

文章编号: 1000\_0887(2000)06\_0647\_08

# 周边固支圆板非线性热弹耦合振动分析<sup>\*</sup>

树学锋, 张晓晴, 张晋香

(太原理工大学 应用力学研究所, 太原 030024)

(杨桂通推荐)

**摘要:** 导出了轴对称圆板非线性热弹耦合自由振动基本方程, 对周边固支圆板运用伽辽金法求解, 得出振幅随时间变化的数值解。将热弹耦合与非热弹耦合情况进行对比, 发现振幅较小时, 热弹耦合效应使板的固有频率相对于无热弹耦合情形提高; 振幅较大时, 热弹耦合效应使固有频率降低。最后比较了不同热弹耦合参数对应的振动情况。

**关 键 词:** 非线性振动; 热弹耦合振动; 圆板**中图分类号:** O322      **文献标识码:** A

## 引 言

非线性振动是振动研究的一个重要分支, 为适应科研和工程的需要, 近 40 年来, 与热弹性振动相关的理论分析、计算方法、实验和应用的研究得到了迅速的发展。

热弹耦合振动就是研究温度场与应变场耦合时弹性体的振动问题。但由于研究的难度较大, 一般研究只局限于小挠度线性范围内, 采用将耦合项线性化的方法简化求解。虽然这种方法减小了求解的难度, 但在较高的工作温度, 较大的温度变化幅度和类似热冲击那样的加热速率下, 这种线性化方法必然导致较大的理论误差。随着温度冲击幅度的增加, 线性耦合理论与非线性耦合理论的差别将达到不可忽略的程度。Chang<sup>[1, 2]</sup>首先发表了关于各向同性和各向异性矩形板非线性热弹耦合振动方面的文章。他建立了矩形板的横向热振动方程, 并将热传导方程化为以热中面力和热弯矩表示的形式。他在含热中面力的方程中略去了高阶项, 使方程大为简化。运用伽辽金法求解方程, 得到了解析解和数值解, 并进行了比较。戴德成等人<sup>[3, 4]</sup>也进行了类似的工作, 但目前的工作大都仅限于矩形板, 圆板和椭圆板中的热弹耦合问题尚未引起人们的重视。

本文研究了温度场中周边固支圆板的轴对称非线性热弹耦合振动问题, 运用伽辽金法求解, 得出一个关于时间的非线性常微分方程组, 求出振幅随时间变化的数值解。将热弹耦合与非热弹耦合情况进行了对比, 还比较了不同热弹耦合参数对应的振动情况。

## 1 基 本 方 程

图 1 所示为一半径为  $a$ , 厚为  $h$  的周边固支薄圆板, 此圆板从一个有初始挠度, 无初始速

\* 收稿日期: 1998\_09\_30; 修订日期: 1999\_12\_18

基金项目: 山西省归国留学人员科研基金资助项目; 山西省自然科学基金资助项目(981006)

作者简介: 树学锋(1964~), 男, 江苏人, 副教授, 博士。

度的状态下开始作大挠度轴对称热弹耦合振动。我们的研究基于下面基本假定：

- 1) 不计转动惯量和横向剪切变形的影响；
- 2) 板中心最大挠度与厚度为同阶量；
- 3) 板非常薄，因此板内横向位移可由板中面横向位移代替；

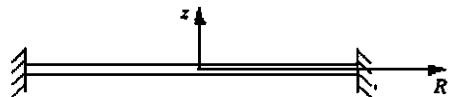


图 1 周边固支薄圆板

- 4) 温度沿板厚度线性分布；
- 5) 材料性质不随温度变化；
- 6) 温度场、应变场互相耦合。

## 1.1 板的协调方程、横向热振动方程

考虑温度效应的物理方程为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} [(\varepsilon + \nu \varepsilon_0) - (1+\nu) \alpha T], \\ \sigma_0 &= \frac{E}{1-\nu^2} [(\varepsilon_0 + \nu \varepsilon) - (1+\nu) \alpha T], \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中  $T$  为温度改变， $\alpha$  为线热涨系数。

