应用数学和力学, 第 21 卷 第 7 期(2000 年 7 月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2000) 07_0746_09

Newtonian_Riemannian 时空中的动力学( )

张荣业

(中国科学院 数学研究所, 北京 100080)

(钱伟长推荐)

摘要: 根据现代微分几何的理论, 力学原理及现代微积分把 Newtonian_Galilean 时空中的动力学推广到 Newtonian_Riemannian 时空中, 建立 N_R 时空中的动力学, 分几个部分, ( ) 是其中之一, 余后续

关 键 词: Ricmannian 流形; 连络; 绝对微分; Lie 导数; 共同运动时间导数; 纤维丛; 对偶对

中图分类号: O313 1 文献标识码: A

引 言

时间和空间是物质存在的基本形式 世界万物都在时空中发生存在运动发展变化 物质世界的一切过程都是运动发展变化的过程 为了对在时空中发生存在运动发展变化的对象的研究 人们在物理中及数学中建立各种空间, 尤是时空, 如 Aristotelian 时空, Newtonian_Galilean 时空, Minkowiskian 时空, Schwarzchild 时空, Robertson_walhor 时空, Einstein 时空, Cosmological 时空等 这些时空都是人们生活的时空的反映, 抽象, 概括和推广, 是数学家和物理学家头脑中想象的时空 这些时空的提出一方面成功地解决了物理力学中的问题, 一方面促进数学的研究和发展 Euclidean 几何, Riemannian 几何, 纤维丛, 微积分和微分方程 泛函分析的建立和发展都是如此 见[1], [2], [3], [4], [5]

为了研究时间相关的力学规律和非平稳的物理过程我们从另一方面建立 Newtonian_Riemanian 时空, 并从中考虑相应的力学问题

1 几何结构及基本运算

设具有度量 g 和联络 D 的 n 维 Riemain 流形 M^n 是 n 个自由度的力学系统 S 的位形空间, 则流形 $N = R^1 \quad M^n$ 是 S 的位形时空, 称时空流形, 我们称之为 Newtonian_Riemannian 时空, R^1 代表 Newton 观点的时间

时间与空间是不分开的, 不重迭的, 合并起来成为一个统一的 时空连续体 $n = 3$, $M^3 = R^3$, $R^4 = R^1 \quad R^3$ 是 Newtonian_Galilean 时空, 是 4 维 Euclidean 空间 在相对论中, $R^4_1 = R^1 \quad R^3$ 是相对论时空, 是惯性指数 1 的伪 Euclid 空间, 也称 Minkowski 空间 它们是 4 维平坦

收稿日期: 1998_09_06; 修订日期: 1999_10_28
作者简介: 张荣业(1938~) , 男, 研究员, 研究方向: 微分几何、微分方程.

的Riemannian或伪Riemannian流形　这里 $N = R^1 \quad M^n$ 一般是弯曲的 $n \quad 1$ 维Riemannian流形　另方面 N 是以 R^1 为基本空间的纤维丛: $R^1 \quad M^n \quad R^1, (t, x) \quad t \quad t \quad R^1, \quad ^{-1}(t) = M_t^n$ 是在 t 的纤维　n 维Riemannian流形　$(I \quad U, id \quad = \quad)$ 是 N 的局部坐标系　$(t, x) \quad I \quad U, \quad : (t, x) \mapsto (t, x^1, \quad , x^n) \quad I \quad (U) \quad R^{n+1}$　在此局部坐标系下, N 的度量 g, 称时空度量　为

$$g = \mathrm{d}t \quad \mathrm{d}t + g_{ik}\mathrm{d}x^i \quad \mathrm{d}x^k \qquad (\text{在 } I \quad U \text{ 上}), \tag{1}$$

其中　是张量积, $g_0 = \mathrm{d}t \quad \mathrm{d}t$, $g = g_{ik}\mathrm{d}x^1 \quad \mathrm{d}x^k$ 是 R^1、M^n 的度量　T_tR^1 是 R^1 在 t 的切空间, T_xM 是 M^n 在 $x \quad M^n$ 的切空间, 则 N 在 $(t, x) \quad N$ 的切空间是 $T_{(t,x)}N$ 且

$$T_{(t,x)}N \quad T_tR^1 \quad T_xM^n \tag{2}$$

类似, 余切空间 $T^*_{(t,x)}N \quad T^*_t R^1 \quad T^*_x M^n$ (3)

且 $$TN = {}_{(t,x)\ N} T_{(t,x)}N, \quad T^*N = {}_{(t,x)\ N} T^*_{(t,x)}N, \tag{4}$$

