

文章编号: 1000\_0887(2000) 06\_0640\_07

# 大垂度柔索的动力学建模与仿真<sup>\*</sup>

李 宾<sup>1</sup>, 李映辉<sup>2</sup>, 殷学纲<sup>3</sup>

(1 后勤工程学院 建筑工程系, 重庆 400041; 2 重庆大学 工程力学系, 重庆 400044;  
3 重庆大学 机械传动国家重点实验室, 重庆 400044)

(张汝清推荐)

摘要: 用多刚体\_球铰模型对大垂度柔索进行离散化建模, 利用多刚体系统动力学理论建立了该模型的动力学方程. 采用矩阵广义逆理论对其位移和速度进行修正, 以消除该微分\_代数方程在数值分析中的违约现象. 数值仿真证明了该方法的正确性.

关键词: 大垂度柔索; 多刚体动力学; 数值仿真; 违约修正

中图分类号: O313.3 文献标识码: A

## 引 言

大垂度柔索是一类特殊的工程结构, 它应用于高压输电线路、架空索道、桥梁和土木工程等大跨度结构<sup>[1,2]</sup>. 大垂度柔索具有跨度大、柔性大而固有阻尼很小的特点, 因而在风载、设计荷载和地震等动力荷载作用下会产生大范围的运动, 因此大垂度柔索的动力分析是强非线性动力问题.

对绳索问题的研究已有三百年的历史. 许多学者(包括 Bernoulli、Euler、Lagrange 和 Poisson 等著名学者)在这一领域做了不少卓有成效的工作. 在早期, 人们主要是在理论和数学方面进行探讨, 得到了不少计算公式和理论成果. 到本世纪, 工程上出现了不少绳索结构, 而且发生了一些重大的工程事故, 这使得人们必须进行更具体、更专门化的研究, 提出了不少科学实用的规范和措施. K. Ahmadi\_Kashani<sup>[3]</sup>对绳索研究的历史作了全面的总结, C. Sahay<sup>[4]</sup>对高压输电线路的动力学方面的研究也作了综述. 从现有的成果看, 主要解决的是小垂度绳索的固有频率和模态问题, 采用的方法主要还是经典理论方法、有限元方法和试验方法. 而这些方法难以解决具有强非线性的大垂度柔索的动力响应问题.

J. W. Kamman<sup>[5]</sup>将应用于机器人、运动生物力学和航天器等领域的多刚体系统动力学方法应用于链结构的动力计算, 但在其数值计算中未采用违约修正方法.

本文采用多刚体\_球铰模型来对柔索作离散化处理, 即将柔索划分为若干个刚性小段, 并通过球铰将它们连接起来, 这种模型一方面可以反映柔索的实际受力与变形情况, 另一方面能有效地处理大变形问题. 在此模型的基础上, 利用多刚体系统动力学理论<sup>[6]</sup>建立起了柔索的

\* 收稿日期: 1999\_04\_02; 修订日期: 2000\_03\_06

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(59635140); 国家教委博士点基金资助项目; 航空工业总公司基金资助项目

作者简介: 李宾(1963~), 男, 四川自贡人, 副教授, 博士, 研究方向: 结构动力学.

动力学方程。这种方程是微分\_代数型耦合方程,在其数值求解过程中会出现位移和速度的违约现象<sup>[7]</sup>。为此,我们又引入了违约修正方法<sup>[7,8]</sup>,以保证数值计算结果的准确性和收敛性。

### 1 空间任意运动刚体的动力学普遍方程

首先定义:刚体  $B_k$  的质心坐标  $x_{ck} = [x_{ck1} \ x_{ck2} \ x_{ck3}]^T$ ;  $B_k$  对静系  $O_{x_1^0 x_2^0 x_3^0}$  转动的角速度矢量为  $\omega$ ; 拟坐标为  $\pi$ , 并且  $\pi = \omega$ 。

