等式两边同次幂的系数可确定出 h_{ij}, $i=3,4$, $j=1,2,3\cdots$

由计算机算得

$$\begin{aligned}h_{31}=&\frac{1}{\lambda_3(4\beta^2+\lambda_3^2)}(-2\beta^2q_{34}a_{22}c_1^2-q_{34}a_{22}c_1^2\lambda_3^2-2\beta^2a_{11}q_{33}s^2-\\ &a_{11}q_{33}s^2\lambda_3^2-2\beta^2a_{11}q_{33}t^2-2\beta^2a_{12}q_{33}sc_1-a_{12}q_{33}sc_1\lambda_3^2-\\ &2\beta^2q_{34}a_{21}sc_1-q_{34}a_{21}sc_1\lambda_3^2+\lambda_3\beta a_{12}q_{33}tc_1+\\ &\lambda_3\beta q_{34}a_{21}tc_1+2\lambda_3\beta a_{11}q_{33}st),\end{aligned}$$

$$h_{32}=\frac{1}{4\beta^2+\lambda_3^2}(\lambda_3a_{12}q_{33}tc_1+\lambda_3q_{34}a_{21}tc_1+2\beta q_{34}a_{22}c_1^2+$$

$$2\lambda_3 a_{11} q_{33} st - 2\beta a_{11} q_{33} t^2 + 2\beta q_{34} a_{21} sc_1 +$$
$$2\beta a_{11} q_{33} s^2 + 2\beta a_{12} q_{33} sc_1),$$

$$h_{33} = \frac{1}{\lambda_3(4\beta^2 + \lambda_3^2)}(-\lambda_3\beta a_{12} q_{33} tc_1 - \lambda_3\beta q_{34} a_{21} tc_1 - 2\beta^2 q_{34} a_{22} c_1^2 -$$
$$2\lambda_3\beta a_{11} q_{33} st - 2\beta^2 a_{11} q_{33} t^2 - \lambda_3^2 a_{11} q_{33} t^2 -$$
$$2\beta^2 q_{34} a_{21} sc_1 - 2\beta^2 a_{11} q_{33} s^2 - 2\beta^2 a_{12} q_{33} sc_1),$$

$$h_{41} = \frac{1}{\lambda_4(4\beta^2 + \lambda_4^2)}(-2\beta^2 q_{44} a_{22} c_1^2 - q_{44} a_{22} c_1^2 \lambda_4^2 - 2\beta^2 a_{11} q_{43} t^2 -$$
$$2\beta^2 a_{11} q_{43} s^2 - a_{11} q_{43} s^2 \lambda_4^2 - 2\beta^2 a_{12} q_{43} sc_1 - a_{12} q_{43} sc_1 \lambda_4^2 -$$
$$2\beta^2 q_{44} a_{21} sc_1 - q_{44} a_{21} sc_1 \lambda_4^2 + \lambda_4\beta q_{44} a_{21} tc_1 +$$
$$2\lambda_4\beta a_{11} q_{43} st + \lambda_4\beta a_{12} q_{43} tc_1),$$

$$h_{42} = \frac{1}{4\beta^2 + \lambda_4^2}(-2\beta a_{11} q_{43} t^2 + \lambda_4 q_{44} a_{21} tc_1 + 2\lambda_4 a_{11} q_{43} st +$$
$$\lambda_4 a_{12} q_{43} tc_1 + 2\beta a_{11} q_{43} s^2 + 2\beta a_{12} q_{43} sc_1 +$$
$$2\beta q_{44} a_{22} c_1^2 + 2\beta q_{44} a_{21} sc_1),$$

$$h_{43} = \frac{1}{\lambda_4(4\beta^2 + \lambda_4^2)}(-\lambda_4^2 a_{11} q_{43} t^2 - \lambda_4\beta q_{44} a_{21} tc_1 - 2\lambda_4\beta a_{11} q_{43} st -$$
$$\lambda_4\beta a_{12} q_{43} tc_1 - 2\beta^2 a_{11} q_{43} s^2 - 2\beta^2 a_{12} q_{43} sc_1 - 2\beta^2 q_{44} a_{22} c_1^2 -$$
$$2\beta^2 a_{11} q_{43} t^2 - 2\beta^2 q_{44} a_{21} sc_1).$$

给定系统参数值, 则 $h_{ij}(i = 3, 4, j = 1, 2, 3, \dots)$ 可数值计算出, 再将 h_{ij} 代入(16) 得出中心流形截取到二阶的表达式.