分别是 N 的切丛及余切丛,　是直接和

$: (t, x(t))$ 是质点或流体元素在 N 中运动的曲线, 称世界线　切向量　$: (1, (x(t))$ 在局部坐标系 $(I \quad U, \quad)$ 下, $: (t, x(t)) = (t, x^1(t), \quad , x^n(t))$, $: (1, x(t)) = (1, x^1(t), \quad , x^n(t))$　$\left\{ / \ t, \ / \ x^i \right\}_{j=1}^n$ 及 $\left\{ \mathrm{d}t, \mathrm{d}x^i \right\}_{j=1}^n$ 分别是 TN 及 T^*N 在 $I \quad U$ 上的标架场, 则

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{v} \quad \mathscr{X}(N) \quad \boldsymbol{v} = \ / \ t + v = \ / \ t + v^i \ / \ x^i, \\ &\mathscr{F}^1(N) \quad = a_0\mathrm{d}t + a_i\mathrm{d}x^i = a_0\mathrm{d}t + \qquad (\text{在 } I \quad U \text{ 上}) \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

质点在 N 中运动的速度是　$\boldsymbol{v} = \ / \ t + v^i \ / \ x^i$,

其中 $x^i = v^i(t, x)$　对 $\boldsymbol{v} = \ / \ t + v$, $\boldsymbol{w} = \ / \ t + w \quad \mathscr{X}(N)$,

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = g_0(\ / \ t, \ / \ t) + g(v, w) = 1 + g_{ik}v^iw^k, \tag{6}$$

由 $$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v}^b, \boldsymbol{w} \ , \tag{7}$$

定义丛同构: $\mathrm{b}: TN \quad T^*N \qquad \# = \mathrm{b}^{-1}: T^*N \quad TN$, (8)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{}{t} \mapsto \frac{}{t}^{\mathrm{b}} = \mathrm{d}t, \quad \mathrm{d}t \mapsto \mathrm{d}t^{\#} = \frac{}{t}, \\ &\frac{}{x^i} \mapsto \frac{}{x^i}^{\mathrm{b}} = g_{ik}\mathrm{d}x^k, \quad \mathrm{d}x^i \mapsto \mathrm{d}x^{i\#} = g^{ik}\frac{}{x^k} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

这样, 对 $\boldsymbol{v} = \ / \ t + v^i \ / \ x^i$,　$\boldsymbol{w} = a_0\mathrm{d}t + a_i\mathrm{d}x^i$,

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{v}^{\mathrm{b}} = \mathrm{d}t + g_{ik}v^i\mathrm{d}x^k = \mathrm{d}t + p_k\mathrm{d}x^k, \\ &{}^{\#} = a_0 \ / \ t + g^{ik}a_i \ / \ x^k = a_0 \ / \ t + v^k \ / \ x^k, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

b 决定映射 $\mathscr{L}: TN \quad T^*N \qquad \mathscr{X}(N) \mapsto \mathscr{F}^1(N)$

$$(t, x, 1, x) \mapsto (t, x, 1, p), \boldsymbol{v} \mapsto \mathscr{L}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}^{\mathrm{b}} \quad \mathscr{F}^1(N),$$

上述 $\mathscr{X}(N)$, $\mathscr{F}^l(N)$, $l = 0, 1, \quad , n$, 分别是 N 上的向量场及形式场的空间　$p_k = g_{ik}v^i$ 是纤维坐标变换

设 D 是 M^n 的连络 D 决定的绝对微分算子, 则 $\boldsymbol{D} = \quad + D$ 是 N 上的绝对微分算子,　是对时间的微分　$\boldsymbol{D}$ 对标量场, 或0_形式的作用如同 $\mathbf{d} = \quad + \mathrm{d}$, 是普通微分算子, d是对空间变量的微分　于是对 $\boldsymbol{v} = \ / \ t + v^i(t, x) \ / \ x^i$,

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\boldsymbol{v} = \mathbf{D}(\ / \ t + v) = \mathbf{D}v = (\quad + D)V = \\ (\ v^i + \mathrm{d}v^i) \ / \ x^i + v^iD \ / \ x^i = \mathbf{d}v^i \ / \ x^i + w^l_i v^i \ / \ x^l = \end{aligned}$$

$$(\mathbf{d}v^i + w^i_l v^l) / x^i = (\mathbf{d}v^i + \ {}^i_{ls}v^l \mathrm{d}x^s) / x^i, \tag{11}$$

$$\frac{\mathbf{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathbf{d}v^i}{\mathrm{d}t} + \ {}^i_{ls}v^l \frac{\mathrm{d}x^s}{\mathrm{d}t}\right) / x^i = \left(\frac{v^i}{t} + \frac{v^i}{x^s}\frac{\mathrm{d}x^s}{\mathrm{d}t} + \ {}^i_{ls}v^l \frac{\mathrm{d}x^s}{\mathrm{d}t}\right) / x^i, \tag{12}$$