则刚体的 Jourdain 形式的动力学普遍方程可写作:

$$\delta x_c^T (F - ma_c) + \delta \pi^T (M_c - J\omega - \Omega J\omega) = 0, \tag{1}$$

其中,  $F$  为作用于刚体上外力的主矢量在静系上的分量列阵,  $M_c$  为作用于刚体上的主矩在静系上的分量列阵;  $J$  为刚体对于静系之惯性张量矩阵,

$$M = \begin{bmatrix} m & & 0 \\ & m & \\ 0 & & m \end{bmatrix},$$

其中  $m$  为刚体的质量,

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

为  $\omega$  的坐标方阵。

若有广义速度  $u$ , 使

$$x_c = P_v u, \quad \omega = P_\omega u, \tag{2}$$

则有  $\delta x_c = P_v \delta u, \quad \delta \pi = P_\omega \delta u$  (3)

由此可得以下的任意运动刚体对于系统广义速度的 Jourdain 形式的动力学普遍方程:

$$\delta u^T (P_v^T (F - ma_c) + P_\omega^T (M_c - J\omega - \Omega J\omega)) = 0 \tag{4}$$

### 2 链状多刚体系统动力学方程

#### 2.1 定义

$O_{x_1^0 x_2^0 x_3^0}$  为原点在  $O_0$  点的静坐标系;  $O_k x_1^k x_2^k x_3^k$  为原点在  $O_k$  点, 固联于刚体  $B_k$  上的动坐标系,  $O_1$  与  $O_0$  重合,  $l_k$  为由相邻的两球铰  $O_k$  指向  $O_{k+1}$  的固联于  $B_k$  内的矢量;  $r_k$  为从  $O_k$  到  $C_k$  的矢量。

取广义速度为:

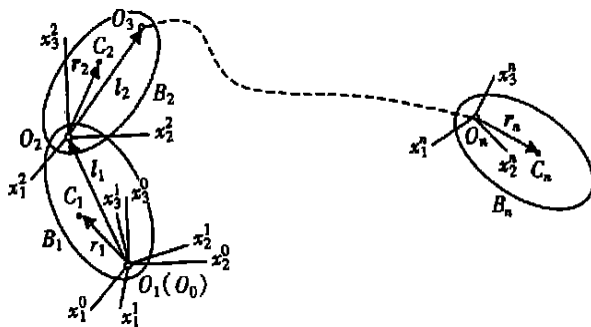


图 1 空间运动链状多刚体系统

$$\Phi = [ \Phi^{0,1T} \quad \Phi^{1,2T} \quad \dots \quad \Phi^{n-1,nT} ]^T, \tag{5}$$

其中,  $\Phi^{k-1, k} = [\alpha^{k-1, k} \quad \beta^{k-1, k} \quad \gamma^{k-1, k}]^T$  为  $B_k$  对于  $B_{k-1}$  的相对转动的 Cardan 角。

## 2.2 $B_k$ 的角速度

由图 1 可得

$$\omega^{0, k} = \omega^{0, 1} + \omega^{1, 2} + \dots + \omega^{k-1, k}, \quad (6)$$

其中  $\omega^{i, i+1}$  为  $B_{i+1}$  相对于  $B_i$  的角速度矢量。

把  $\omega^{i, i+1}$  ( $i = 0 \sim n-1$ ) 向  $B_i$  的连体基投影, 再转移到静系上, 则有

$$\omega^{0, k} = \omega^{0, 1} + A^{0, 1} \omega^{1, 2} + \dots + A^{0, k-1} \omega^{k-1, k}, \quad (7)$$