3.3 Hopf 分支

在实际问题中, 系统(9) 的系数 a_{01} 联系着参数 μ 及常数 b, 可描述为 $a_{01} = \mu - b$. 当参数 μ 变化, 满足一定条件下可使系统产生 Hopf 型的周期解.

中心流形上的流满足方程

$$\dot{u} = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(u_1, u_2, h_3(u_1, u_2), h_4(u_1, u_2)) \\ g_2(u_1, u_2, h_3(u_1, u_2), h_4(u_1, u_2)) \end{pmatrix}$$

引理 3.2[6] (Hopf 分支存在性) 若系统满足条件

1. 横截条件 $d = \dfrac{\mathrm{d}\alpha(\mu)}{\mathrm{d}\mu} \neq 0$,

2. 判定量 $a \neq 0$, (a 的表达见后面).

则系统存在 Hopf 分支.

由 d 和 a 的符号可进一步判定分支方向及周期轨道的稳定性, 分为四种情形.

情形 1 $d > 0$, $a > 0$, 当 $|\mu - b|$ 充分小, $\mu < b$ 时, 原点附近有不稳定的周期轨道产生;

情形 2 $d > 0$, $a < 0$, 当 $|\mu - b|$ 充分小, $\mu > b$, 原点附近有渐近稳定的周期轨道产生;

情形 3 $d < 0$, $a > 0$, 当 $|\mu - b|$ 充分小, $\mu > b$, 原点附近有不稳定的周期轨道产生;

情形 4 $d < 0$, $a < 0$, 当 $|\mu - b|$ 充分小, $\mu < b$, 原点附近有渐近稳定的周期轨道产生.

注 1　$a < 0$时, 分支周期轨道总是稳定的, 称为超临界(supercritical) 分支• $a > 0$时, 分支周期轨道是不稳定的, 称为亚临界(subcritical) 分支•

下面具体计算 d 与 a•

由 $d = \dfrac{d\alpha(\mu)}{d\mu} = \dfrac{d\left(\dfrac{a_{01}}{2}\right)}{d\mu} = \dfrac{1}{2} > 0$, 故横截条件成立•

判定量 a 由下式确定: (参[6])

$$a = \frac{1}{16}[g_{1u_1u_1u_1} + g_{1u_1u_2u_2} + g_{2u_1u_1u_2} + g_{2u_2u_2u_2}] + \frac{1}{16\beta}[g_{1u_1u_2}(g_{1u_1u_1} + g_{1u_2u_2}) - g_{2u_1u_2}(g_{2u_1u_1} + g_{2u_2u_2}) - g_{1u_1u_1}g_{2u_1u_1} + g_{1u_2u_2}g_{2u_2u_2}],$$

式中各偏导数值取在分支点, 即 $(u_1, u_2, \mu) = (0, 0, b)$• 利用计算机符号软件计算得

$$a = \frac{1}{16}aa + \frac{1}{16\beta}bb•$$

其中

$$aa = (-2a_{12}t(h_{32} + h_{42}) + 3a_{12}s(2h_{31} + 2h_{41}) + a_{12}s(2h_{33} + 2h_{43}))q_{13} + (2a_{12}s(h_{32} + h_{42}) - 3a_{12}t(2h_{33} + 2h_{43} - a_{12}t(2h_{31} + 2h_{41}))q_{23},$$

$$bb = (-2a_{11}ts - a_{12}tc_1)(2a_{11}s^2 + 2a_{12}sc_1 + 2a_{11}t^2)q_{13}^2 + (-(2a_{11}s^2 + 2a_{12}sc_1)^2 + 4a_{11}^2t^4)q_{23}q_{13} + (2a_{11}ts + a_{12}tc_1)(2a_{11}s^2 + 2a_{12}sc_1 + 2a_{11}t^2)q_{23}^2•$$