其中, $w^l_j = \ {}^l_{js}\mathrm{d}x^s$ (11) 是向量场 $\boldsymbol{v}$ 沿世界线$(t, x^s(t))$ 的切线方向$(1, x^s(t))$ 即 $\boldsymbol{x} = / t + \frac{\mathrm{d}x^s}{\mathrm{d}t} / x^s$ 关于时间t 的绝对导数 而$\frac{\mathbf{d}v^i}{\mathrm{d}t} = \frac{v^i}{t} + \frac{v^i}{x^s}\frac{\mathrm{d}x^s}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{}{t} + \mathrm{L}_x\right)v^i = \mathrm{L}_{/ t + x}v^i = \mathrm{L}_{\boldsymbol{x}}v^j$ $\mathrm{L}_{\boldsymbol{x}} = \mathrm{L}_{/ x} + x = / t + \mathrm{L}_x$ 称为共同运动的时间导数算子(the comoving time derivative operator) L_x 是关于 $\boldsymbol{x}$ 的Lie 导数 如是, 亦称$\mathbf{D} = + \mathrm{D}$ 为共同运动绝对微分算子, $\frac{\mathbf{D}}{\mathrm{d}t} = \frac{}{t} + \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}$ 称共同运动绝对时间导数算子, 对标量场或0_形式场的作用如同$\frac{\mathbf{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{}{t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$

光滑向量场 $\boldsymbol{v} = \frac{}{t} + v^i \frac{}{x^i} \quad \mathscr{X}^r(N)$

的积分曲线是方程组

$$\left.\begin{aligned} x^j(t) &= v^i(t, x), \\ t &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

在初始条件 $(t_0, x_0) \quad I \quad U$ 下的解, 其中 $x_0 = x(t_0)$, 并记为

$$_s(t_0, x_0) = (t \quad _s(t_0, x_0), x \quad _s(t_0, x_0)) = (t_0 + s, x \quad _s(t_0, x_0)), \tag{14}$$

$_s$ 是$\boldsymbol{v}$ 的流(a flow), $\left\{ \ _s \mid s \quad I \quad R^1 \right\}$ 是单参数微分同胚变换群 而且, 显然,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \ _s(t_0, x_0) = \frac{}{t} + \frac{\mathrm{d}x^1 \quad _s(t_0, x_0)}{\mathrm{d}t} / x^j = / t + v^j \quad _s(t_0, x_0) / x^i = \boldsymbol{v} \quad _s(t_0, x_0), \tag{15}$$

特别 $s = 0$ 时, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \ _s(t_0, x_0) \mid_{s=0} = \boldsymbol{v}(t_0, x_0)$ 这样向量场 $\boldsymbol{v}$ 沿它的积分曲线关于时间t 的绝对导数是

$$\frac{\mathbf{D}\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{dt}} = \left(\frac{\mathbf{d}v^i}{dt} + \ {}^i_{ls}v^l v^s\right)\frac{}{x^i} = \left(\frac{v^i}{t} + v^s \frac{v^i}{x^s} + \ {}^j_{ls}v^l v^s\right)\frac{}{x^i} \tag{16}$$

即(12) 中 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}$ 的情形 本文中主要用此

下面给出有关的一些基本运算

命题 1 1 对$\boldsymbol{v} = / t + v = / t + v^j / x^j \quad \mathscr{X}^k(N)$,

$$\boldsymbol{v}^b = \frac{}{x}^{\mathrm{b}} + v^{\mathrm{b}} = \mathrm{d}t + g_{ik}v^j \mathrm{d}x^k \quad \mathscr{F}^1(N)$$

$$1 \quad \mathrm{L}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{v}^{\mathrm{b}} = \mathrm{L}_{\boldsymbol{v}}v^{\mathrm{b}}; \tag{17}$$

$$2 \quad \mathrm{L}_{\boldsymbol{v}}v^{\mathrm{b}} = \mathrm{L}_{/ t + v}v^{\mathrm{b}} = (/ t + \mathrm{L}_v)v^{\mathrm{b}}; \tag{18}$$

$$3 \quad \mathrm{L}_{\boldsymbol{v}}v^{\mathrm{b}} - \frac{1}{2}\mathrm{d} \ v^{\mathrm{b}}, v \ = \left(\frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{d}t}\right)^{\mathrm{b}}; \tag{19}$$

$$\left(\frac{\boldsymbol{D}v}{dt}\right)^{\mathrm{b}} = \left(\frac{}{t} + \mathrm{L}_v\right)v^{\mathrm{b}} - \frac{1}{2}\mathrm{d} \ v^{\mathrm{b}}, v \ ; \tag{20}$$

$$4 \quad \mathrm{L}_v \ v^{\mathrm{b}}, v \ = \ \mathrm{d} \ v^{\mathrm{b}}, v \ , v \ ; \tag{21}$$

$$5\quad \mathrm{L}_v|v|^2 = \langle L_v v^{\mathrm{b}}, v\rangle;\quad |v|^2 = 2\left\langle\left(\frac{v}{t}\right)^{\mathrm{b}}, v\right\rangle, \tag{22}$$