轴对称的大挠度几何方程为

$$\varepsilon = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2, \quad \varepsilon_0 = \frac{u_r}{r}. \quad (2)$$

可以得出中面力和内力矩表达式

$$\left. \begin{aligned} N_r &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r dz = \frac{Eh^2}{1-\nu^2} [\varepsilon + \nu \varepsilon_0] - \frac{\alpha Eh}{1-\nu} N_T, \\ N_0 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_0 dz = \frac{Eh^2}{1-\nu^2} [\varepsilon_0 + \nu \varepsilon] - \frac{\alpha Eh}{1-\nu} N_T, \\ M_r &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_z dz = - D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \frac{\partial w}{r \partial r} + (1+\nu) \alpha M_T \right], \\ M_0 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{0z} dz = - D \left[ \frac{\partial w}{r \partial r} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + (1+\nu) \alpha M_T \right], \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中  $M_T, N_T$  为热弯矩和热中面力：

$$M_T = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} T(r, z, t) z dz, \quad N_T = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} T(r, z, t) dz. \quad (4)$$

轴对称的应变协调方程为：

$$\frac{\partial(r\varepsilon_0)}{\partial r} - \varepsilon = - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2. \quad (5)$$

将  $\varepsilon, \varepsilon_0$  用  $N_r, N_0$  表示，并设

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad \sigma_0 = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2},$$

则

$$N_r = h \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad N_0 = h \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}, \quad (6)$$

其中  $\phi$  为应力函数。

可以得出非线性热弹耦合振动协调方程：

$$\therefore^4 \phi + E \alpha \therefore^2 N_T + E \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = 0. \quad (7)$$

运动方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial(rN_r)}{\partial r} - N_0 = 0, \\ \frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{M_r}{r} - \frac{M_0}{r} - Q_r = 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rQ_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( rN_r \frac{\partial w}{\partial r} \right) = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{cases} \quad (8)$$

将(3)式代入, 可得板的横向热振动方程为

$$\begin{aligned} & \ddot{w} + \frac{\Omega h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + (1 + \nu) \alpha \ddot{M}_T - \frac{12}{h^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left[ \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \nu \frac{u_r}{r} \right] - \\ & \frac{12}{h^2} \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \left\{ \frac{u_r}{r} + \nu \left[ \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \right] \right\} + \frac{12}{h^2} (1 + \nu) \alpha V_T \ddot{w} = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

其中,  $D$  为抗弯刚度系数,  $\rho$  为密度。

## 1.2 热传导方程

设温度场为

$$T(r, z, t) = [(T)_{-h/2} + (T)_{h/2}] / 2 + [(T)_{h/2} - (T)_{-h/2}] \left( \frac{z}{h} \right),$$

则

$$\begin{cases} M_T = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} T(r, z, t) z dz = [(T)_{-h/2} - (T)_{h/2}] / h, \\ N_T = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} T(r, z, t) dz = [(T)_{-h/2} + (T)_{h/2}] / 2. \end{cases} \quad (10)$$

温度场与应变场耦合时, 温度-应变关系由下面的热传导方程确定<sup>[5]</sup>:

$$\ddot{\varepsilon}_3 T - \frac{1}{k} \frac{\partial T}{\partial t} - \mu \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial t} = 0, \quad (11)$$

其中  $\ddot{\varepsilon}_3 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ,  $\varepsilon_{kk} = \varepsilon + \varepsilon_0 + \varepsilon_s$ ,

$k = \lambda_0 / \rho C_s$  为板的热扩散率;  $\mu = \alpha E T_0 / \lambda_0 (1 - 2\nu)$  为板的热弹耦合因子, 表征板内温度场与应变场之间的耦合程度;  $E$  为杨氏弹性模量,  $T_0$  为参考温度,  $C_s$  为板材料的比热,  $\lambda_0$  为板的导热系数。

$$\varepsilon_{kk} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - z \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r}. \quad (12)$$

