应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2000) 07_0765_05

自治时滞微分方程的线性化振动性*

李永昆

(云南大学 数学系, 昆明 650091)

(吴学谋推荐)

摘要: 研究了非线性时滞微分方程

$$x'(t)+\sum_{i=1}^{m}f_i(x(t-\tau_1),\cdots,x(t-\tau_m))=0$$

的线性化振动性•

关 键 词: 时滞微分方程; 振动; 非振动

中图分类号: O173.7 文献标识码: A

引 言

考虑非线性自治时滞微分方程

$$x'(t)+\sum_{i=1}^{m}p_i f_i(x(t-\tau_i))=0, \tag{1}$$

和

$$x'(t)+\sum_{i=1}^{m}p_i x(t-\tau_i)=0, \tag{2}$$

其中, $p_i\in(0,\infty)$, $\tau_i\in[0,\infty)$, $f_i\in C(R,R)$, $i=1,\cdots,m$•

文[1]研究了方程(1)的线性化振动性, 并证明了: 如果下列条件成立

H$_1$) $uf_i(u)>0(u\neq 0)$ 且 $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f_i(u)}{u}=1(i=1,\cdots,m)$;

H$_2$) 存在 $\delta>0$ 使得

或者 $f_i(u)\leqslant u$, $u\in[0,\delta)$,

或者 $f_i(u)\geqslant u$, $u\in[0,\delta)$, $(i=1,\cdots,m)$•

那么, 方程(1)振动的充分必要条件是方程(2)振动•

在文[2]中, 张炳根指出: 条件H$_2$)对 u 趋于零时, $f_i(u)$ 的变化有限制, 并提出这个条件是否可改进?

文[3]曾试图去掉条件H$_2$), 但未完全成功(见文[4])•

本文的目的是通过使用一种新技巧研究相当广泛的一类非线性自治时滞微分方程

* 收稿日期: 1998_06_22; 修订日期: 2000_03_15
基金项目: 云南省应用基础研究基金资助项目
作者简介: 李永昆(1961~), 博士, 教授, 已发表论文 40 余篇.

$$x'(t)+f(x(t-\tau_1),\cdots,x(t-\tau_m))=0 \tag{3}$$

的线性化振动性, 其中, $f\in(R,R)$, $\tau_i\in(0,\infty)(i=1,\cdots,m)$• 所得结果肯定地回答了张炳根的问题, 并表明在更一般的情况下, $H_2)$ 也可去掉•

如通常一样, 微分方程的解称为振动的, 如果它有任意大的零点; 否则称为非振动的• 微分方程称为振动的, 如果它的每一解都是振动的•

1 主要结果及其证明

本文的主要结果如下:

定理 假设下列条件成立

H) i) $f(u_1,\cdots,u_m)>0$, $u_1,\cdots,u_m>0$,

$f(u_1,\cdots,u_m)<0$, $u_1,\cdots,u_m<0$,

ii) 存在常数 $p_i\in(0,\infty)$, $i=1,\cdots,m$ 使得

$$\lim_{\substack{(u_1,\cdots,u_m)\to 0\\ u_iu_j>0,\ i,j=1,\cdots,m}}\frac{f(u_1,\cdots,u_m)}{p_1u_1+\cdots+p_mu_m}=1\text{•}$$

那么, 方程(3)振动的充分必要条件是方程(2)振动•

推论 假设 $H_1)$ 成立, 那么方程(1)振动的充分必要条件是方程(2)振动•

证 令 $f(u_1,\cdots,u_m)=p_1f_1(u_1)+\cdots+p_mf_m(u_m)$, 易知对 $u_iu_j>0$, $i,j=1,\cdots,m$ 有

$$\left|\frac{f(u_1,\cdots,u_m)}{p_1u_1+\cdots+p_mu_m}-1\right|\leqslant\sum_{i=1}^{m}\left|\frac{f_i(u_i)}{u_i}-1\right|\text{•}$$