$$6\quad \left\langle\left(\frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{d}t}\right)^{\mathrm{b}}, v\right\rangle = \langle L_v v^{\mathrm{b}}, v\rangle - \frac{1}{2}\langle \mathrm{d}\langle v^{\mathrm{b}}, v\rangle, v\rangle = \frac{1}{2}\langle \mathrm{L}_v v^{\mathrm{b}}, v\rangle, \tag{23}$$

$$\mathrm{L}_{\boldsymbol{v}}|v|^2 = \langle \mathrm{L}_{/t+v}\, v^{\mathrm{b}}, v\rangle = 2\left\langle\left(\frac{\mathbf{D}v}{\mathrm{d}t}\right)^{\mathrm{b}}, v\right\rangle =$$
$$2\left\langle\left(\frac{}{t} + \mathrm{L}_v\right)v^{\mathrm{b}} - \frac{1}{2}\langle v^{\mathrm{b}}, v\rangle, v\right\rangle \tag{24}$$

证明 利用 Lie 导数及上述各种算子的定义, 可通过计算, 直接得到 1 显然, 只要注意 $L_{/t}\mathrm{d}t = 0$ 2 亦显然 对于3 按定义, 其中 , 是对偶对,

$$\mathrm{L}_v v^{\mathrm{b}} = (\mathrm{L}_v g_{ik})v^i\mathrm{d}x^k + g_{ik}(\mathrm{L}_v v^i\mathrm{d}x^k + v^i\mathrm{L}_v\mathrm{d}x^k) =$$
$$\left(v^s\frac{g_{ik}}{x^s}v^i + g_{ik}v^s\frac{v^i}{x^s} + g_{il}v^i\frac{v^l}{x^k}\right)\mathrm{d}x^k,$$

$$\mathrm{d}\langle v^{\mathrm{b}}, v\rangle = \mathrm{d}(g_{ik}v^iv^k) = \left(\frac{g_{ik}}{x^s}v^iv^k + g_{ik}\left(\frac{v^i}{x^s}v^k + v^i\frac{v^k}{x^s}\right)\right)\mathrm{d}x^s,$$

$$\mathrm{L}_v v^b - \frac{1}{2}\mathrm{d}\langle v^b, v\rangle = \left(\frac{g_{ik}}{x^s}v^sv^i + g_{ik}\frac{\mathrm{d}v^i}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}x^k + \frac{1}{2}\mathrm{d}g_{ik}v^iv^k, \tag{25}$$

其中, 因 $g_{ik} = g_{ki}$, $g_{ik}v^i\mathrm{d}v^k - g_{ik}v^k\mathrm{d}v^i = (g_{ik} - g_{ki})v^i\mathrm{d}v^k = 0$

又
$$\left(\frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{d}t}\right)^{\mathrm{b}} = g_{is}\left(\frac{\mathrm{d}v^i}{\mathrm{d}t} + {}^{i}_{lr}v^lv^r\right)\mathrm{d}x^s =$$
$$g_{is}\frac{\mathrm{d}v^i}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}x^s + g_{is}\left(\frac{1}{2}g^{is}\left(\frac{g_{sr}}{x^k} + \frac{g_{ks}}{x^r} - \frac{g_{kr}}{x^s}\right)v^kv^r\right)\mathrm{d}x^s =$$
$$\left(g_{is}\frac{\mathrm{d}v^i}{\mathrm{d}t} + \frac{g_{ks}}{x^r}v^rv^k\right)\mathrm{d}x^s - \frac{1}{2}\mathrm{d}g_{kr}v^kv^r \tag{26}$$

其中, 注意到 $g_{sr} = g_{rs}$, $\frac{g_{sr}}{x^k}v^kv^r - \frac{g_{ks}}{x^r}v^rv^k = \left(\frac{g_{sr}}{x^k} - \frac{g_{rs}}{x^k}\right)v^rv^k = 0$ 比较(25), (26) 即知(19) 余者相继得到, 不详述

2 Newtonian_Riemannian 时空中的 Newtonian 力学

定理2 1 (Newton 定律), 具有不变质量 m 的质点在力场 $F(t, x)$ $\mathscr{F}^1(N)$ 作用下在 $N = R^1$ M^n 中运动的轨线是世界线 $:(t, x(t))$, 速度为 $\boldsymbol{v}(t, x) = /t + v(t, x)$, 加速度为 $\frac{\mathbf{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathbf{D}v}{\mathrm{d}t}$ 运动方程是

$$m\left(\frac{\mathbf{D}v}{\mathrm{d}t}\right)^{\mathrm{b}} = F, \tag{27}$$

即
$$m\left(\frac{}{t} + \mathrm{L}_v\right)v^{\mathrm{b}} - \frac{m}{2}\mathrm{d}\langle v^b, v\rangle = F, \tag{27)c}$$