板的热边界条件为: 设板的周边为恒温, 即  $T = 0$  ( $T$  表示绝对温度与参考温度间的温度差)。在板的上下表面有:

$$\lambda_0 \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=-h/2} = H(T_\infty - (T)_{-h/2}), \quad \lambda_0 \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=h/2} = -H(T_\infty - (T)_{h/2}), \quad (13)$$

其中  $(T)_{h/2}$ 、 $(T)_{-h/2}$  分别表示板上下表面的温度,  $T_\infty$  表示周围介质的温度, 且设  $T_\infty = 0$  (即绝对温度与参考温度相同),  $H$  为板的对流放热系数。

将式(11)乘以  $z$  并沿板厚  $h$  积分, 代入边界条件(13), 可得出如下方程:

$$\left[ \ddot{\varepsilon}_3 - \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{12}{h^2} \left( 1 + \frac{Hh}{2\lambda_0} \right) \right] M_T + \mu \frac{\partial}{\partial t} \ddot{w} = 0. \quad (14)$$

式(11)沿板厚  $h$  积分, 代入边界条件(13), 可得出如下方程:

$$\left( \ddot{\omega}^2 - \frac{2H}{\lambda_0 h} - \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial t} \right) N_T - \mu \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \right] = 0 \quad (15)$$

对方程(7)、(9)、(14)、(15)进行量纲为一化, 可得轴对称圆板的非线性热弹耦合的振动方程为

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= \ddot{\omega}^4 w + \frac{\partial^2 w}{\partial \Omega^2} + \ddot{\omega}^2 M_T - 12 \frac{\partial^2 w}{\partial R^2} \left[ \frac{\partial u_r}{\partial R} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial R} \right)^2 + \nu \frac{u_r}{R} \right] - \\ &\quad 12 \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial R} \left( \frac{u_r}{R} + \nu \left[ \frac{\partial u_r}{\partial R} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial R} \right)^2 \right] \right) + 12(1+\nu) N_T \ddot{\omega}^2 w = 0, \\ f_2 &= \ddot{\omega}^4 \phi + \ddot{\omega}^2 N_T + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial R} \frac{\partial^2 w}{\partial R^2} = 0, \\ f_3 &= \ddot{\omega}^2 M_T - \tau d^2 \frac{\partial M_T}{\partial \Omega} - 12 d^2 (1+M) M_T + \beta \tau d^2 \frac{\partial}{\partial \Omega} (\ddot{\omega}^2 w) = 0, \\ f_4 &= \ddot{\omega}^2 N_T - 4 M d^2 N_T - \tau d^2 \frac{\partial N_T}{\partial \Omega} - \frac{\beta \tau d^2}{1+\nu} \frac{\partial}{\partial \Omega} \left[ \frac{\partial u_r}{\partial R} + \frac{u_r}{R} + \left( \frac{\partial w}{\partial R} \right)^2 \right] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

量纲为一的量及各参数表示如下:

$$\begin{aligned} R &= r/a, \quad u_r = a u_r / h^2, \quad M_T = a^2 (1+\nu) \alpha M_T / h, \quad N_T = a^2 \alpha N_T / h^2, \\ \phi &= \phi / Eh^2, \quad M = hH / 2\lambda_0, \quad \tau = \tau_0 \omega_0, \quad \tau_0 = \rho C_s h^2 / \lambda_0, \quad \Omega = \omega_0 t, \\ w &= w / h, \quad \omega_0 = \sqrt{D / \Omega a^4}, \quad \beta = E (1+\nu) \alpha^2 T_0 / (1-2\nu) \rho C_s, \\ k &= \lambda_0 \rho C_s, \quad d = a / h, \quad \mu = \alpha E T_0 / \lambda_0 (1-2\nu), \quad D = Eh^3 / 12(1-\nu^2), \end{aligned}$$