其中  $A^{0, i}$  为  $O_i x^i_1 x^i_2 x^i_3$  基对  $O x^0_1 x^0_2 x^0_3$  基的方向余弦矩阵。

根据方向余弦的性质有

$$A^{0, i} = A^{0, 1} A^{1, 2} \dots A^{i-1, i} \quad (8)$$

$$\text{而 } \omega^{i, j} = W^{i, j} \Phi^{i, j}, \quad (9)$$

其中

$$W^{i, j} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sin \beta^{i, j} \\ 0 & \cos \beta^{i, j} & -\cos \beta^{i, j} \sin \alpha^{i, j} \\ 0 & \sin \alpha^{i, j} & \cos \alpha^{i, j} \cos \beta^{i, j} \end{bmatrix}.$$

$$\text{故有 } \omega^{0, k} = P^k_{\omega} \Phi, \quad (10)$$

$$\text{其中 } P^k_{\omega} = [W^{0, 1} \quad A^{0, 1} W^{1, 2} \quad \dots \quad A^{0, k-1} W^{k-1, k} \quad \mathbf{0} \quad \dots \quad \mathbf{0}].$$

## 2.3 $B_k$ 的质心速度

由图 1 可得

$$r^{0, k} = \sum_{i=1}^{k-1} l_i + r_k, \quad (11)$$

$$\text{即 } r^{0, k} = \sum_{i=1}^{k-1} A^{0, i} l^{i, i+1} + A^{0, k} r^{k, k}. \quad (12)$$

利用有关的公式可得

$$V^{0, k} = \dot{r}^{0, k} = - \sum_{i=1}^{k-1} A^{0, i} S_{l^{i, i+1}} A^{0, i T} \omega^{0, i} - A^{0, k} S_{r^{k, k}} A^{0, k T} \omega^{0, k}, \quad (13)$$

其中

$$S_{l^{i, i+1}} = \begin{bmatrix} 0 & -l_3^{i, i+1} & l_2^{i, i+1} \\ l_3^{i, i+1} & 0 & -l_1^{i, i+1} \\ -l_0^{i, i+1} & l_1^{i, i+1} & 0 \end{bmatrix},$$

即为  $l^{i, i+1}$  的坐标方阵。

(13) 式可简记为

$$V^{0, k} = P^k_v \omega, \quad (14)$$

其中

$$P^k_v = - \left[ A^{0, 1} S_{l^{1, 2}} A^{0, 1 T} \quad \dots \quad A^{0, k-1} S_{l^{k-1, k}} A^{0, k-1 T} \quad A^{0, k} S_{r^{k, k}} A^{0, k T} \quad \mathbf{0} \quad \dots \quad \mathbf{0} \right], \quad \left. \begin{array}{l} \\ \omega = [\omega^{0, 1 T} \quad \omega^{0, 2 T} \quad \dots \quad \omega^{0, n T}]^T. \end{array} \right\} \quad (15)$$

利用(10)式, 可得

$$P_{\omega} = \begin{bmatrix} P_{\omega}^1 \\ P_{\omega}^2 \\ \vdots \\ P_{\omega}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^{0,1} & \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ W^{0,1} & A^{0,1} W^{1,2} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ W^{0,1} & A^{0,1} W^{1,2} & \dots & \dots & A^{0,n-1} W^{n-1,n} \end{bmatrix},$$

$$\text{则 } V^{0,k} = P_v^k \Phi, \quad (16)$$

$$\text{其中 } P_v^k = P_v^k P_{\omega}.$$

#### 2.4 $B_k$ 的质心加速度与角加速度

$$a^{0,k} = \mathcal{V}^{0,k} = P_v^k \ddot{\Phi} + P_v^k \dot{\Phi}, \quad (17)$$

$$\omega^{0,k} = P_{\omega}^k \ddot{\Phi} + P_{\omega}^k \dot{\Phi}. \quad (18)$$