定理 3.3　系统(11) 在原点处满足 Hopf 横截条件 $d > 0$, 判定量 $a \neq 0$时, 存在 Hopf 分支• 当 $a < 0$ 时存在超临界分支: $\mu > b$, $|\mu - b|$ 充分小时将在原点附近产生渐近稳定的周期轨道; 当 $a > 0$ 时存在亚临界分支; $\mu < b$, $|\mu - b|$ 充分小时将在原点附近产生不稳定的周期轨道•

证明　由横截条件 $d > 0$, 则当 $a > 0$时对应于引理3.2 之情形1; $a < 0$对应于情形2, 故相应的结论成立•

由 Hopf 分支产生的周期轨为小振幅周期解, 周期 $T \approx \dfrac{2\pi}{\beta}$•

系统(11) 在原点附近的周期解对应于原非线性系统(10) 在正平衡点 O_4 附近的周期解, 稳定的周期解意味着两功能菌 x_1、x_2 持续共存, 且在平衡点附近有小的周期性振荡•

4　算　例

对系统(10), 选取如下一组参数值: $a_{01} = 0$, $a_{02} = -10$, $a_1 = 25$, $a_{11} = -0.1$, $a_2 = 16$, $a_{21} = 0.01$, $a_{22} = -0.1$, 则正平衡点坐标为 $m_1 = 250$, $m_2 = 185$, 线性变分方程的特征根为 $\lambda_1 = 5i$, $\lambda_2 = -5i$, $\lambda_3 = -2.45049$, $\lambda_4 = -7.54951$•

当 $a_{12} = 0.005$, Hopf 分支判定量 $a = 0.00009835810574$ 此时得到亚临界分支; 当 $a_{12} = -0.005$, Hopf 分支判定量 $a = -0.00009830777674$, 此时得到超临界分支• 平衡点$(m_1, m_2, 0, 0)$ 将要分支出稳定的周期轨•

[参 考 文 献]

[1]　袁晓凤, 刘世泽, 郭瑞海等. 厌氧消化过程三种群微生物生态数学模型的定性分析[J]. 四川大学

学报(自然科学版), 1997, **34**(3): 373~ 376.

[2] 梅茨基 B.B, 斯捷巴诺夫 B. B. 微分方程定性理论[M]. (王柔怀译) 北京: 科学出版社, 1959, 201~ 230.

[3] 刘世泽. n 维空间奇点的拓扑分类[J]. 数学进展, 1965, **8**(3): 217~ 242.

[4] Hartman P. Ordinary Differential Equation [M]. Baston: Birkhauser, 1982, 228~ 250.

[5] 李继彬, 冯贝叶. 稳定性、分支与混沌[M]. 昆明: 云南科技出版社, 1995, 85~ 127.

[6] Wiggins S. Introduction to Applied Nonlinear Dynamical System and Chaos [M]. New York: Springer_verlag, 1990, 193~ 284.

[7] Liu Zhenrong, Jing Zhujun. Qualitative analysis for a third_order differential equation in a model of chemical systems[J]. Syst Scie Math Scie, 1992, **5**(4): 299~ 309.

Hopf Bifurcation for a Ecological Mathematical Model on Microbe Populations

Guo Ruihai, Yuan Xiaofeng

(1. Department of Mathematics, Southwest Nationalities College, Chengdu 610041, P R China;

2. Center for Mathematical Sciences, CICA, Academia Sinica, Chengdu 610041, P R China)

Abstract: The ecological Model of a class of the two microbe populations with second_order growth rate is studied. The methods of qualitative theory of ordinary differential equations are used in the four_dimension phase space. The qualitative property and stability of equilibrium points are analysed. The conditions under which the positive equilibrium point exists and becomes and O^+ attractor are obtained. The problems on Hopf bifurcation are discussed in detail when small perturbation occurs.

Key words: mathematical model; qualitative theory; equilibrium points, Hopf bifurcation