其中,  $\omega_0$  为参考频率,  $\tau_0$  为热扩散松弛时间,  $\nu$  为泊松比。

## 2 板的非线性热弹耦合振动分析

固支圆板应满足下述边界条件:

$$(w)_{R=1} = \left[ \frac{\partial w}{\partial R} \right]_{R=1} = 0, \quad (u_r)_{R=1} = 0 \quad (17)$$

假定位移模式形如;

$$W(R) = 1 - 3R^2 + 2R^3. \quad (18)$$

上式给出的位移模式可以满足位移边条件、内力边界条件和中法线不转动条件。现由分离变量法, 设

$$\left. \begin{aligned} W(R, \Omega) &= w_m A(\Omega) W(R), \\ M_T(R, \Omega) &= w_m B(\Omega) W(R), \\ N_T(R, \Omega) &= w_m C(\Omega) W(R), \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

其中,  $w_m$  为板的初始挠度。

将上述各式代入协调方程, 可以得到应力函数  $\phi$  的一个特解:

$$\begin{aligned} \phi &= -\frac{A^2(\Omega)}{8} w_m^2 R^6 + \frac{12w_m^2 A^2(\Omega) - 2w_m C(\Omega)}{25} R^5 + \\ &\quad \frac{3w_m C(\Omega) - 9w_m^2 A^2(\Omega)}{16} R^4. \end{aligned} \quad (20)$$

将中面位移  $u_r$  用应力函数  $\phi$  表示, 方程(16) 变为

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= \ddot{\omega}^4 w + \frac{\partial^2 w}{\partial \Omega^2} + \ddot{\omega}^2 M_T - \frac{12(1-\nu^2)}{R} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial R^2} \frac{\partial w}{\partial R} + \frac{\partial \phi}{\partial R} \frac{\partial^2 w}{\partial R^2} \right) = 0, \\ f_2 &= \ddot{\omega}^4 \phi + \ddot{\omega}^2 N_T + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial R} \frac{\partial^2 w}{\partial R^2} = 0, \\ f_3 &= \ddot{\omega}^2 M_T - \tau d^2 \frac{\partial M_T}{\partial \Omega} - 12d^2(1+M)M_T + \beta \tau d^2 \frac{\partial}{\partial \Omega} (\ddot{\omega}^2 w) = 0, \\ f_4 &= \ddot{\omega}^2 N_T - 4Md^2 N_T - \tau d^2 \frac{\partial N_T}{\partial \Omega} - \frac{\beta \tau d^2}{1+\nu} \frac{\partial}{\partial \Omega} \times \\ &\quad \left[ (1-\nu) \left( \frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial R} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial R^2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial R} \right)^2 + 2N_T \right] = 0, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

由 Galerkin 方法, 对方程  $f_1, f_2, f_3$  积分, 有

$$\left. \begin{aligned} \int_0^1 f_1(W, M_T, \phi) W(R) R dR &= 0, \\ \int_0^1 f_3(W, M_T, \phi) W(R) R dR &= 0, \\ \int_0^1 f_4(W, M_T, \phi) W(R) R dR &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

设板有初始位移, 无初始速度, 则有:

$$A(0) = 1, A'(0) = 0 \quad (23)$$

设板的初始温度分布如下

$$T^*|_{t=0} = \Theta v_m W(R) \left( 1 + \frac{z}{h} \right), \quad (24)$$

其中  $\Theta$  是板的初始温度分布幅值, 可得

$$B(0) = d^2(1-\nu)\alpha\Theta, \quad C(0) = d^2\alpha\Theta. \quad (25)$$

由(22)式结果, 得到关于  $A(\Omega)$ 、 $B(\Omega)$ 、 $C(\Omega)$  的非线性常微分方程组。加上初始条件, 并略作变形, 可得一个常微分方程组:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dA}{d\Omega} &= F(\Omega), \quad A(0) = 1, \\ \frac{dF}{d\Omega} &= -30(1-\nu^2)A^3 w_m^2 - 105A + 7B + \frac{29}{2}(1-\nu^2)ACv_m, \quad F(0) = 0, \\ \frac{dB}{d\Omega} &= -7\beta \frac{dA}{d\Omega} - \alpha_1 B, \quad B(0) = (1-\nu)d^2\alpha\Theta, \\ \frac{dC}{d\Omega} &= -\alpha_2 A \frac{dA}{d\Omega} w_m - \alpha_3 C, \quad C(0) = d^2\alpha\Theta, \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