#### 2.5 空间运动链状多刚体系统的动力学方程

将上面各式代入(4)式,经推导可得系统动力学方程为:

$$M \ddot{\Phi} + C \dot{\Phi} = f, \quad (19)$$

其中

$$\Phi = \Phi = [\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \dots \quad \varphi_{3n}]^T,$$

$$M = \sum_{k=1}^n m^k P_v^k T P_v^k + \sum_{k=1}^n P_{\omega}^k T J^k P_{\omega}^k,$$

$$C = \sum_{k=1}^n m^k P_v^k T \dot{P}_v^k + \sum_{k=1}^n P_{\omega}^k T J^k P_{\omega}^k + \sum_{k=1}^n P_{\omega}^k T \Omega^k J^k P_{\omega}^k,$$

$$f = \sum_{k=1}^n P_v^k T A^{0,k} F^{k,k} + \sum_{k=1}^n P_{\omega}^k T A^{0,k} M_c^{k,k},$$

$F^{k,k}$  为作用于  $B_k$  上的主动力矢量(包括弹性恢复力)在  $O_k x_1^k x_2^k x_3^k$  基上的分量列阵;  $M_c^{k,k}$  为作用于  $B_k$  上的主动力对其质心的主矩在  $O_k x_1^k x_2^k x_3^k$  基上的分量列阵;  $J^k = J^{0,k}$  为  $B_k$  对于  $O_{x_1^0} x_2^0 x_3^0$  的惯性张量矩阵;  $J^{0,k} = A^{0,k} J^{k,k} A^{0,k T}$ ;  $J^{k,k} = J_{c_k}^{k,k} + m^k (\rho_{c_k}^T \rho_{c_k} E - \rho_{c_k} \rho_{c_k}^T)$ ;  $J_{c_k}^{k,k}$  为  $B_k$  对原点在  $C_k$  的连体基  $O_k x_1^k x_2^k x_3^k$  的惯性张量矩阵;  $\rho_{c_k}$  为  $C_k O_k$  矢量在  $O_{x_1^0} x_2^0 x_3^0$  上的分量列阵.

### 3 动力学方程的求解及其违约修正

要求解动力学方程(19)还需引入约束条件.而动力学方程是二阶微分方程,约束方程是代数方程.这样的联合方程组称为微分\_代数型方程组,它不能直接求解.通常做法是先将代数方程对时间求两次导数得到二阶微分方程,再同动力学微分方程联立起来,并应用直接积分法来求其动力响应.这样实际上只引入了对加速度的约束,所得数值解不一定能满足位移约束和速度约束,如果不对其进行修正,其结果随着时间的递推有可能远远地偏离真实解<sup>[7,8]</sup>.

本文根据文献[8],对动力学方程(19)和下面约束方程( $m$ 为约束方程数)

$$c(\Phi, \dot{\Phi}, t) = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_m]^T = \mathbf{0} \quad (20)$$

组成的微分\_代数型方程组进行违约修正.

#### 3.1 对角位移违约的修正

设积分到  $t = t_k$  时刻所得到的角位移为  $\varphi_k$ ,当违约超过了给定的精度范围时,可认为  $c_k = c(\varphi_k, t_k) \neq \mathbf{0}$  此时需要对  $\varphi_k$  加入修正项  $\delta \varphi_k$ ,即

$$\varphi_k = \varphi_k + \delta \varphi_k, \quad (21)$$

并且有

$$\mathbf{c}_k = \mathbf{c}(\varphi_k, t_k) = \mathbf{c}(\varphi_k, t_k) + \delta \mathbf{c}_k \quad (22)$$

由(22)式可得

$$\delta \mathbf{c}_k = -\mathbf{c}(\varphi_k, t_k) \quad (23)$$

根据问题的性质,  $\mathbf{c}(\varphi_k, t_k)$  一般都很小, 此时位移约束方程(20)的一阶变分可表示为

$$\delta \mathbf{c} = [\mathbf{c}_\varphi] \delta \varphi \quad (24)$$

将(24)式代入(23)式有

$$[\mathbf{c}_\varphi]_k \delta \varphi_k = -\mathbf{c}(\varphi_k, t_k) \quad (25)$$

根据矩阵的广义逆理论<sup>[9]</sup>, 方程(25)存在极小范数解

$$\delta \varphi_k = -[\mathbf{c}_\varphi]_k^T [ [\mathbf{c}_\varphi]_k [ \mathbf{c}_\varphi ]_k^T ]^{-1} \mathbf{c}(\varphi_k, t_k) \quad (26)$$