在局部坐标系 $(I @ U, U)$ 下, $F = F_k(t, x)\mathrm{d}x^k$, 速度 $\boldsymbol{v} = 5/5t + v^i(t, x)5/5x^i$, 加速度 $\frac{\mathbf{D}v}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{v^i}{t} + \frac{5v^i}{5x^s}v^s + \#^i_{ls}v^lv^s\right)\frac{5}{5x^i}$, (27) 可写成

$$mg_{ik}\left(\frac{5v^i}{5t} + \frac{5v^i}{5x^s}v^s + \#^i_{ls}v^lv^s\right) = F_k, \tag{28}$$

其中 $\#^i_{ls}(i, l, s = 1, 2, , , n)$ 是连络系数, $M^n = R^n$ 时, 或 M^n 是局部平坦的, 则 $\#^i_{ls} = 0$, $N =$

R^1 @ R^n#

(27) 表明, P t I R^1, 在相应的纤维 $P^{-1}(t) = M_t^n$ 上成立#

设 $m\boldsymbol{v}$ 是质点在N 中运动的动量, 则

$$\frac{\mathbf{D}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}\frac{\mathbf{d}m}{\mathrm{d}t} + m\frac{\mathbf{D}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathbf{d}m}{\mathrm{d}t}5/5t + \frac{\mathbf{D}(mv)}{\mathrm{d}t}, \tag{29}$$

$$\left(\frac{\mathbf{D}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t}\right)^{\mathrm{b}} = \boldsymbol{v}^{\mathrm{b}}\frac{\mathbf{d}m}{\mathrm{d}t} + m\left(\frac{\mathbf{D}v}{\mathrm{d}t}\right)^{\mathrm{b}} = \frac{\mathbf{d}m}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t + \left(\frac{\mathbf{D}(mv)}{\mathrm{d}t}\right)^{\mathrm{b}}, \tag{30}$$

其中 $\frac{\mathbf{d}m}{\mathrm{d}t} = \frac{5m}{5t} + v^s\frac{5m}{5x^s} = \left(\frac{5}{5t} + L_v\right)m = L_{\boldsymbol{v}}m$#

定理 212(动量定理)　具有质量 m 的质点在N 中运动时, 它的动量的变化律等于外作用力 $F(t,x)$ I $\mathscr{F}^1(N)$#

$$\left(\frac{\mathbf{D}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t}\right)^{\mathrm{b}} = F, \tag{31}$$

即

$$\frac{\mathbf{d}m}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t + \left(\frac{\mathbf{D}(mv)}{\mathrm{d}t}\right)^{b} = F\# \tag{32}$$

在坐标系 $(I @ U, U)$ 下, $F = F_0\mathrm{d}t + F_k\mathrm{d}x^k$, 由(32)

$$\left(\frac{\mathbf{D}(mv)}{\mathrm{d}t}\right)^{\mathrm{b}} = F_k\mathrm{d}x^k, \tag{33}$$

$$\frac{\mathbf{d}m}{\mathrm{d}t} = F_0\# \tag{34}$$

(33) 是 $v^{\mathrm{b}}\frac{\mathbf{d}m}{\mathrm{d}t} + m\left(\frac{\mathbf{D}v}{dt}\right)^{\mathrm{b}} = F_k\mathrm{d}x^k,$ (35)

与(27) 比较可知, 动量定理成立的情况下, Newton 定律(27) 右边的作用力应是 $F_k\mathrm{d}x^k + v^{\mathrm{b}}\frac{\mathbf{d}m}{\mathrm{d}t}$#　反之(27) 右边的作用力为 F_kdx^k, 则(36) 右边的作用力应是 $F_k\mathrm{d}x^k + (v^b + \mathrm{d}t)\frac{\mathbf{d}m}{\mathrm{d}t}$# 只有 $m =$ const 或$\left(\frac{5}{5t} + \mathrm{L}_v\right)m = \frac{\mathbf{d}m}{\mathrm{d}t} = 0$ 时二者的外作用力才一致#　展开(35) 可得到

$$mg_{ik}\left(\frac{5v^i}{5t} + \frac{5v^i}{5x^s}v^s + \#^i_{ls}v^lv^s\right) = F_k - \frac{\mathbf{d}m}{\mathrm{d}t}g_{ik}v^i\# \tag{36}$$

$m =$ const 或$\frac{\mathbf{d}m}{\mathrm{d}t}m = 0$ 则(36) 变为(28)#　若运动是平稳的则$\frac{5v^i}{5t} = 0, j = 1, 2, , , n$#　若 $M^n = R^n$, 或局部平坦, 则 $\#^i_{ls} = 0$#　(34) 表明 F_0 等于质量 m 的变化率#　$m =$ const, 或$\frac{\mathbf{d}}{\mathrm{d}t}m = 0$ 则 F_0 消失#　$\frac{\mathbf{d}m}{\mathrm{d}t} > 0$, 质量增加, 则加速度减小; $\frac{\mathbf{d}m}{\mathrm{d}t} < 0$, 质量减少, 则加速度增大#　当$\frac{\mathbf{d}m}{\mathrm{d}t}v^i = g^{ki}F_k$ 时, 质点按此方程