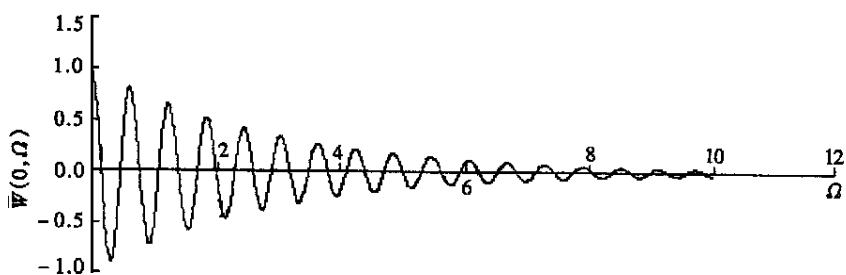
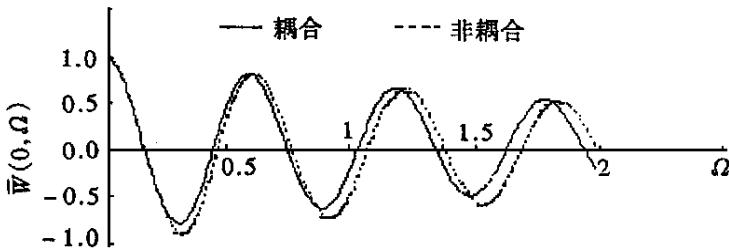
其中:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{\tau d^2} [7 + 12d^2(1+M)], \quad \alpha_2 = \frac{4\beta[6 - 5(1-\nu)]}{9(1+\nu) + 6\beta(1-\nu)}, \\ \alpha_3 &= \frac{12(1+\nu)(5 + 3Md^2)}{\tau d^2[9(1+\nu) + 6\beta(1-\nu)]}. \end{aligned}$$

### 3 结果与分析

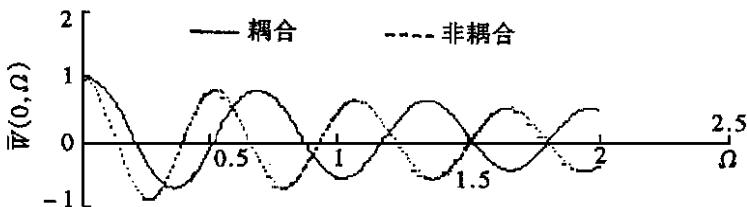
对于(26)式给出的初值问题, 我们首先得到振幅衰减趋势如图 2, 热弯矩和热中面力随时间的衰减趋势相似。

当考虑热弹耦合效应时, 圆板的振动频率将发生改变。当板的初始位移较小时, 热弹耦合效应使板的固有频率相对于无热弹耦合情形提高, 此时这种效应相当于附加了面内拉力; 当初始位移较大时, 热弹耦合效应使固有频率降低, 这相当于在板平面内附加了一个压力。

图 2 振幅衰减图 ( $W(0,0) = 1$ )

$\nu = 0.3, W(0,0) = 0.1, \beta = 0.13, \tau_d^2 = 3.5 \times 10^6, d^2\alpha\Theta = 0$

图 3 给定初始位移较小时耦合与非耦合情况的比较



$\nu = 0.3, W(0,0) = 5, \beta = 0.13, \tau_d^2 = 3.5 \times 10^6, d^2\alpha\Theta = 0$