因此, H) i) 成立• 显然, H) ii) 也成立•

为证定理, 首先我们给出如下几个引理•

引理 1[5] 方程(2)振动的充分必要条件是它的特征方程

$$\lambda+\sum_{i=1}^{m}p_ie^{-\tau_i\lambda}=0 \tag{4}$$

没有实根•

类似于文[6]的定理1的证明易得

引理 2 假设 H) 成立• 那么, 若方程(2)振动, 则方程(3)也振动•

引理 3 假设 H) 成立, 并设方程(2)不振动, 那么, 对任意的 $\varepsilon\in(0,1)$, 方程

$$x'(t)+(1-\varepsilon)f(x(t-\tau_1),\cdots,x(t-\tau_m))=0, \tag{3$_\varepsilon$}$$

也不振动•

证 对任意固定的 $\varepsilon\in(0,1)$, 由 H) 可知存在 $\delta>0$ 使得

$$(1-\varepsilon)\sum_{i=1}^{m}p_iu_i<f(u_1,\cdots,u_m)<(1+\varepsilon)\sum_{i=1}^{m}p_iu_i\quad(u_i\in(0,\delta);\ i=1,\cdots,m), \tag{5}$$

从引理2知方程(2)的特征方程(4)有一实根 η, 即

$$\eta+\sum_{i=1}^{m}p_ie^{-\eta\tau_i}=0\text{•} \tag{6}$$

显然, $\eta<0$, $\tau=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\{\tau_i\}$, 设 X 是 $[t_0-\tau,\infty)$ 上的的实值有界连续函数全体并赋予上确界范数所成的 Banach 空间• 设 S 是 X 中具有下列性质的 $x(t)$ 所组成的集合•

a) 对 $t\geqslant t_0$, $x(t)$ 单调不增且对 $t\in[t_0-\tau,t_0]$, $x(t)\equiv x_0\exp(\eta(t-t_0))$;

b) $x_0\exp(\eta(t-t_0))\leqslant x(t)\leqslant x_0\exp(-\eta\tau),\ t\geqslant t_0;$

c) $x(t-\tau_i)\leqslant\exp(-\eta\tau_i)x(t),\ t\geqslant t_0,\ (i=1,\cdots,m)$•

其中, x_0 满足 $0<x_0<\delta\exp(\eta\tau)$ •

在 S 上定义映射 F 如下

$$(Fx)(t)=\begin{cases}x_0e^{\eta(t-t_0)} & (t_0-\tau\leqslant t\leqslant t_0),\\ x_0\exp\left[-(1-\varepsilon)\int_{t_0}^{t}\dfrac{f(x(s-\tau_1),\cdots,x(s-\tau_m))}{x(s)}ds\right] & (t>t_0)\end{cases}$$•

显然, $(Fx)(t)$ 是单调减少的连续函数且 $(Fx)(t)\leqslant x_0\exp(-\eta\tau)$•

下证 $(Fx)(t)\geqslant x_0\exp(\eta(t-t_0))$• 为此, 由(H), (5) 和(6), 对 $t\geqslant t_0$, 得

$$\begin{aligned}(Fx)(t)&=x_0\exp\left[-(1-\varepsilon)\int_{t_0}^{t}\frac{f(x(s-\tau_1),\cdots,x(s-\tau_m))}{x(s)}ds\right]\geqslant\\ &x_0\exp\left[-(1-\varepsilon^2)\int_{t_0}^{t}\frac{p_1x(s-\tau_1)+\cdots+p_mx(x-\tau_m)}{x(s)}ds\right]\geqslant\\ &x_0\exp(-(1-\varepsilon^2)\sum_{i=1}^{m}p_ie^{-\eta\tau_i}(t-t_0))\geqslant\\ &x_0\exp(\eta(t-t_0))\end{aligned}$$•

又由 H), (5) 和(6), 对每一 $k=1,\cdots,m,\ t\geqslant t_0$ 有

$$\begin{aligned}\frac{(Fx)(t-\tau_k)}{(Fx)(t)}&=\exp\left[(1-\varepsilon)\int_{t-\tau_k}^{t}\frac{f(x(x-\tau_1),\cdots,x(s-\tau_m))}{x(s)}ds\right]\leqslant\\ &\exp\left[(1-\varepsilon^2)\sum_{i=1}^{m}p_i\int_{t-\tau_k}^{t}\frac{x(s-\tau_i)}{x(s)}ds\right]\leqslant\\ &\exp((1-\varepsilon^2)\sum_{i=1}^{m}\tau_kp_ie^{-\eta\tau_i})=\\ &\exp(-(1-\varepsilon^2)\eta\tau_k)\leqslant\\ &\exp(-\eta\tau_k)\end{aligned}$$•