$$\frac{5v^i}{5t} + \frac{5v^i}{5x^s}v^s + \#^i_{ls}v^lv^s = 0 \tag{37}$$

运动, 若此后是平稳的则 $\frac{5v^i}{5t} = 0$, 沿测地线运动#

$T = m3v^{\mathrm{b}}, v4/2 = m\frac{|v|^2}{2}$ 是质点在 M^n 上运动的动能, 则

$$\frac{\mathbf{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{3v^{\mathrm{b}}, v4}{2}\frac{\mathbf{d}m}{\mathrm{d}t} + m\frac{\mathbf{d}}{\mathrm{d}t}3v^b, v4\Big\backslash 2 =$$

$$v^{\mathrm{b}}\frac{\mathbf{d}m}{\mathrm{d}t}+m\left(\frac{\mathbf{D}v}{\mathrm{d}t}\right)^{\mathrm{b}}-\frac{v^{\mathrm{b}}}{2}\frac{\mathbf{d}m}{\mathrm{d}t},v4=$$
$$3\left(\frac{\mathbf{D}(mv)}{\mathrm{d}t}\right)^{\mathrm{b}}-\frac{1}{2}v^{\mathrm{b}}\frac{\mathbf{d}m}{\mathrm{d}t},v4, \tag{38}$$

$$\boldsymbol{T}=\frac{m}{2}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})=\frac{m}{2}(1+(v^{\mathrm{b}},v)) \tag{39}$$

为质点在时空 N 中运动的动能, 则

$$\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t}=\frac{(1+3v^{\mathrm{b}},v4)}{2}\frac{\mathbf{d}m}{\mathrm{d}t}+\frac{m}{2}\frac{\mathbf{d}3v^{b},v4}{\mathrm{d}t}=$$
$$3\left(\frac{\mathbf{D}(mv)}{\mathrm{d}t}\right)^{\mathrm{b}},v4+\frac{1}{2}(1-3v^{\mathrm{b}},v4)\frac{\mathbf{d}m}{\mathrm{d}t}\# \tag{40}$$

由(38), (40) 可见 $m=\mathrm{const}$ 或 $\frac{\mathbf{d}m}{\mathrm{d}t}=0$ 时, $\frac{\mathbf{d}T}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t}\#$

由(31) ~ (34), 及(38), (40), 动能的变化分别是

$$T_1-T_0=Q_C F_k(t,x)\,\mathrm{d}x^k-\frac{1}{2Q}{}_{t_0}^{t_1}|v|^2F_0(t,x)\,\mathrm{d}t, \tag{41}$$

$$\boldsymbol{T}_1-\boldsymbol{T}_0=Q_C F_k(t,x)\,\mathrm{d}x^k+\frac{1}{2Q}{}_{t_0}^{t_1}(1-|v|^2)F_0\mathrm{d}t, \tag{42}$$

其中 $T_1=T(t_1)$, $T_0=T(t_0)$, 等, C 是质点在 M^n 上运动的轨线,

定理 2.13　质点在外力 $F=F_0\mathrm{d}t+F_k\mathrm{d}x^k$ 作用下运动时, 其动能的变化为(41) 及(42)#　$m=\mathrm{const}$ 或 $\frac{\mathbf{d}m}{\mathrm{d}t}=0$, 则 $F_0=0\#$

若质点在势场 $u=U(t,x)$ 作用下运动, 则 $F=-\mathrm{d}U=-\left(\frac{5U}{5t}\mathrm{d}t+\frac{5U}{5x^k}\mathrm{d}x^k\right)$, 上述(33) ~ (35) 及(41), (42) 中之 $F_0=-\frac{5U}{5t}$, $F_k=-\frac{5U}{5x^k}\#$　总能量 $E=T+U$ 及 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{T}+U$, 那么

$$\frac{\mathbf{d}E}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathbf{d}}{\mathrm{d}t}T+\frac{\mathbf{d}}{\mathrm{d}t}U=3\left(\frac{\mathbf{D}(mv)}{\mathrm{d}t}\right)^{b},v4+L_vU-\frac{1}{2}|v|^2\frac{\mathbf{d}m}{\mathrm{d}t}=$$
$$-v^i\frac{5U}{5x^i}-\frac{1}{2}|v|^2\frac{\mathbf{d}m}{dt}+\frac{5U}{5t}+v^i\frac{5U}{5x^i}=$$
$$\left(1+\frac{1}{2}|v|^2\right)\frac{5U}{5t},\quad \frac{\mathbf{d}m}{\mathrm{d}t}=F_0=-\frac{5U}{5t}, \tag{43}$$

$$\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{E}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathbf{d}U}{\mathrm{d}t}=3\left(\frac{\mathbf{D}(mv)}{\mathrm{d}t}\right)^{b},v4+$$
$$\frac{1}{2}(1-|v|^2)\frac{\mathbf{d}m}{\mathrm{d}t}+L_vU=\frac{1}{2}(1+|v|^2)\frac{5U}{5t}\# \tag{44}$$