图 4 给定初始位移较大时耦合与非耦合情况的比较

可以看出, 随着  $\beta$  的增大, 振幅衰减的速度减小。但总的说来, 影响较小。并且, 随着  $\beta$  的增大, 振动的周期缩短, 固有频率有所增大。随组合参数  $\beta$   $\left( \beta = \frac{E(1+\nu)\alpha^2 T_0}{(1-2\nu)\rho C_s} \right)$  的增大, 热弹耦合效应逐渐减小, 振幅衰减速度变缓。

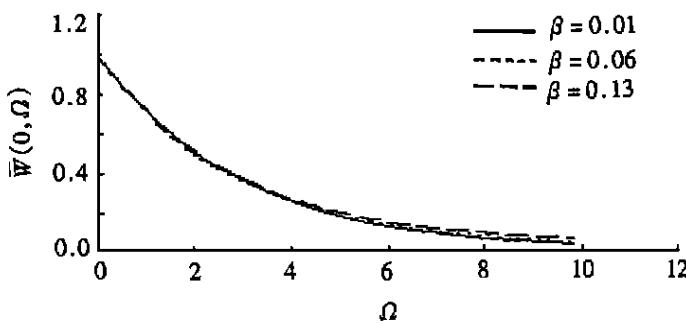
随着  $d^2\alpha\Theta$  的增大, 振幅衰减的速度逐渐缓慢。且随着  $d^2\alpha\Theta$  的增大, 振动频率略有增大。组合参数  $d^2\alpha\Theta$  的值越小, 热弹耦合效应越强, 振幅衰减越快。

随着  $\tau_d^2$  的减小, 振幅衰减越来越快。但参数  $\tau_d^2$  的变化对周期并无影响。 $\tau = \tau_0 \omega_0$ , 其中,  $\tau_0$  是板的热扩散松弛时间。热扩散松弛时间越短, 振幅衰减越快。

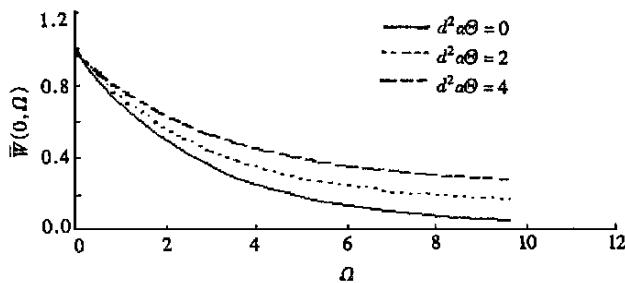
另外, 我们还研究了初始挠度对振动的影响, 随着位移  $w$  的增大, 振幅衰减速度加快。在  $w$  较小时, 随  $w$  的增大, 频率增大; 但  $w$  较大时, 随  $w$  的增大, 频率减小。

在热弹耦合的圆板非线性振动中, 我们通过分析可以得到以下的结论:

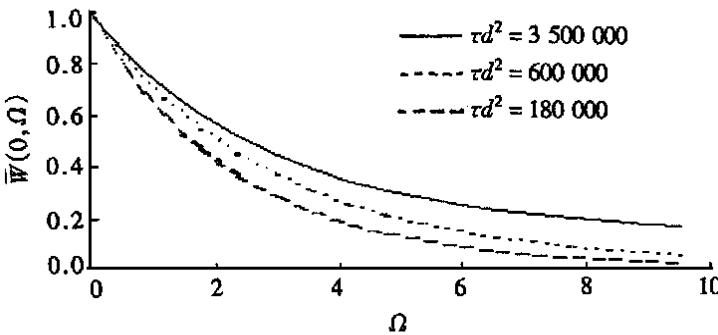
1) 热弹耦合效应对非线性振动的影响主要是引起振幅衰减。其物理实质是: 当板横向振动时, 板内纤维的拉伸或收缩使得板内产生了非均匀非稳态的温度场, 产生温度梯度。于是,



$$\nu = 0.3, \quad W(0,0) = 1, \quad \tau d^2 = 3.5 \times 10^6, \quad d^2 \alpha \Theta = 0$$