于是, 已证得了 $FS\subseteq S$ •

明显地, 集合 S 是非空(因 $x_0\exp(\eta(t-t_0))\in S$), 闭和凸的 •

为证 FS 在 X 中相对紧, 只要证 $d[(Fx)(t)]/dt$ 一致有界即可• 事实上,

$$\frac{d}{dt}[(Fx)(t)]=-(1-\varepsilon)\frac{f(x(t-\tau_1),\cdots,x(t-\tau_m))}{x(t)}(Fx)(t)$$•

由上式及(5) 和(6), 有

$$\begin{aligned}\left|\frac{d}{dt}[(Fx)(t)]\right|&=(1-\varepsilon)\frac{f(x(t-\tau_1),\cdots,x(t-\tau_m))}{x(t)}(Fx)(t)\leqslant\\ &x_0(1-\varepsilon^2)\sum_{i=1}^{m}p_i\frac{x(t-\tau_i)}{x(t)}e^{-\eta\tau}<\\ &x_0(\sum_{i=1}^{m}p_ie^{-\eta\tau_i})e^{-\eta\tau}=\\ &-x_0\eta e^{-\eta\tau}\end{aligned}$$•

至此, 我们已证得 F 满足 Shander 不动点定理的所有条件, 故 F 有不动点 $x_\varepsilon\in S$ 使得 $Fx_\varepsilon=x_\varepsilon$• 显然, x_ε 是方程 $(3)_\varepsilon$ 使得 $x_\varepsilon(t_0)=x_0$ 的最终正解 •

由文[7] 的引理 2 我们有

引理 4[7]　设 M 是 R 的开子集, 假设对每一 $i=1,\cdots,m$ 和每一固定的 $\mu\in M$, 函数 $p_i(\cdot,\mu)$ 和 $\tau_i(\cdot,\mu)$ 在 $[t_0,\infty)$ 上非负连续, 且

$$\lim_{t\to\infty}[t-\tau_i(t,\mu)]=\infty\cdot$$

又假设对每一 $i=1,\cdots,m$ 和固定的 $t\geqslant t_0$, 函数 $p_i(t,\cdot)$ 和 $\tau_i(t,\cdot)$ 在 M 上连续, 设 N 是使得方程

$$x'(t)+\sum_{i=1}^{m}p_i(t,\mu)x(t-\tau_i(t,\mu))=0$$

振动的所有 $\mu\in M$ 的集合, 那么 N 是一个开集·

引理 5　假设 H) 成立, 那么存在 $\varepsilon_0\in(0,1)$ 使当 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ 时, 方程 $(3)_\varepsilon$ 振动的充分必要条件是方程

$$x'(t)+(1-\varepsilon)\sum_{i=1}^{m}p_ix(t-\tau_i)=0 \tag{$(2)_\varepsilon$}$$

振动·

证　对每一 $\varepsilon\in(0,1)$, 若方程 $(2)_\varepsilon$ 振动, 则由引理 2 知方程 $(3)_\varepsilon$ 也振动· 其次, 对每一 $\varepsilon\in(0,1)$, 若方程 $(3)_\varepsilon$ 振动, 则由引理 3 易知方程 (2) 也振动· 从而由引理 4 可知存在 $\varepsilon_0\in(0,1)$ 使得对每一 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ 方程 $(2)_\varepsilon$ 也振动·

定理的证明　考虑方程

$$x'(t)+\alpha f(x(t-\tau_1),\cdots,x(t-\tau_m))=0, \tag{7}$$

和

$$x'(t)+\alpha\sum_{i=1}^{m}p_ix(x-\tau_i)=0, \tag{8}$$

其中 α 为参数, 由引理 5 知对任意的 $\alpha\in[1,2]$ 均存在 $\varepsilon(\alpha)\in(0,1)$ 使当 $\varepsilon\in(0,\varepsilon(\alpha))$ 时, 方程