将  $\delta \varphi_k$  代入(21)式, 即得角位移  $\varphi_k$  的修正值。

由(26)式得到的极小范数解的物理意义为: (26)式不仅对系统的角位移进行了修正, 使约束方程得到满足, 而且因其具有极小范数, 意味着在违约得到修正的条件下, 极小范数解对角位移的修正幅度最小, 也就是对系统的动力学方程的破坏最小, 因此得到的角位移最接近系统的真实运动。而且在推导过程中没有引入可调参数, 所以在实际运算中不需要人工干预。

### 3.2 对角速度违约的修正

当角速度违约超过了给定精度范围, 即  $\dot{\varphi}_k = \dot{\varphi}(\varphi_k, \dot{\varphi}_k, t_k) \neq 0$  时, 与角位移的修正类似, 对  $\dot{\varphi}_k$  加入修正项  $\delta \dot{\varphi}_k$ , 则

$$\dot{\varphi}_k = \dot{\varphi}_k + \delta \dot{\varphi}_k \quad (27)$$

用类似 3.1 节的方法, 可得

$$\delta \dot{\varphi}_k = -[\dot{\mathbf{c}}_\varphi]_k^T [ [\dot{\mathbf{c}}_\varphi]_k [ \dot{\mathbf{c}}_\varphi ]_k^T ]^{-1} \dot{\mathbf{c}}(\varphi_k, \dot{\varphi}_k, t_k) \quad (28)$$

将(28)式代入(27)式, 角速度  $\dot{\varphi}_k$  得到修正。

## 4 大垂度柔索动力响应的计算

由于第 2 节推导出的动力学方程(19)是链状多刚体系统动力学方程的一般形式, 下面将其应用于柔索振动。

由于柔索抗弯能力很弱, 其上所受外载主要是自重和外激励, 内力主要是拉力, 所以采用多刚体\_球铰模型进行分析。首先用多刚体\_球铰模型对该柔索进行离散化(如图 2)。然后根据(19)式建立其动力学方程, 并引入约束条件。将该微分\_代数方程组转化为扩阶的微分方程组, 在每一时间段利用 Wilson\_θ 法和 Newton 迭代运算, 求其动力响应。再根据第 3 节介绍的违约修正方法, 对该微分\_代数方程组进行修正, 即可得到正确的结果。



图 2 柔索及其多刚体离散化模型

**算例** 如图 2 所示大垂度柔索, 初始状态为自然下垂。已知其跨度为 20 m, 垂度为 4 m, 柔索长 22.133 m, 单位长重量为 1 kN/m, 两端固定, 集中力作用在中点, 大小为  $9.8 \sin 10t$  kN, 求其面内响应。

根据其支座特点, 可得约束方程为

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sin\theta_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^n l_e \cos\theta_i - l &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

其中:  $\theta_i$  为第  $i$  个刚体单元与水平线的夹角,  $l_e$  为第  $i$  个单元的单元长度,  $l$  为柔索的跨度。

在本算例中取  $n = 200$ , 计算结果如图3、图4和图5所示。图3、图4分别为违约修正前后悬索在各时刻的响应曲线。两图中: 曲线1对应  $t = 0.1256$  s, 曲线2对应  $t = 0.3768$  s, 曲线3对应  $t = 0.6280$  s时悬索的位移响应曲线。