图 5 组合参数  $\beta$  对振动的影响

$$\nu = 0.3, \quad W(0,0) = 1, \quad \tau d^2 = 3.5 \times 10^6, \quad \beta = 0.06$$

图 6 组合参数  $d^2 \alpha \Theta$  对振动的影响

$$\nu = 0.3, \quad w = 1, \quad \beta = 0.06, \quad d^2 \alpha \Theta = 2$$

图 7 组合参数  $\tau d^2$  对振动的影响

通过热传导, 热量在板内流动, 并且在板上、下表面与周围介质之间发生热交换。这样, 板内的能量转换成热能耗散掉, 振动就会逐渐衰减。

2) 影响周边固支圆板非线性振动的因素主要有热弹耦合效应参数  $\beta$ ,  $\tau d^2$ , 以及初始位移参数  $w$ 。热弹耦合效应越大, 振幅的衰减越快。

3) 当给定板的初始位移较小时, 热弹耦合效应使板的振动频率加快, 当给定板的初始位移较大时, 热弹耦合效应使板的振动频率减小, 这时热弹耦合效应变得非常重要, 如不考虑此效应将使分析造成较大误差。

- 4) 参数  $\beta$ ,  $Td^2$ ,  $w$  对振动的固有频率也发生一定的影响。  
 5) 由图 4 不难看出, 当圆板初始挠度较大时, 耦合效应对板的动力响应有较大的影响, 这表明当圆板初始挠度较大时必须计及耦合效应的影响。

感谢 就本文内容作者曾与韩强博士作过多次有益的讨论, 在此表示感谢!

### [ 参 考 文 献 ]

- [1] Chang W P, Wan S M. Thermomechanically coupled nonlinear vibration of plates[ J]. Int J Nonlinear Mech, 1986, 21(5): 375~ 389.
- [2] Chang W P, Jen S C. Nonlinear free vibration of heated orthotropic rectangular plate[ J]. Int J Solid Structures, 1986, 22(3): 267~ 281.
- [3] 戴德成. 矩形板的非线性热弹耦合振动[ J]. 振动工程学报, 1990, 3(2): 65~ 72.
- [4] 戴德成. 板的非线性热弹耦合振动——近似解析解[ J]. 应用力学学报, 1990, 7(2): 63~ 70.
- [5] 严宗达, 王洪礼. 热应力[ M]. 北京: 高等教育出版社, 1993.
- [6] 徐芝纶. 弹性力学[ M]. 北京: 高等教育出版社, 1996.
- [7] 曹志远. 板壳振动理论[ M]. 北京: 中国铁道出版社, 1989.
- [8] 韩强. 几种结构的动力屈曲、分叉和混沌运动的研究[ D]. 博士论文. 太原: 太原理工大学, 1996.
- [9] 程赫明, 王洪纲. 耦合热弹塑性问题的泛函及其变分原理[ J]. 应用数学和力学, 1988, 9(10): 865~ 870.
- [10] 张晓晴, 树学锋. 极坐标下板的非线性热弹耦合振动基本方程[ J]. 太原理工大学学报, 1999, 30(4): 343~ 345.

## Thermoelastic Free Vibration of Clamped Circular Plate

Shu Xuefeng, Zhang Xiaoqing, Zhang Jinxiang  
 (Institute of Applied Mechanics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan 030024, P R China)

**Abstract:** An analysis was given for the free vibration of clamped circular plate when temperature and stress fields were coupled. A nonlinear differential equation about time was obtained by using Galerkin's method. The numerical results of vibration amplitude vs time were compared with the uncoupled case. It is found that if the given initial displacement is small, the effect of thermoelastical coupling will make the natural frequency increase; if the given initial displacement is large, it will be the opposite case. Effects of some different vibration factors are also discussed.

**Key words:** nonlinear vibration; thermoelastic vibration; circular plate