$$x'(t)+(1-\varepsilon)\alpha f(x(t-\tau_1),\cdots,x(t-\tau_m))=0$$

振动的充分必要条件是方程

$$x'(t)+(1-\varepsilon)\alpha\sum_{i=1}^{m}p_i(t-\tau_i)=0$$

振动· 故易知当 $\alpha\in[1,2)$ 时, 方程 (7) 振动的充分必要条件是方程 (8) 振动·

附　　录

引理 2 的证明　若不然, 方程(3) 有非振动解 $x(t)$· 假设 $x(t)$ 是最终正解, 对 $x(t)$ 是最终负解的情形可类似证明· 故略·

选取 $t_1\geqslant t_0$ 使当 $t\geqslant t_1$ 时, $x(t-\tau_i)>0$, $i=1,\cdots,m$· 从而, 由 (1) 知当 $t\geqslant t_1$ 时, $x(t)$ 单减, 故 $\lim\limits_{t\to 0}x(t)=l\in[0,\infty)$ 存在· 我们断言 $l=0$· 否则, $l>0$· 由 f 的性质易知, 存在 $\sigma>0$ 使当 $|u_i-l|<\sigma$, $i=1,\cdots,m$ 时,

$$|f(u_1,\cdots,u_m)>\frac{1}{2}f(l,\cdots,l)>0\cdot$$

再选取 $t_2>t_1$ 使当 $t\geqslant t_2$ 时, 对 $i=1,\cdots,m$,

$$x(t-\tau_i)-l<\delta\cdot$$

于是, 从 t_2 到 ∞ 积分 (3) 的两边得

$$0=l-x(t_2)+\int_{t_2}^{\infty}f(x(t-\tau_1),\cdots,x(t-\tau_m))\,dt>$$

$$l - x(t_2) + \frac{1}{2}\int_{t_2}^{\infty} f(l, \cdots, l)\mathrm{d}t.$$

此为矛盾. 故 $l = 0$

令

$$q_i(t) = p_i \frac{f(x(t-\tau_1), \cdots, x(t-\tau_m))}{p_1 x(t-\tau_1) + \cdots + p_m x(t-\tau_m)},$$

则由假设知 $q_i(t) > 0$, 且

$$\lim_{t\to\infty}\frac{p_i}{q_i(t)} = 1,\ i = 1, \cdots, m.$$

注意到 $x(t)$ 是方程

$$y'(t) + \sum_{i=1}^{m} q_i(t)y(t-\tau_i) = 0$$

的一个非振动解, 由文[7]的定理 1 知方程(2)有非振动解. 矛盾.

[参 考 文 献]

[1] Kulencvic MRC, Ladas G, Meimaridou A. On oscillation of nonlinear delay differential equations[J]. Quart Appl Math, 1987, **14**(1): 155~164.

[2] 张炳根. 泛函微分方程振动理论的若干问题[A]. 见王联, 薄富全, 刘永清等编: 常微分方程理论及应用[C]. 北京: 科学出版社, 1992, 42~45.

[3] 李永昆. 一阶非线性时滞微分方程的线性化振动性[J]. 科学通报, 1994, **39**(13): 1159~1163.

[4] 柴树根. 关于"一阶非线性时滞微分方程的线性化振动性"一文的注[J]. 数学研究与评论, 1998, **18**(1): 147~148.

[5] Ladas G, Sficas Y G, Stavroulakis I P. Necessary and sufficient conditions for oscillations[J]. Amer Math Monthly, 1983, **90**(11): 637~640.

[6] Kocic V L J, Ladas G, Qian C. Linearized oscillations in nonautonomous delay differential equations [J]. Differential and Integral Equs, 1993, **6**(3): 671~683.

[7] Ladas G, Qian C, Yan J. A comparison result for the oscillation of delay differential equations[J]. roc Amer Math Soc, 1992, **114**(4): 939~947.

Linearized Oscillations for Autonomous Delay Differential Equations

Li Yongkun

(Department of Mathematics, Yunnan University, Kunming 650091, R China)

Abstract: The linearized oscillations of the nonlinear autonomous delay differential equation

$$x'(t) + \sum_{i=1}^{m} f_i(x(t-\tau_1), \cdots, x(t-\tau_m)) = 0$$

are studied.

Key words: delay differential equation; oscillation; nonoscillation