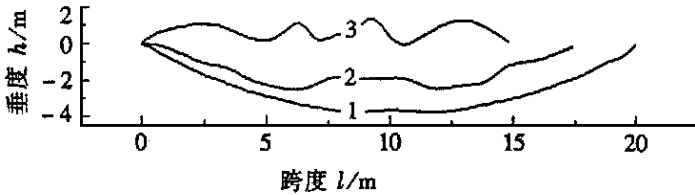


图3 违约修正前柔索的位移响应曲线

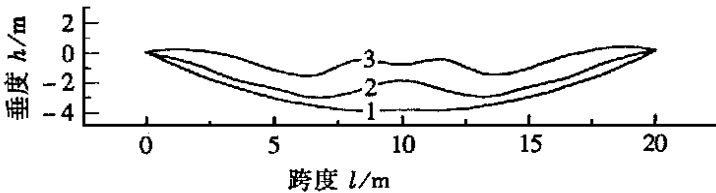


图4 违约修正后柔索的位移响应曲线

从图3、图4相应时刻位移响应曲线的比较可以看出, 违约修正前计算结果随着时间的推移, 越来越偏离实际情况, 而违约修正以后, 计算结果同实际情况是一致的。

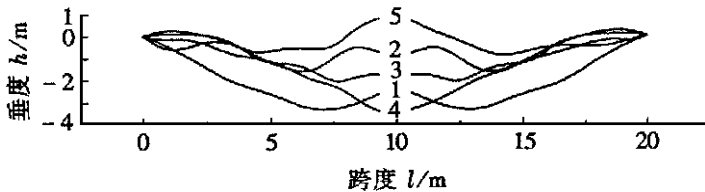


图5 违约修正后柔索在不同时刻的响应曲线

在图5中曲线1对应  $t = 0.314$  s, 曲线2对应  $t = 0.628$  s, 曲线3对应  $t = 0.942$  s, 曲线4对应  $t = 1.256$  s, 曲线5对应  $t = 1.570$  s。

### [参 考 文 献]

- [1] 李著景. 特殊结构[M]. 北京: 清华大学出版社, 1988.
- [2] 掘高夫, 村山茂明. 悬索理论及其应用[M]. 北京: 中国林业出版社, 1992.
- [3] Ahmadi\_Kashani K. Vibration of hanging cables[J]. Computers & Structures, 1989, 21(5): 699~ 715.
- [4] Sahay C. Vibration of overhead transmission lines[J]. Shock Vibration Digest, 1989, 21(5): 8~ 13.
- [5] Kamman J W, Huston R L. Dynamics of constrained multibody systems[J]. J Appl Mech, 1984, 51

- (12): 899~ 903.
- [6] 洪嘉振. 多体系统动力学: 理论、计算方法和应用[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 1992.
- [7] 潘振宽, 赵维加, 洪嘉振, 等. 多体系统动力学微分/代数方程组的数值方法[J]. 力学进展, 1996, **26**(1): 28~ 39.
- [8] 于清, 洪嘉振. 受约束多体系统一种新的违约校正方法[J]. 力学学报, 1998, **30**(3): 301~ 305.
- [9] Bao R, Matra S K. Generalized Inverse of Matrices and Its Applications [M]. New York: Willy Press, 1971.
- [10] 殷学纲. 多体方法在梁的非线性分析中的应用[J]. 重庆大学学报, 1988, **11**(11): 113~ 125.

## Dynamic Modeling and Simulation of Flexible Cable With Large Sag

Li Bin<sup>1</sup>, Li Yinghui<sup>2</sup>, Ying Xuegang<sup>3</sup>

(1. Architectural Engineering Department, Logistic Engineering College, Chongqing 400041, P R China;

2. Engineering Mechanics Department, Chongqing University, Chongqing 400044, P R China;

3. National Key Laboratory on Mechanical Transmission, Chongqing University, Chongqing 400044, P R China)

**Abstract:** Discrete model of flexible cable with large sag is established by using multiple rigid body spherical hinge model, and dynamic equation of that discrete model is derived according to dynamics theory of multiple rigid body system. Displacement and velocity of system are revised to eliminate violation phenomenon of the differential algebra equation in numerical simulation based on the theory of generalized inverse of matrices. Numerical simulation proves the validity of our method.

**Key words:** flexible cable with large sag; multiple rigid body system dynamics; numerical simulation; violation correction