定理 2.14　具有可变质量的质点在非平稳的势场 $U(t,x)$ 作用下运动时, 总能量不守恒#　因为 $\frac{5U}{5t}\ X\ 0$, 则 $\frac{\mathbf{d}E}{\mathrm{d}t}\ X\ 0$, $\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{E}}{\mathrm{d}t}\ X\ 0\#$

3　应　　用

作为例子, 我们考虑此理论在流体力学中的应用#　设想一理想流体在 M^n (通常 $n=3$) 中流动, 从中取出一无穷小体积元素为 L 其表面为 S 的光滑曲面))) $n-1$ 维光滑子流形, 密度为 $Q(t,x)$ 的流体元素 QL#　此流体元素, 在时空 $N=R^1 @ M^n$ 中流动, 于 N 中划出一曲线, 称世界线(the world_line) ($n=3$, 且 $M^3=R^3$ 时 $N=R^1 @ R^3$ 是Newtonian_Galilean 时空)#　流体

其余部分在 S 的单位面积上的作用力是压力 p, 作用于单位质量的外力或物体力(the body forces) 是 f# 此流体元素的质量是 $m = QL\#$ 在坐标系$(I @ U, U)$ 下体积元素

$$L = \sqrt{| g |}\, dx^1 \; C \; , \; C \; dx^n,$$

$| g | = \det(g_{ik})$ 是Riemann 度量 g_{ik} 的矩阵的行列式# 流元素的速度 $\boldsymbol{v} = 5/5t + v = 5/5t + v^i 5/5x^i\#$ 由动量定理 212, 流体元素的动量 $m\boldsymbol{v}$ 的变化率等于作用力 $F = Q f^b L - \frac{1}{\sqrt{g}} d(\sqrt{g} p) L$, 即满足方程

$$v^b \frac{\mathbf{d}(QL)}{dt} + QL\left(\frac{\mathbf{D}v}{dt}\right)^b = Q f^b L - \frac{1}{\sqrt{| g |}} d(\sqrt{| g |}\, p) L, \tag{45}$$

其中 d 是微分算子, 物体力也称体积力(the volume force), 压力越过体积元素的表面 S 指向元素内部, 故取负号# $\frac{1}{\sqrt{| g |}} d(\sqrt{| g |}\, p)$ 由 Riemann 流形上的散度定理(Gauss)

$$Q_{5D} V < L = Q_D d(v < L) = Q_D L_v L \tag{46}$$

得到, D 中 M^n 中的 n_维区域, L_v 是关于 v 的 Lie 导数, = 是向量场与形式场的内积, d 是外微分算子# 而(46) 由 M^n 上的 Stokes 定理

$$Q_{5D} X = Q_D dX \tag{47}$$

得到# 流体运动中质量不增加也不湮灭# 故 $\frac{\mathbf{d}m}{dt} = 0$,

$$0 = \frac{\mathbf{d}}{dt} m = \frac{\mathbf{d}}{dt}(QL) = L_{\boldsymbol{v}}(QL) = \left(\frac{5}{5t} + L_v\right)(QL) =$$
$$\left(\frac{5}{5t} + L_v\right) Q \# \; L + Q \frac{5(\sqrt{| g |}\, v^i)}{5x^i} 8 =$$
$$\left[\left(\frac{5}{5t} + L_v\right) Q + \frac{Q}{\sqrt{| g |}} \frac{5\sqrt{| g |}\, v^i)}{5x^i}\right] L,$$

$8 = dx^1 \; C \; , \; C \; dx^n$, 于是得到连续方程

$$\frac{\mathbf{d}}{dt} Q + Q \operatorname{div} v = 0, \tag{48}$$

其中 $$\frac{\mathbf{d}Q}{dt} = \left(\frac{5}{5t} + L_v\right) Q = \frac{5Q}{5t} + v^k \frac{5Q}{5x^k},$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \frac{1}{\sqrt{| g |}} \frac{5(\sqrt{| g |}\, v^i)}{5x^i} \# \tag{49}$$

(49) 是向量场 $\boldsymbol{v}$ 关于 L 的度量散度, $M^n = R^n$, 则 $g_{ik} = D_{ik}$, $| g | = 1$, $L = 8\#$ 顺便指出

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = -\frac{1}{Q} \frac{\mathbf{d}Q}{dt} \# \tag{50}$$

速度场 $\boldsymbol{v}$ 的散度给出流体元素的密度 Q 的相对改变量# 若密度不变则 $\frac{\mathbf{d}Q}{dt} = 0$, $\operatorname{div} v = 0$, 流体是不可压缩的# v 的流保持体积不变# 若同时

$$v = dW^{\#} = g^{ki} \frac{5W}{5x^k} 5/5x^i, \tag{51}$$

即 v 是标量场 W 的梯度, W 称速度势, 则由(49)

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \frac{1}{\sqrt{| g |}} \frac{5}{5x^i}\left(\sqrt{| g |}\, g^{ki} \frac{5W}{5x^k}\right), \tag{52}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{|g|}\, g^{ki} \frac{\partial}{\partial x^k}\right), \tag{53}$$

称为可定向Riemann 流形上的 Laplace_Boltrami 算子。$M^n = R^n$ 时就是 Lapace 算子。

$$\mathrm{div} v = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{|g|}\, g^{ki}) \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} + \sqrt{|g|}\, g^{ki}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^k \partial x^i} = 0。 \tag{54}$$

即, 产生不可压缩流的速度势 φ 应满足 L_B 方程(54)。$M^n = R^n$ 时,

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i} = 0, \tag{55}$$

是 Laplace 方程。由(45), $\frac{d}{dt}(\rho\Omega) = 0$ 时, 有

$$\left(\frac{\mathbf{D}v}{dt}\right)^b = f^b - \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{d(\sqrt{|g|}\,p)}{\rho}, \tag{56}$$

这个 Newton 方程, 就是流体力学中的 Ealer 方程。

在 $(I \times U, U)$ 下展开之, 为

$$g_{ik}\left(\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^s\frac{\partial v^i}{\partial x^s} + \Gamma^i_{ls} v^l v^s\right) = g_{il} f_i - \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\sqrt{|g|}\,p)}{\partial x^k}。 \tag{57}$$

$M^n = R^n$ 时, $\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^s\frac{\partial v^i}{\partial x^s} = f_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x^i}$。 (58)

(56) 还可写成

$$\frac{\partial v^b}{\partial t} + L_v v^b - \frac{1}{2}d\langle v^b, v\rangle = f^b - \frac{1}{\rho}\frac{1}{\sqrt{|g|}}d(\sqrt{|g|}\,p)。 \tag{59}$$

上述结果对流体力学得到, 也适用于气体动力学, 后者是可压缩的流体。f 已知, 则未知量是 v, ρ, p, 即 $n+2$ 个未知标量, 而(48) 及(56) 只有 $n+1$ 个方程。理想流体力学的基本问题是解初值_边值问题。另一方程可从某些情况中得到。比如流体的动能作为运动的常量。那么流体元素的动能 $T = \frac{\rho|v|^2}{2}\Omega = \mathrm{const}$。由(38) 及 $L_v(\rho\Omega) = 0$, (45) 在边界条件 $v \cdot \Omega = 0$ 下, 可得到

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \rho g_{jk} v^k f^j + \frac{p}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial(\sqrt{|g|}\,v^i)}{\partial x^i} = 0, \tag{60}$$

$M^n = R^n$ 时, 上式中 $g_{ik} = \delta_{ik}$, $|g| = 1$。

这样, 对流体力学, 我们在Riemann 流形上得到更广泛深刻的结果, 它包括了 $M^n = R^n$ 中的情形。本文不是研究流体力学, 故不再继续下去。

这样, 我们根据几何理论、力学原理及现代微积分把 Newtonian_Galilean 时空中的动力学推广到Newtanian_Riemannian 时空。余者后续。

当运动系统不明显依赖时间时, 其位形空间是 Riemann 空间(流形), 得到 Riemann 流形上的动力学。

这样, 系统的力学作为点在构形空间, Riemann 流形上的力学或作为点或元素在Newtonian_Riemannian 时空中的力学出现。

这样, Riemann 几何用作力学规律和物理过程的抽象几何的描述方法, 它以抽象的形式反映所论的现象的过程和现实的规律。

[参 考 文 献]

[1] William L Burke. Applied Differential Geometry[M]. Cambridge University Press, 1985.

[2] Bernard F Schutz. Geometrical Methods of Mathematical Physics[M]. Cambridge University Press, 1980.

[3] Curtis W D, Miller F R. Differential Manifolds and Theoretical Physics[M]. Academic Press, Inc, 1985.

[4] Von C, Westenholz. Differential Forms in Mathematical Physics[M]. North_Holland Publishing Company, 1978.

[5] Ralph Abraham, Marsden J E, Tudor Ratiu. Manifolds Tensor Analysis and Applications[M]. Addison_wesley Publishing Company, 1983.

Dynamics in Newtonian_Riemannian Spacetime( )

Zhang Rongye
(Institute of Mathematics, Academia Sinica, Beijing 100080, P R China)

Abstract: By the theory of Modern Geometry, the mechanical principle and advanced calculus, the dynamics in Newtonian_Galilean spacetime is generalized to Newtonian_Riemannian Spacetime, and the dynamics in N_R spacetime is established. Beng divided into some parts, this paper is one of them. The other are to be continued.

Key words: Riemannian manifold; connection; absolute differential; Lie derivative; exterior differential; co_moving time derivative; fiber bundle; duality pairing